

## ガウス性信号の高効率 Golomb 符号化方式

高村 誠之<sup>†</sup> 八島 由幸<sup>†</sup>

<sup>†</sup> 日本電信電話株式会社 NTT サイバースペース研究所  
〒 239-0847 神奈川県横須賀市光の丘 1-1 Y-517A  
E-mail: †{takamura.seishi,yashima.yoshiyuki}@lab.ntt.co.jp

**あらまし** 生起確率が正規分布に従うガウス性信号は、数学や工学等の幅広い分野で観測される極めて重要な信号である。指数分布や両側指数分布に対しては Golomb 符号が最適な可変長符号となるが、正規分布に対しては、そのように簡易な符号は存在していなかった。そこで本論文では、正規分布を指数分布に変換する可逆写像を定義し、本写像の後に Golomb 符号化を行うことで、ガウス性信号を効率的に符号化する方法を提案する。併せて最適な Golomb パラメータを推定する方法も提案する。実験の結果、理想的ガウス性信号に対しては通常の Golomb 符号化に比べ常に 1-7 ポイント高い 98%以上の符号化効率を達成すること、実際の工学的現場で観察される疑似ガウス性信号に対しては、Golomb 符号化に比べ平均で 7 ポイント高い 94.1%の符号化効率を与えることが確認された。

**キーワード** Golomb 符号、ガウス性信号、正規分布

## Efficient Golomb Coding for Gaussian Sources

Seishi TAKAMURA<sup>†</sup> and Yoshiyuki YASHIMA<sup>†</sup>

<sup>†</sup> NTT Cyber Space Laboratories, NTT Corporation  
Y-517A 1-1 Hikarino-oka, Yokosuka, Kanagawa, 239-0847 Japan  
E-mail: †{takamura.seishi,yashima.yoshiyuki}@lab.ntt.co.jp

**Abstract** Gaussian sources are observed in vast areas. Contrarily to what happens for the geometric and double-sided geometric distributions, there is no simple, instantaneous code for the normal distribution. This paper tackles this problem by mapping the normal distribution into the geometric distribution before applying Golomb codes. We also propose estimation method of optimal Golomb parameter. Experimental results show proposed method constantly yields coding efficiency of more than 98% for Gaussian source, while conventional straightforward Golomb coding yields 1-7 points worse. For empirical quasi-Gaussian source, our coding efficiency is 94.1% in average, which is about 7 points better than conventional coding.

**Key words** Golomb codes, Gaussian source, normal distribution

### 1. はじめに

生起確率が正規分布に従うガウス性信号(以後離散とする)は数学・工学の様々な場面で現れる極めて重要な信号である。整数信号の符号化方式は多数知られているが、うち Golomb 符号 [1] は、指数分布に従う信号を最も高効率に符号化でき、符号化・復号いずれも符号表が不要で、処理が極めて簡易であり、さらに任意に大きな整数入力値を符号化できるという特長があり、広く用いられている。しかしながらガウス性信号に対しては符号化効率が低下してしまうという問題があった。

Golomb 符号のように符号表を必要としない符号には Fibonacci 符号、Elias 符号、Exp-Golomb 符号など様々な存在するが、信号の生起確率が正規分布に従うことを仮定した符号は存在しな

い [2]。例えば Xue ら [3] の Hybrid Golomb 符号は、構成が複雑であり、かつ一般化正規分布の中でも、指数分布よりさらに急峻な分布が対象であるため、(指数分布より急峻でない) ガウス性信号に対しては効率が低下する。また Malvar [4] の一般化正規分布の学習型連長/Golomb 符号は、ガウス性信号源に対する符号化効率が、適切に設計された Golomb 符号よりも劣る。

Huffman 符号は可変長符号中最も効率が高く、算術符号は定常的信号源を理論効率限界付近まで圧縮可能であるが、いずれも符号表(頻度表)が必要である。

そこで従来ガウス性信号源の符号化において「処理の簡易さ」を優先する場合、効率を犠牲にし Golomb 符号化されていた [2]。

本稿では、ガウス性信号源を指数分布に変換する可逆写像を

表1 自然数  $z$  に対する Golomb 符号表の例。  $m$  は Golomb パラメータ  
 Table 1 An example of Golomb codeword table for natural number  $z$ .  $m$  represents Golomb parameter.

