

## 解説



## ウェーブレットと情報処理†

寅市和男†† 堀内隆彦†††

## 1. はじめに

与えられた未知の信号を解析する手段として、フーリエ変換が古くから役立てられてきた。その長所は、定数係数の線形微分・積分方程式に支配される系を明解に特徴付けられることにある。その理由は、積分核である exponential 関数系が、微分・積分作用素に対する固有関数であることによる。よって、周波数の意味で帯域制限された函数空間は、無限回連続微分可能な波形に対して最適な表現を与えてきた。

しかし、現実問題に現れる多くの信号は、無限回連続微分可能ではない。一例として、不連続点を一点でも含む波形が与えられたとき、その波形の表現には無限の帯域を必要とするので、帯域制限函数は、不連続波形に対して最悪の表現となっていると考えられる。この難点は、積分核である exponential 函数が無限回連続微分可能であることに起因していた。

1980年代になって、この難点を克服する理論が、J. Morlet によって発表された<sup>1)</sup>。これが、ウェーブレット (wavelet) 理論である。彼は、石油探査において断層を検出する際に必要となる波形の微分不可能な点を抽出するために、時間軸方向に拡大・縮小および平行移動して得られる局所的な三角波形の集合を積分核として用いた。この理論は、単なる積分変換としてだけでなく、函数近似の問題に発展し、現在では、画像情報の解析・圧縮、音響解析、生体のモデル化、自動制御系の設計など広い分野での応用が試みられている。

本稿では、情報処理の立場からウェーブレットを眺めることによって、数学的な厳密性を保持し

たまま解説を行う。そして、実際にウェーブレットを情報処理に用いる際に注意しなければならない問題点を述べる。最後に、ウェーブレットの応用例を紹介する。

## 2. ウェーブレット理論

本章では、ウェーブレットが登場した歴史的背景を述べた後、各種ウェーブレットについて解説する。

## 2.1 歴史的背景

古来から信号解析の手段として用いられてきたフーリエ変換は、その積分核として exponential 函数系を用いていた。この函数は周期函数であることから、時系列信号の周期性を解析する場合などに対して、大変有効に働いてきた。その一方で、この函数は無限に続く振動を有しているため、解析する対象の信号に定常性が仮定される。したがって、ある時刻における周波数の解析といった局所的な事象の解析は困難であった。

1946年になると、時間を局在化したフーリエ変換の概念が登場した。D. Gabor は、窓函数としてガウス函数を用いた窓フーリエ変換 (ガボール変換) によって、フーリエ変換の局在化を行った。しかしながら、この方法を用いた信号解析は、周波数の高低にかかわらず、窓の幅が固定されているという問題点をもっている。一般に、高周波信号の解析には狭い時間の窓が、低周波信号の解析には広い時間の窓が適切とされるが、ガボール変換は、そのような窓幅の調節を備えていなかった。

このような問題点を克服する「ウェーブレット解析」が1980年代に登場した<sup>1)~14)</sup>。ウェーブレット解析は、周波数に応じて窓の幅を変化させる枠組みを備えており、これによって非定常な信号を解析対象とすることが可能となった。前章で触れたように、J. Morlet は、局所的な三角波形を時

† Wavelet and Information Processing by Kazuo TORAICHI (Institute of Information Sciences and Electronics, The University of Tsukuba) and Takahiko HORIUCHI (Doctoral Program in Engineering, The University of Tsukuba).

†† 筑波大学電子・情報工学系

††† 筑波大学工学研究科

間軸方向に拡大・縮小および平行移動して得られる三角波形の集合を積分核として用いた。その後、A. Grossmann らは、積分核を三角波形以外のものへ一般化し、積分ウェーブレット変換を定式化した<sup>7),8)</sup>。この定式化は、与えられる一つの函数 (elementary wavelet: 基本素波) を出発点として、拡大・縮小と平行移動によって得られる一連の積分核を用いて対象となる信号を分析する方法を示している。やがて、積分ウェーブレット変換を離散化することが、実用上有用であることが示され、まず拡大・縮小パラメータのみを離散化した2進ウェーブレット変換が議論されるようになった<sup>9)</sup>。その後、平行移動パラメータも離散化した「フレーム」の概念が Duffin, Schaeffer によって導入され<sup>10)</sup>、リース基底との関連を含めて Daubechies らによって研究された<sup>11)</sup>。S. Mallat は、Morlet の階層的構造を  $L^2(R)$  に対する階層的近似 (multiresolution approximation) として一般的に定式化した<sup>12)</sup>。この枠組みは、ウェーブレット級数展開と呼ばれ、歴史的に言えば、Haar 函数<sup>13)</sup>が有している階層的構造を一般的に述べたものとしてとらえられる。以上の各種ウェーブレットの関係を表-1 にまとめる。