$z$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$
0	0	00	00	000	000	000
1	10	01	010	001	001	001
2	110	100	011	010	010	0100
3	1110	101	100	011	0110	0101
4	11110	1100	1010	1000	0111	0110
5	111110	1101	1011	1001	1000	0111
6	1111110	11100	1100	1010	1001	1000
7	11111110	11101	11010	1011	1010	1001
8	111111110	111100	11011	11000	10110	10100
9	1111111110	111101	11100	11001	10111	10101
10	11111111110	1111100	111010	11010	11000	10110

提案し、これを実際のガウス性信号源に施した後に Golomb 符号化することで、符号化効率が改善されることを示す。さらに、写像前の信号源の分散から、写像後の信号源に対して最適となる Golomb パラメータを推定する方法も提案し、その効果を検証する。

## 2. Golomb 符号の基本性質

Golomb 符号は、1 以上の整数値をとる Golomb パラメータ ( $m$  と呼ぶことにする) により、その符号表現が変化する。表 1 は、自然数  $z = 0 \dots 10$ 、 $m = 1 \dots 6$  に対する Golomb 符号である。Golomb パラメータ  $m$  が増すにつれ符号長の増加は緩やかになるため緩やかな分布の符号化に向き、逆に  $m$  が減少するにつれ符号長の増加は急になるため 0 に集中する急峻な分布の符号化に向く。

指数分布に従う信号としては、画像信号中、時空間的に隣接する画素間の輝度差や、画素輝度値の直交変換係数などがあり、例えば JPEG-LS [5] などではその符号化に Golomb 符号が用いられることがある。

表 1 からわかるように、Golomb 符号には被符号化整数  $z$  の値が  $m$  増すと符号長が 1 [bit] 増す (確率が 1/2 になることに等価)、という関係がある。従って、 $z$  の生起確率において

$$\text{Prob}(z) \propto 2^{-z/m} \quad (1)$$

$$= \exp(-\log 2 \cdot z/m) \quad (2)$$

という関係が成り立つ場合、Golomb パラメータ  $m$  の Golomb 符号が最適符号となる。

## 3. 提案手法

### 3.1 可逆正規-指数分布写像

本写像では、整数入力信号を 2 要素ずつの対  $(x, y)$  と見做し、これに一意の番号付けを施した結果として、0 以上の整数値  $z(x, y)$  を得る。  $z$  が満たすべき条件は

$$\min_{x,y} z(x, y) = 0 \quad (3)$$

$$l(x, y) < l(a, b) \implies z(x, y) < z(a, b) \quad (4)$$

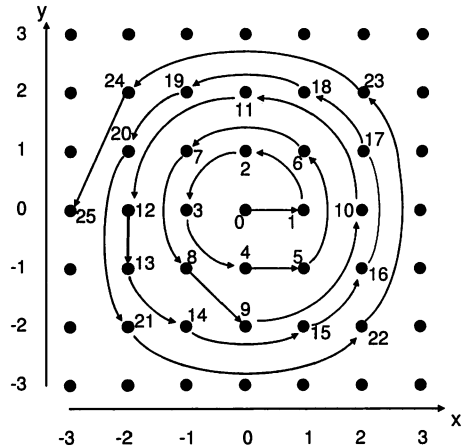


図1  $(x, y) \mapsto z$  の写像の例

Fig. 1 Mapping example of  $(x, y) \mapsto z$ .

$$z(x, y) = z(a, b) \iff (x, y) = (a, b) \quad (5)$$

である。ここで  $l(x, y)$  は原点と点  $(x, y)$  の距離を求める関数で、例えばユークリッド距離

$$l(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (6)$$

を用いる。原点からの距離が等しい格子点は一般に複数存在する (例えば  $(0, 1)$  と  $(1, 0)$ ) が、それらの  $z$  値への対応付けは任意である。図 1 は、反時計回りを保つ対応例である。

この写像の可逆性は明らかである。

### 3.2 分布写像に関する考察

まず格子点  $(x, y)$  の  $z$  値は、半径  $\sqrt{x^2 + y^2}$  の円周内の格子点数にほぼ等しく、その格子点数は円の面積にほぼ等しい。従って

$$z \approx \pi(x^2 + y^2) \quad (7)$$

となる。

$x$  が (および  $y$  も独立に) 正規分布  $N(0, \sigma^2)$  に従うものとする。i.i.d. 対である  $(x, y)$  は二次元正規分布に従い、さらに式 (7) を用いると

$$\text{Prob}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right) \quad (8)$$

$$\approx \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{z}{2\pi\sigma^2}\right) \quad (9)$$