次節以降では、各ウェーブレット解析を定式化し、それらの関係について解説する。

2.2 積分ウェーブレット変換

本節では、積分ウェーブレット変換を定義した後、いくつかの性質を解説する。

以下に現れる記号  $R, C, Z$  は、それぞれ実数の全体、複素数の全体、整数の全体を表すものとする。また、以下で取り扱われる函数の全体は、内積とノルムがそれぞれ

$$(f, g)_{L^2} := \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}dt, \tag{1}$$

$$\|f\|_{L^2} := [(f, f)_{L^2}]^{1/2}, \tag{2}$$

で定義された Hilbert 空間

$$L^2(R) := \{f: R \rightarrow C \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty\}, \tag{3}$$

であるとする。このとき、積分ウェーブレット変換 (integral wavelet transform) は以下のように定義される。

[定義] (基本素波)

$L^2(R)$  の函数  $\phi$  が、

$$c_\phi := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)e^{-i\omega t} dt|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty, \tag{4}$$

なる条件を満たすとき、函数  $\phi$  は基本素波と呼ばれる。

[定義] (積分ウェーブレット変換)

各基本素波に対して、函数  $f$  の積分ウェーブレット変換は、

$$(W_\phi f)(a, b) := |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\phi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt, \tag{5}$$

$$\forall f \in L^2(R), a (\neq 0) \in R, b \in R,$$

で定義される。

(5) 式の積分核である  $\phi((t-b)/a)$  は、基本素波  $\phi(t)$  を時間軸方向に  $a$  倍縮小して、 $b$  だけ平行移動したものとなっている。係数  $(W_\phi f)(a, b)$  は、 $f(t)$  と  $\phi((t-b)/a)$  との相関となっており、 $\phi((t-b)/a)$  成分への  $f(t)$  のモーメントを意味している。したがって、 $(W_\phi f)(a, b)$  は、時刻  $b$  において信号  $f(t)$  に含まれる  $\phi(t/a)$  の成分を表していると解釈できる。このように、積分ウェーブレット変換は、信号を周波数  $a$  と時間  $b$  との2次元に表現するものである。

積分ウェーブレット変換からもとの函数を得る逆変換は、以下のように求められる。

[定理]

函数  $f(t)$  のウェーブレット変換  $(W_\phi f)(a, b)$  に

表-1 各種ウェーブレット変換の関係

	拡大・縮小 $a$	平行移動 $b$	備 考
積分ウェーブレット変換	$R$	$R$	
2進ウェーブレット変換	$1/2^j, (j \in Z)$	$R$	
フ レ ー ム	$1/2^j, (j \in Z)$	$1/2^j, (j \in Z)$	$L^2(R)$ で overcomplete
リ ー ス 基 底 展 開	$1/2^j, (j \in Z)$	$1/2^j, (j \in Z)$	$L^2(R)$ で complete
ウェーブレット級数展開	$1/2^j, (j \in Z)$	$1/2^j, (j \in Z)$	$L^2(R)$ で complete 周波数バンド内の成分が直交

対して、条件(4)が満たされているならば、

$$f(x) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [(W_\psi f)(a, b)] |a|^{-1/2} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da}{a^2} db, \quad \forall f \in L^2(R), \quad (6)$$

が成り立つ。これを積分ウェーブレット逆変換と呼ぶ。

この逆変換の公式は、 $f(t)$  が各成分によって合成されている様子を端的に表している。

次に、積分ウェーブレット変換がもっているいくつかの性質について解説する。

【性質】

$f, g \in L^2(R)$  の積分ウェーブレット変換を、それぞれ  $F_\psi, G_\psi$  で表せば、以下の性質が成り立つ。

性質 1:  $\lambda F_\psi(a, b) + \mu G_\psi(a, b)$

$$= |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} [\lambda f(t) + \mu g(t)] \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (a, b \in R; a \neq 0), \quad (7)$$

性質 2:  $c_\psi \cdot (f, g)_{L^2}$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [F_\psi(a, b) \overline{G_\psi(a, b)}] \frac{da}{a^2} db, \quad (8)$$

性質 3:  $c_\psi \cdot \|f\|_{L^2}^2$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |F_\psi(a, b)|^2 \frac{da}{a^2} db. \quad (9)$$

性質 1 は、積分ウェーブレット変換の線形性を示している。性質 2 と性質 3 は、それぞれ積分ウェーブレット変換が内積とノルムを保存することを示している。しかし、このことは、函数系  $\left\{ \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\}_{a \in R, b \in R}$  が直交系を成していることを意味しているのではない。この函数系は、 $L^2(R)$  に対して、過剰な斜交系となっている。

以上では、積分ウェーブレット変換を解説した。フーリエ変換に対応してフーリエ級数展開が実際の応用場面で用いられているように、積分ウェーブレット変換に対応する級数展開形式が実際の計算のために必要である。次節以降では、離散ウェーブレット変換と級数展開形式を解説する。

### 2.3 離散ウェーブレット変換

ウェーブレット変換をデジタル計算機で実現する際に、パラメータ  $a$  と  $b$  は離散値としてのみ取扱いが可能である。パラメータ  $a, b$  を離散化

したウェーブレットは、離散ウェーブレット変換と呼ばれ、パラメータの取り方によっていくつかに分類されている。

まず、平行移動のパラメータ  $b$  は連続のまま、拡大・縮小パラメータ  $a$  を離散化することを考える。パラメータ  $a$  を  $a_j := 2^{-j}, j \in Z$  ととることによって、周波数軸の正の部分相互に交わらない周波数バンドに分割できる。このようなウェーブレット変換は、2進ウェーブレット変換 (dyadic wavelet transform) と呼ばれ、以下のように定義される。

【定義】 (2進ウェーブレット変換)

各基本素波に対して、函数  $f$  の2進ウェーブレット変換は、

$$(W_{\psi^j} f)\left(\frac{1}{2^j}, b\right) := 2^{j/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi(2^j(t-b))} dt, \quad f \in L^2(R), a = a_j := \frac{1}{2^j}, (j \in Z), b \in R, \quad (10)$$

で定義される。

また、 $\phi(t)$  のフーリエ変換を  $\hat{\phi}(\omega)$  とおくと、2進ウェーブレット逆変換が以下のように求められる。

【定理】

$L^2(R)$  の函数  $\phi$  に対して、

$$A \leq \sum_{j \in Z} |\hat{\phi}(2^{-j}\omega)|^2 \leq B, \quad (11)$$

を満たすような  $0 < A \leq B < +\infty$  なる  $A, B$  が存在するとき、任意の  $f \in L^2(R)$  に対して2進ウェーブレット逆変換が存在して、

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{j \in Z} \int_{-\infty}^{\infty} 2^{j/2} [(W_{\psi^j} f)\left(\frac{1}{2^j}, b\right)] \\ &\quad \times [2^j \psi^*(2^j(x-b))] db \\ &= \sum_{j \in Z} 2^{3j/2} \int_{-\infty}^{\infty} (W_{\psi^j} f)\left(\frac{1}{2^j}, b\right) \\ &\quad \times \psi^*(2^j(x-b)) db \end{aligned} \quad (12)$$

で表される。ただし、函数  $\psi^*$  は  $\psi$  の2進共役であるが、一意ではない。その一例は、

$$\hat{\psi}^*(\omega) := \frac{\hat{\psi}(\omega)}{\sum_{k \in Z} |\hat{\psi}(2^{-k}\omega)|^2} \quad (13)$$

で与えられる。

次に、平行移動パラメータ  $b$  も離散化することを考える。パラメータ  $b$  を  $b_{j,k} := \frac{k}{2^j} b_0, (j, k \in Z, b_0 > 0)$  ととることによって、 $b$  を離散的な標本点の集合に分割できる。すると、積分核は、

$$\psi_{b_0; j, k}(t) := 2^{j/2} \psi(2^j t - kb_0), \quad (14)$$

と表現される。この積分核を用いた 2 進ウェーブレット変換が以下の条件を満たすとき、 $\{\psi_{b_0; j, k}\}$  は  $L^2(R)$  のフレーム (frame) と呼ばれる。