を得る。

式 (9) は  $z$  に関する指数分布に他ならない。従って、Golomb 符号による効率的な符号化が期待できる。

### 3.3 最適 Golomb パラメータの推定

分散  $\sigma_e^2$  の指数分布

$$\text{Prob}(z) = \frac{1}{\sigma_e} \exp\left(-\frac{z}{\sigma_e}\right) \quad (10)$$

と式 (9) とを比較し

$$\frac{1}{\sigma_e} = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \quad (11)$$

を得る。従って

$$\sigma_e = 2\pi\sigma^2 \quad (12)$$

となる。

式(10)の符号化効率を最も高めると期待される Golomb パラメータ  $m_{est}$  は、式(2)より  $\log 2 \cdot \sigma_e$  に等しいので、

$$m_{est} = 2 \log 2 \cdot \pi\sigma^2 \quad (13)$$

が得られる。

$\sigma$  と  $d$  の間には関係

$$\sigma = 1/d \quad (14)$$

があるので、式(13)は

$$m_{est} = 2 \log 2 \cdot \pi/d^2 \quad (15)$$

とも表せる。

この推定の良否は、4.4において計算機実験により確認する。

### 3.4 ガウス性信号源符号化アルゴリズム

我々が提案するガウス性信号源の符号化アルゴリズムは以下のようなになる。

- (1) 入力される信号を逐次2個ずつまとめ  $(x, y)$  とする
- (2)  $(x, y)$  を 3.1の方法で自然数  $z$  に写像する
- (3) 信号源の分散に従い、適切な Golomb パラメータ  $m_{est}$  を 3.3の方法で求める

(4)  $z$  を前記 Golomb パラメータ  $m_{est}$  にて Golomb 符号化する、あるいは複数回試行により最適なパラメータ  $m_{opt}$  を求め Golomb 符号化する

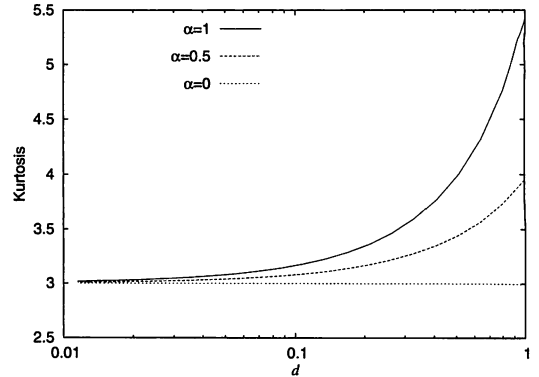
## 4. 実験結果

数値計算により生成した量子化ガウス性信号と、現実世界にて観測された実際のガウス性信号のそれぞれについて、提案方式の符号化効率を検証した。

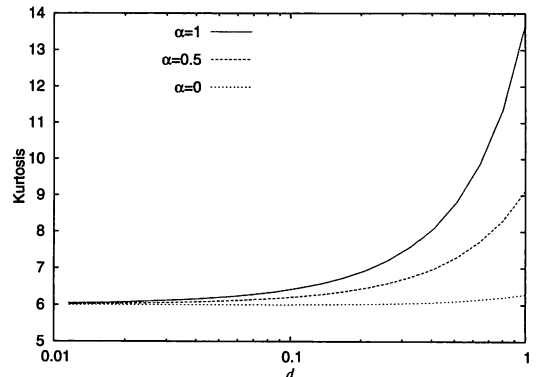
### 4.1 量子化ガウス性信号

符号化評価用信号源として、Malvar は一般化正規分布を量子化した信号を用いている [4]。本稿ではその正規分布版を用いることとする。すなわち分散1の正規分布をステップサイズ  $d$  で量子化する。但し中心の量子化区間のみ  $(1 + \alpha)d$  の幅とする。各量子化区間内の値は一律の整数値に写像される。 $\alpha > 0$  とすると中心の量子化区間は他より広がる (dead-zone)。この dead-zone を考慮する理由は、それがエントロピー制約つき量子化器の近似となることがあるためである。 $\alpha$  値としては、Malvar と同様に 0, 0.5, 1 を用いた。