【定義】 (フレーム)

任意の  $f \in L^2(R)$  に対して、

$$A \|f\|_{L^2}^2 \leq \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{b_0; j, k}(t)} dt \right|^2 \leq B \|f\|_{L^2}^2, \quad (15)$$

を満たすような  $0 < A \leq B < +\infty$  なる  $A, B$  が存在するとき、 $\{\psi_{b_0; j, k}\}$  は  $L^2(R)$  のフレームと呼ばれる。

また、フレームをもつ 2 進ウェーブレット逆変換は、以下のように定義される。

【定理】

任意の  $f \in L^2(R)$  に対して、逆変換は

$$f(x) = \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \left[ (W_{\psi} f) \left( \frac{1}{2^j}, \frac{k}{2^j} b_0 \right) \right] M^{-1} \psi_{b_0; j, k}, \quad (16)$$

で表される。ここで、 $M: L^2(R) \rightarrow L^2(R)$  は、 $L^2(R)$  上で定義された一意な有界線形作用素であり、

$$(Mf)(x) := \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{b_0; j, k}(t)} dt \right] \times \psi_{b_0; j, k}(x), \quad (17)$$

と表される。

一般に、フレーム  $\{\psi_{b_0; j, k}\}_{j, k \in \mathbb{Z}}$  は線形独立ではないので、ある関数  $f$  に対して式 (16) における係数は、必ずしも一意でない。さらに、強い条件を付加することによって、積分核の集合  $\{\psi_{b_0; j, k}\}$  を  $\ell^2$ -線形独立とすることができる。これが以下で述べるリース基底 (Riesz basis) である。

【定義】 (リース基底)

関数系  $\{\psi_{b_0; j, k}\}$  は、下記の条件を満たすときにリース基底と呼ばれる。

(条件 1) 線形空間

$$\langle \psi_{b_0; j, k} \rangle_{j, k \in \mathbb{Z}} \quad (18)$$

は  $L^2(R)$  で稠密である。

(条件 2)

$$A \|\{c_{j, k}\}\|_{\ell^2}^2 \leq \left\| \sum_{j, k \in \mathbb{Z}} c_{j, k} \psi_{b_0; j, k} \right\|_{L^2}^2 \leq B \times \|\{c_{j, k}\}\|_{\ell^2}^2,$$

を満たすような  $0 < A < B < +\infty$  が存在する。

ここで  $\ell^2$  は、内積とノルムを、それぞれ

$$(\{a_n\}, \{b_n\})_{\ell^2} := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}, \quad (19)$$

$$\|\{a_n\}\|_{\ell^2} := [(\{a_n\}, \{a_n\})_{\ell^2}]^{1/2} \quad (20)$$

で定義された Hilbert 空間

$$\ell^2 := \left\{ \{a_n\} \subset C \mid \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \right\} \quad (21)$$

である。

リース基底を積分核に用いた場合の逆変換は、フレームを用いた場合と同様である。

さらに、リース基底展開に対して、相異なる周波数バンド内の成分が直交する条件を導入することによって、近似理論としてよく用いられるウェーブレット級数展開が導出される。次節では、これに関して解説する。

### 2.4 ウェーブレット級数展開

S. Mallat は、Haar 関数が有する階層的構造を  $L^2(R)$  に対する多重解像度解析として一般的に定式化し<sup>12)</sup>、後に S. L. Lee がこれを修正した<sup>14)</sup>。

階層的近似において、 $L^2(R)$  に対して稠密となるような可算次元部分空間の列が議論の対象となる。これらの部分空間は、 $\ell^2$  に同形となっている。

与えられた基本素波から階層的近似を構成するための平行移動を行う作用素と時間軸方向の拡大・縮小を行う解像作用素は、以下のように定義される。

【定義】 (解像作用素)

ある正の実数  $a$  に対して、

$$(D_a f)(x) = f(ax), \quad \forall f \in L^2(R), \forall x \in R, \quad (22)$$

を満たす  $D_a: L^2(R) \rightarrow L^2(R)$  を解像作用素と呼ぶ。

作用素  $D_a$  は、関数  $f$  の時間軸方向の幅を  $1/a$  に縮小することを意味している。

【定義】 (平行移動作用素)

ある実数  $b$  に対して、

$$(T_b f)(x) = f(x-b), \quad \forall f \in L^2(R), \forall x \in R, \quad (23)$$

を満たす  $T_b: L^2(R) \rightarrow L^2(R)$  を平行移動作用素と呼ぶ。

作用素  $T_b$  は、関数  $f$  を時間軸方向に  $b$  だけ遅らせることを意味している。

階層的近似の構造を説明しやすい関数として、Haar 関数を示す。Haar 関数は、基本素波

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2) \\ -1, & x \in [1/2, 1) \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (24)$$

の時間軸方向の拡大・縮小と平行移動を繰り返した結果、 $\{2^{k/2}T_{2^{-k},n}D_{2^k}\psi\}_{n=-\infty}^{\infty}$ として表される。

函数空間の列  $\{O_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$  を、

$$O_j := \left\{ g \mid g = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j,n} 2^{j/2} T_{2^{-j},n} D_{2^j} \psi, \{c_{j,n}\} \in \ell^2 \right\} \quad (25)$$

とすれば、

$$V_k := \bigoplus_{j=-\infty}^{k-1} O_j \quad (26)$$

なる函数空間の列  $\{V_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  は、

$$\phi(x) := \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{その他の場合} \end{cases} \quad (27)$$

なる矩形函数を基本素波として、

$$V_k = \left\{ f \mid f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{j,n} T_{2^{-k},n} D_{2^k} \phi, \{c_{j,n}\} \in \ell^2 \right\} \quad (28)$$

という形に表される。

このように、 $V_k$  の要素は、時間軸上における階段状函数となっており、 $\{O_j\}_{j=-\infty}^{\infty}$  は、 $V_k$  の直交分解となっている。また、 $k$  を無限大とする極限において、 $V_k$  は  $L^2(R)$  に対して稠密になっている。これらのことから、函数  $f \in L^2(R)$  に対して、

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{k-1} c_{j,n} T_{2^{-j},n} D_{2^j} \psi \rightarrow f, \quad (k \rightarrow \infty), \quad (29)$$

なる形の近似が存在する。添え字  $j$  の上限  $k-1$  を有限に限ったとき、この級数は、 $f$  に対する  $V_k$  の要素による最良近似となっている。この意味において、 $\{V_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  は、 $L^2(R)$  を、関数の細かさに応じて段階的に分解したものといえる。

階層的近似は、一般に次のように定義される<sup>14)</sup>。

【定義】(基本素波による階層的近似)

$L^2(R)$  の閉部分集合の列  $\{V_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  と関数  $\phi \in V_0 \subset L^2(R)$  とが、以下の M1~M4 を満たすとき、 $\{V_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  は、基本素波  $\phi$  によって生成される  $L^2(R)$  の階層的近似という。

$$M1. V_0 = \left\{ f \mid f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T_n \phi, \{a_n\} \in \ell^2 \right\},$$

任意の  $\{a_n\} \in \ell^2$  に対して、

$$A \|\{a_n\}\|^2_{\ell^2} \leq \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n T_n \phi \right\|_{L^2}^2 \leq B \|\{a_n\}\|^2_{\ell^2}$$

を成りたらしめる正の定数  $A$  と  $B$  が存在する。

$$M2. V_k \subset V_{k+1}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$M3. \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} V_k \text{ は, } L^2(R) \text{ に対して稠密}$$

$$\bigcap_{k=-\infty}^{\infty} V_k = \{0\}$$

$$M4. f \in V_k \Leftrightarrow D_2 f \in V_{k+1}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

条件 M1 は、空間  $V_0$  が基本素波  $\phi$  を平行移動して得られる函数系によって張られる線形空間であること、ならびにその空間が  $\ell^2$  に同形であることを意味している。条件 M2 と M3 は、 $L^2(R)$  に対して  $V_k$  よりも  $V_{k+1}$  のほうが精度の高い近似であること、ならびに  $k$  を無限大とする極限で  $V_k$  が  $L^2(R)$  に稠密になることを意味している。条件 M4 は、 $V_k$  の要素を時間軸方向で半分に縮小した結果が  $V_{k+1}$  の要素となること、またその逆に  $V_{k+1}$  の要素を時間軸方向に2倍に拡大した結果が、 $V_k$  の要素となることを意味している。