$\alpha$  が大きくなるにつれ、量子化された信号はガウス性信号から乖離する。この様子を図 2 (a) に示す。横軸は量子化ステップサイズ  $d$ 、縦軸は尖度 (kurtosis) である。正規分布の尖度は3であるが、 $d$  が大きく (約 1)、または  $\alpha$  が大きいほど、尖度が3から離れている。写像後の信号についても同様で、 $d$  と  $\alpha$  が大きくなるほど尖度が指数分布のそれ (6) よりも大きくなっていく (図 2 (b))。



(a)



(b)

図2 様々な  $d, \alpha$  に対する量子化ガウス性信号源の尖度。(a) 写像前、(b) 写像後。なお正規分布は尖度3、指数分布は尖度6である。 $d > 0.1$  あるいは  $\alpha > 0$  において理想的な分布からの乖離が大きくなる

Fig. 2 Kurtosis values of the quantized Gaussian sources for different  $d$  and  $\alpha$  values. (a) before mapping, (b) after mapping. Kurtosis value of 3 corresponds to the normal distribution, 6 corresponds to the geometric distribution. It is observed that at the area where  $d > 0.1$  and/or  $\alpha > 0$ , the distribution is distorted from ideal normal (or geometric) distribution.

### 4.2 量子化ガウス性信号に対する符号化性能

上述の量子化ガウス性信号に対し、本分布写像を施し Golomb 符号化する提案手法 (Gaussian Golomb) と、分布写像せず一要素ずつ Golomb 符号化する従来手法 [2](Golomb) との符号化効率を比較した。Golomb 符号化においては常に符号化効率を最大化するような Golomb パラメータを選択する。ここで、符号化効率は以下のように定義する。

$$\text{符号化効率} = 100 \frac{0 \text{ 次エントロピー}}{\text{平均符号長}} (\%)$$

様々な  $\alpha$  および  $d$  に対する量子化信号の符号化結果を図 3 に示す。信号が理想的なガウス性となる  $\alpha = 0$  の場合、提案手法は常に従来を上回る 98%以上の符号化効率を与えている。また  $\alpha$  の値にかかわらず  $d < 0.1$  の場合の符号化効率は 99.5%を安定的に上回っている。

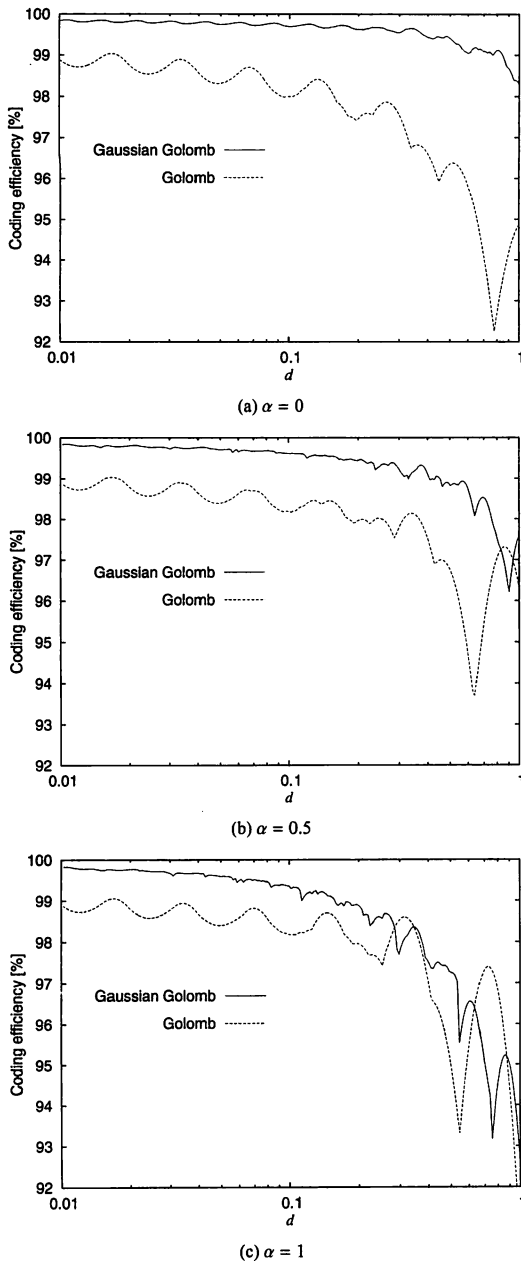


図3 様々な量子化ガウス性信号に対する符号化効率  
Fig. 3 Coding efficiency for various quantized Gaussian source.