次に、階層的近似に対応して作られる直交補空間の列とそれを生成する基本素波が定義される。

【定義】(直交補空間列とそれに対応する基本素波)

$L^2(R)$  の閉部分集合の列  $\{V_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  は、 $L^2(R)$  の階層的近似であるとする。 $L^2(R)$  の閉部分集合の列  $\{O_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  と関数  $\psi \in L^2(R)$  が以下の C1 と C2 を満たすとき、 $\{O_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  は、階層的近似  $\{V_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  に対応し、基本素波  $\psi$  によって生成される直交補空間の列であるという。

$$C1. V_{k+1} = V_k \oplus O_k, \quad V_k \perp O_k, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$C2. O_0 = \left\{ f \mid f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n T_n \psi, \{b_n\} \in \ell^2 \right\},$$

任意の  $\{b_n\} \in \ell^2$  に対して、

$$A \|\{b_n\}\|^2_{\ell^2} \leq \left\| \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n T_n \psi \right\|_{L^2}^2 \leq B \|\{b_n\}\|^2_{\ell^2}$$

を成りたらしめる正の定数  $A$  と  $B$  が存在する。

条件 C1 は、 $V_{k+1}$  において  $O_k$  が  $V_k$  の直交補空間であることを意味している。条件 C2 は、その  $O_k$  が基本素波  $\psi$  を平行移動して得られる函数形によって張られる線形空間であることを意味している。条件 C1 と C2 ならびに条件 M1~M4 から、直交補空間列について以下の性質が導か

れる。

〔性質〕 (直交補空間列)

性質 1:  $O_j \perp O_k, j \neq k$

性質 2:  $\bigoplus_{k=-\infty}^{\infty} O_k$  は,  $L^2(R)$  に対して稠密

性質 3:  $g \in O_k \Leftrightarrow D_{2^q} g \in O_{k+1}, k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

性質 1 は, 任意の二つの直交補空間が直交していることを表している。性質 2 は,  $L^2(R)$  が直交補空間列  $\{O_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$  の直和として分解されることを表している。性質 3 は,  $O_k$  が条件 M4 と同様な性質をもつことを示している。

性質 2 によれば, 波形の性質を解析するという目的に対して, 直交補空間に対応する素波による波形の展開形式が意味をもつ。この展開形式は, 函数  $f \in L^2(R)$  に対して,

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k,n} T_{2^{-k}} \cdot D_{2^k} \psi \quad (30)$$

とかかれる。展開係数  $c_{k,n}$  は,  $f$  に含まれる成分  $T_{2^{-k}} \cdot D_{2^k} \psi$  の大きさを表している。

以上では, Haar 函数における階層構造の一般化である階層的近似の枠組みを述べた。

### 3. ウェーブレット理論の問題点

一般に, 情報処理にウェーブレット変換を用いる際には, 以下の 3 点に注意する必要がある。第 1 点は, 離散ウェーブレット変換は, 一般にウェーブレット変換の近似に過ぎないということである。すなわち, 両者の間には, フーリエ解析で用いられるような標本化定理に相当する連続と離散の同形性が, 一般的には成り立っていない。このことを踏まえ, 連続系で定義した理論をそのまま離散系に適用すると, 思わぬ結果に陥ることとなる。第 2 点は, ウェーブレット級数展開の係数を, 一般に直接的には求めることができないことである。逆変換の係数を直接的に求めるためには, 基本素波の双直交系が導出されていることが要求される。第 3 点は, 近似理論における誤差に関する議論が不明確であるということである。すなわち, 近似対象の許容誤差とウェーブレットのパラメータとの関係が考察されていない。

さらに, 基本素波の決定に着目すると, 以下のような問題点を含んでいる。第 1 点は, 応用目的の成否を決する基本素波を選択するための規範が不明確なことである。第 2 点は, 基本素波の時間軸上での初期位置の設定の仕方が不明確なこと