しかしながら  $\alpha = 0.5$  および  $1$  の場合、提案手法は特に  $d > 0.1$  において符号化効率が低下する。これは図2でみたように、分布が正規分布 (あるいは分布写像後は指数分布) から乖離しているためと考えられる。

#### 4.3 実際の信号源に対する符号化性能

工学的現場で実際に発生した信号源についても、提案手法の符号化性能の評価を行った。ビデオ信号を符号化復号し重畳する符号化雑音 (原信号からの残差信号) を実験対象信号源とし

表2 残差信号を得るビデオ符号化条件  
Table 2 Video coding settings to obtain the residual signal.

codec	JSVM4 [6]
sequence	CITY 4CIF
coding type	intra のみ
量子化パラメータ	22 固定

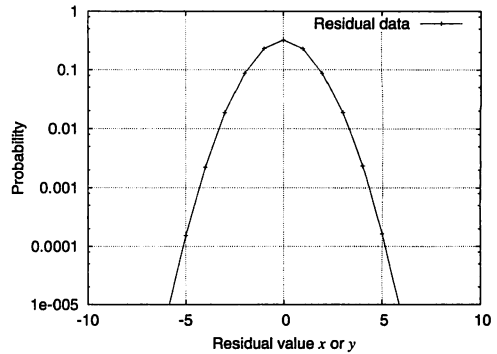


図4 ガウス性信号の実例 (ビデオ符号化残差信号) の分布。縦軸 (確率) は対数軸  
Fig. 4 Actual video coding residual data distribution as an example of empirical Gaussian source. Vertical scale, which mean probability, is in log-scale.

た。符号化条件は表2に示すとおりである。

得られた信号源 (サンプル数 13,509,440 個) の分布の様子を図4に示す。縦軸は対数確率で、正規分布と同じく明らかな放物線形状がみとれる。実際この尖度は (正規分布の尖度3に近い) 3.075 と高いガウス性を示していた。

信号を入力順に2つつ対とした場合の分布を図5に示す。

さらに、本信号に対し提案の分布写像を施した結果を図6に示す。本写像により、放物線状の分布が Golomb 符号向きの直線的な分布に変換できていることがわかる。

写像後の信号を Golomb 符号化したところ、符号化効率は 99.3% であった。一方写像を施さずに Golomb 符号化したところ、符号化効率は 92.9% であった。 $m_{opt}$  の値はそれぞれ7および1であった。

映像シーケンスを換えて同様に得られた他4種のデータについて同様の実験を行い、得られた符号化効率の比較を図7に示す。このうち data1 が上述のデータに対応している。提案手法の符号化効率は最低でも約90%を達成しており、平均では提案手法が94.1%、従来手法は87.4%と約7ポイントの差があった。

#### 4.4 量子化ガウス性信号源における $m_{est}$ の最適性評価

式(13)の関係を用いることで、分布写像後の信号に対し符号化効率を高められると思われる Golomb パラメータ  $m_{est}$  が求められる。ただしこれは理論式であるので、実際に符号化効率を最高にする Golomb パラメータ  $m_{opt}$  とは必ずしも一致しない。この理由としては、Golomb パラメータは疎な離散値 (整数値) しかとらないが実際の分布の分散は連続値となること、また、 $m = 2^q$  ( $q$  は自然数) の場合の Golomb 符号 (いわゆる Rice 符号)

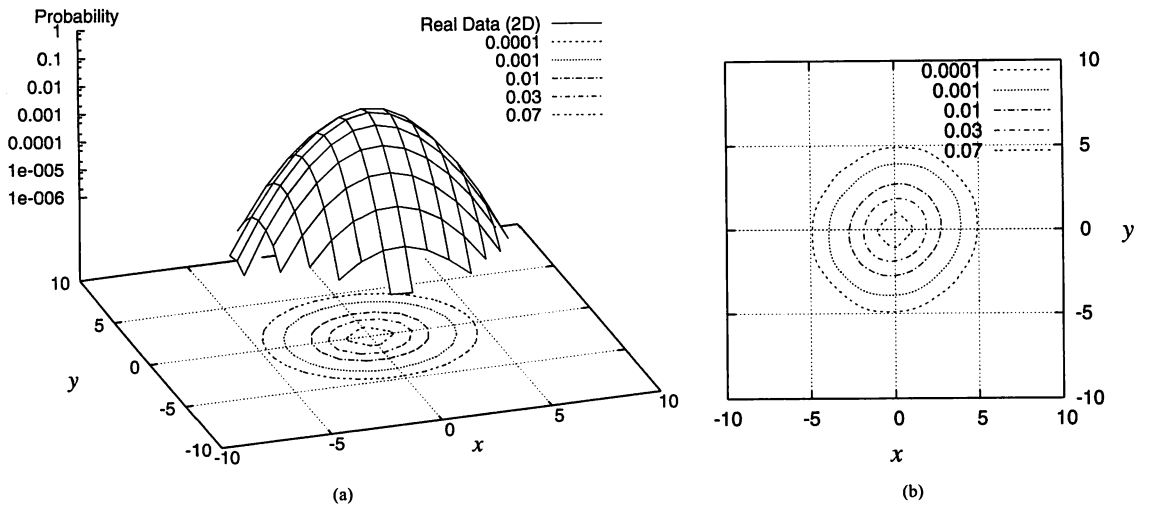


図5 (a) 図4の信号を二要素ずつまとめた対の分布。(b) その等高線  
 Fig.5 (a) coupled data distribution of Fig.4, (b) its contour plot

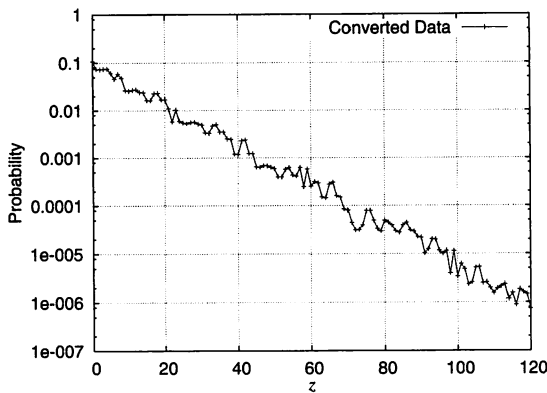


図6 図5の信号に分布写像を施した後の分布  
 Fig.6 Distribution of the signal after applying proposed distribution mapping to the signal in Fig.5.

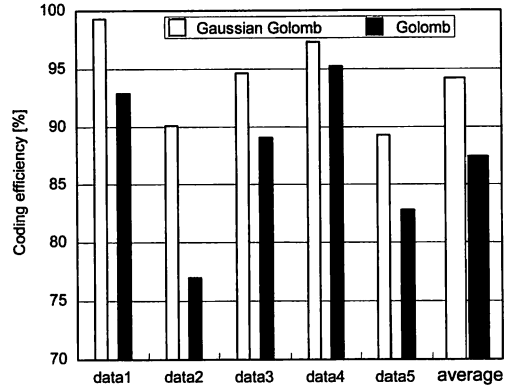


図7 実データ5種に対する符号化効率およびそれらの平均  
 Fig.7 Coding efficiency comparison for several actual data sets, as well as their average.

は、 $m \neq 2^d$  の場合の Golomb 符号よりも符号化効率がわずかに良いことなどが考えられる。

まず定性的に、 $m_{est}$  が  $m_{opt}$  のどのくらい良い推定になっているかを確認するために、 $\alpha = 0$  とし  $d$  を様々に変化させ、両者の関係を調べた結果を図8に示す。両者の値がかなり近いことが見て取れる。

さらに、より定量的な比較として、 $m_{est}$  と  $m_{opt}$  それぞれを用いた場合の符号化効率を図9に示す。符号化効率の低下はごく微小であることから、 $m_{est}$  は実用上十分な推定を与えることがわかる。

### 5. おわりに

本稿では、正規分布を指数分布に変換する可逆写像を提案し、Golomb 符号と組み合わせることで、従来簡易に高効率符号化ができなかったガウス性信号を、符号表なしで高効率に符号化

できることを示した。さらに、最適な Golomb パラメータを求める方法についても議論し、符号化実験を通し推定でも十分に良い効率を与えることを示した。

$(x, y) \mapsto z$  の対応付けは計算機プログラムにより簡易に生成可能であるし、 $x$  および  $y$  の最大値が既知であれば予め対応表を作り記憶しておいてもよい。無論この表は信号源の分布(分散など)には依存しないし、伝送も不要である。