である。第 3 点は, 階層的近似の際に重要となる素波の時間軸上での幅の設定の仕方が不明確なことである。

これらの問題点の解決法の一つとして, 著者らの一人が 1960 年代から独自に検討してきたフルーエンシ解析がある<sup>15)~18)</sup>。フルーエンシ函数空間では, 連続微分可能性というパラメータを変化させることによって, 微分不可能な階段状函数空間から無限回微分可能な帯域制限函数空間までを表現できる。この意味において, フルーエンシ解析は, 周波数概念の一般化を与えていると考えられる。したがって, フルーエンシ解析は, ウェーブレット理論の基本素波の選択において, 連続微分可能性という指標を備えたものとなっている。また, フルーエンシ解析は, ウェーブレット解析がもっていない高調波成分の概念をもっており, 物理的な意味が明解に与えられている。さらに, フルーエンシ解析では, 連続波形と離散波形との同形性が, 可算無限個用意されている双直交基底によって特徴づけられており, 級数展開の係数を直接的に求めることが可能となっている。

### 4. 実際問題への応用例

体系化して述べてきたウェーブレット理論は, 現在において, 画像・音響の解析や圧縮, 回路・システムのモデル化, 自動制御系の設計などに活発に応用され始めている。

著者らは, 1 変数のウェーブレット解析の考えに基づいた応用研究として, 脳波のデータ圧縮, システム設計論, デジタル音響<sup>19)</sup>, DTP<sup>20)</sup> などを行ってきた。特に, デジタル音響の基礎理論となっているフルーエンシ DAC は, 第 3 の DA 変換方式と言われつつあり, ウェーブレット DAC とも言える。また, 2 変数のウェーブレット解析の考えに基づいた応用研究として, 画像処理の問題が考えられる<sup>21)</sup>。本稿では, 今後の研究が期待される多変数ウェーブレットの一応用例である 3 次元画像からのノイズ除去手法<sup>22)</sup>を例題として, 前述したウェーブレットの問題点についてのみ触れることにする。

刻印文字を距離画像として観測した後に文字認識をする研究を行ってきた。刻印文字を距離画像として捉えると, 信号より大きなダイナミックレンジをもつノイズが生じることを見いだした。こ

れは、従来観測されてきた濃淡画像とは異なる性質のノイズであり、このノイズを除去するための新たな手法が必要となる。著者らは、ウェーブレットの一種と言えるものを多変数拡張した手法を用いた。具体的には、観測された距離画像を  $g(i, j)$  としたときに、ノイズ成分  $g^{noise}(i, j)$  は、

$$g^{noise}(i, j) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) \phi(a, x-i, y-j) \times dx dy, \quad (31)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(a, x, y)|^2 dx dy = 1, \quad (32)$$

と表現される。ここで、 $\phi$  はノイズに関係している関数であり、前述の可算無限個あるフルーエンシ函数を用いた。パラメータ  $a$  は、解像度を変化させるためのパラメータである。著者らは、パラメータを変化させることによって、ノイズと相関の深い基本素波を求め、それを入力信号から除去する理論的な手法を開発した。本章では、今後の研究が期待される多変数ウェーブレットの一応用例として、3次元画像のノイズ除去手法を概説した。

## 5. む す び

本稿は、積分ウェーブレットから離散ウェーブレットまでを定義し、歴史的背景を踏まえながら解説した後に、情報処理の観点から、ウェーブレットを情報処理に用いる際に生じる問題点を指摘した。

ウェーブレット解析の数学的道具立ては、当初においては、Hilbert 空間論の範囲で論じられるが、最適な情報処理を施せるウェーブレット作用素を論理的に求めるなどの本質的議論は、作用素代数の問題になっていくに違いない。そこから、再び画像処理などへの決定的応用が出てくることによって、一段と高いレベルの実質を備えた理論が、画像・音響などの必須理論となることを念じている。

## 参 考 文 献

- 1) Morlet, J., Arens, G., Fourgreau, E. and Giard, D.: *Wave Propagation and Sampling Theory, Geophys.*, Vol. 47, Part I, pp. 203-221; Part II, pp. 222-236 (1982).
- 2) Daubechies, I.: *The Wavelet Transform, Time Frequency Localization and Signal Analysis, IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. 36, pp. 961-