また距離関数として式(6)の代わりに、平方根を含まない

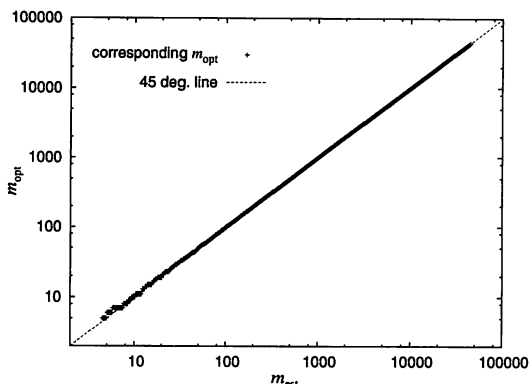
$$l(x, y) = x^2 + y^2 \quad (16)$$

を用いても結果は全く同じである。また信号に自己相関がある場合、

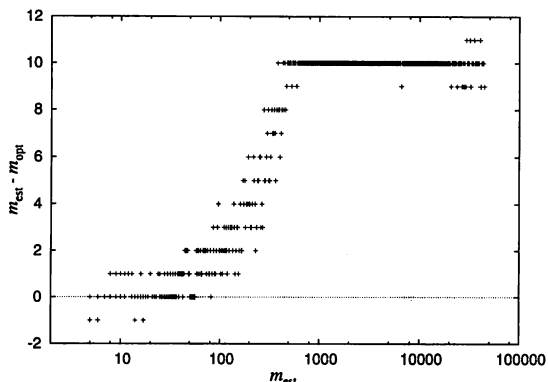
$$l(x, y) = x^2 - 2\rho xy + y^2 \quad (17)$$

を用いてもよい。ここで  $\rho$  は信号の自己相関係数である。

- [1] S. W. Golomb: "Run-length encodings", IEEE Tr. Inf. Theory, vol. 12, no. 3, pp. 399-401, July 1966.
- [2] P. Boldi and S. Vigna: "Compressed perfect embedded skip lists for quick inverted-index lookups", Proc. SPIRE 2005, vol. 3772, pp. 25-28, Nov. 2005.
- [3] S. Xue, Y. Xu and B. Oelmann: "Hybrid Golomb codes for a group of quantised GG sources", IEE Proc. Vis. Image Signal Process., vol. 150, issue 4, pp. 256-260, Aug. 2003.
- [4] H. S. Malvar: "Adaptive run-length / Golomb-Rice encoding of quantized generalized gaussian sources with unknown statistics", Proc. DCC 2006, pp. 23-32, Snowbird, U.S., March 2006.
- [5] ISO/IEC 14495 "Information technology - Lossless and near-lossless compression of continuous-tone still images, Part 1: Baseline", Dec. 1999.
- [6] ITU-T and ISO/IEC JTC 1, "JSVM 4 software", JVT-Q203, Oct. 2005.



(a)



(b)

図 8  $\alpha = 0$  における  $m_{opt}$  の推定。(a) 与えられた量子化ガウス性信号に対し推定される  $m_{est}$  と実際の最適値  $m_{opt}$ , (b)  $m_{est}$  の推定誤差

Fig. 8 Estimation of  $m_{opt}$  ( $\alpha = 0$ ). (a) estimated  $m_{est}$  for a given quantized Gaussian source and actual  $m_{opt}$ , (b) estimation error of  $m_{est}$ .

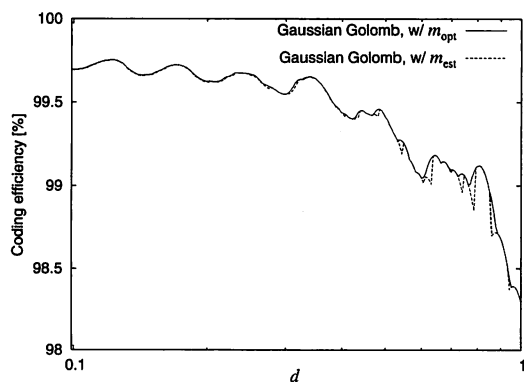


図 9  $\alpha = 0$  における推定最適 Golomb パラメータ  $m_{est}$  と真に最適な Golomb パラメータ  $m_{opt}$  の符号化効率比較。実線は図 3 (a) の実線と同一である。  $d < 0.1$  の部分については、両グラフが殆ど一致するため省略している

Fig. 9 Coding efficiency comparison for estimated and optimal Golomb parameters ( $\alpha = 0$ ). The solid line is the same as the solid line in Fig. 3 (a). Small  $d$  area (i.e.,  $d < 0.1$ ) is omitted since two graphs are almost identical.