- 1005 (1990).
- 3) Daubechies, I.: *Ten Lectures on Wavelet, CBMS-NSF Series in Appl. Math.*, SIAM Publ., Philadelphia (1992).
- 4) Chui, C.K.: *An Introduction to Wavelets, Wavelet Analysis and its Applications*, Academic Press, San Diego (1992).
- 5) Argoul, F. et al.: *Wavelet Analysis of Turbulence Reveals the Multifractal Nature of Richardson Cascade, Nature*, Vol. 338, pp. 51-53 (1989).
- 6) Flandrin, P., Magand, F. and Zakharia, M.: *Generalized Target Description and Wavelet Decomposition, IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Proc.*, Vol. 38, pp. 350-352 (1990).
- 7) Grossmann, A. and Morlet, J.: *Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape, SIAM J. Math. Anal.*, Vol. 15, pp. 723-736 (1984).
- 8) Grossmann, A., Morlet, J. and Paul, T.: *Transforms Associated to Square Integrable Group Representations I. General Results, J. Math Phys.*, Vol. 26, pp. 2473-2479 (1989).
- 9) Mallat, S. and Zhong, S.: *Wavelet Transform Maxima and Multiscale Edges, in Wavelets and their Applications*, Cambridge, MA (1991).
- 10) Duffin, R.J. and Schaeffer, A.C.: *A Class of Nonharmonic Fourier Series, Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 72, pp. 341-366 (1952).
- 11) Daubechies, I.: *The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis, IEEE Trans. Inform. Theory*, 36, pp. 961-1005 (1990).
- 12) Mallat, S.: *Multiresolution Approximations and Wavelet Orthonormal Bases of  $L^2(\mathbb{R})$ , Trans, AMS*, Vol. 315, pp. 69-87 (1989).
- 13) Haar, A.: *Zur Theorie der Orthogonalen Funktionensysteme, Math. Annalen*, Vol. 69, pp. 38-53 (1910).
- 14) Lee, S.L., Nanda, T.R. and Tang, W.S.: *Multiresolution Approximation and Wavelets, National Univ. of Singapore Res. Rep. #453* (1991).
- 15) 寅市和男, 村上仁己, 吉本千禎: 二値論理直交函数とフーリエ級数との関係, 信学論, Vol. J52-C, pp. 751-752 (1969).
- 16) Toraichi, K., Miki, N., Murakami, J., Nagai, N. and Yoshimoto, C.: *The Relation of the Binary Orthogonal Matrix to the Fourier Series, Proc. IEEE Int. Conf. Circuit System Theory*, pp. 193-194 (1970).
- 17) 寅市和男, 小川英光, 五十嵐彰: デジタル信号処理に用いる基底の解析, 信学論, Vol. J60-A, pp. 136-146 (1977).
- 18) Kamada, M., Toraichi, K. and Mori, R.: *Periodic Spline Orthonormal Bases, J. of Approx. Theory*, Vol. 55, No. 1, pp. 27-38 (1988).
- 19) Toraichi, K., Kamada, M. and Mori, R.: *A Quadratic Spline Function Generator, IEEE*

*Trans. Acoustic, Speech and Signal Processing*,  
Vol. 37, No. 4, pp. 534-544 (1989).

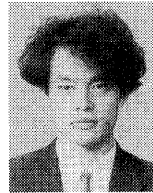
- 20) Toraichi, K.: *On a Method of Automatically Compressing Fonts with High Resolution*, Vol. 26, No. 2, pp. 227-235 (1993).
- 21) Toraichi, K., Horiuchi, T., Kalman, R.E., Ohtaki, Y. and Nagasaki, F.: *Compressing Data Volume of Left Ventricular Cineangiograms*, *IEEE Trans. Biomedical Engineering*, Vol. 40, No. 6, pp. 579-588 (1993).
- 22) 堀内隆彦, 寅市和男, 山田博三, 山本和彦: 距離画像を用いた刻印文字の計測とその効果, *電学論*, Vol. 113-C, pp. 1100-1106 (1993).

(平成5年10月1日受付)



寅市 和男

1943年生. 1966年東京電機大学工学部電子工学科卒業. 1971年北海道大学大学院博士課程修了. 工学博士. 同年電子技術総合研究所飯島特別研究室入所. 1980年筑波大学電子・情報工学系助教授を経て, 現在同教授. 智慧システムとその生体工学への応用の研究に従事. 平成元年度高柳記念研究助成. IEEE, 電子情報通信学会, 電気学会など各会員.



堀内 隆彦

1967年生. 1990年筑波大学第3学群情報学類卒業. 現在, 同大学院博士課程工学研究科在学中. 非線形なシステム理論の構築と認識・思考の数学的モデル化の研究に従事. 日本学術振興会特別研究員. 電子情報通信学会会員.

