Vol. 35 No. 4 情 報 処 理 Apr. 1994

解 説

逆計算：計算の理論における逆問題

3. 可逆セル・オートマトン†

森 田 憲 一††

1. はじめに

セル・オートマトン (cellular automaton；以下 CA と略記) は，同一の有限オートマトン (セル) を空間に一様に配置，接続したもので，おのおののセルがその近傍のセルと情報交換をして状態を変化させることにより，空間全体の状態 (“状相” と呼ぶ) が時刻とともに移り変わっていくようなシステムである．CA はもともと J. von Neumann が考案したもので，彼がこれに基づいて自己増殖オートマトンの理論を展開したこと[20]は有名である．現在では，ある種の並列処理システムのモデル，あるいは種々の時空的現象を記述・説明するためのモデルなどと考えられ，それぞれの観点から研究されている．

本稿で論じる可逆 CA というのは，どの状相も，それに遷移する状相 (つまり直前の時刻の状相) を高々一つしかもたないような CA をいう．すなわち，状相間の遷移を表す写像 (大域写像) が単射であるような CA である．普通の CA は二つの異なる状相から同一の状相に遷移してもよいので，一般には非可逆である．

可逆 CA (あるいは単射 CA) は “エデンの園 (Garden of Eden)” の問題との関係で比較的古くから研究されてきた．エデンの園とは，初期状相としてしか現れない (つまりそれの直前の状相が存在しないような) 状相をいう．したがって，エデンの園が存在するということと，大域写像が全射でないということは等価である．Moore[13] と Myhill[19] が，CA にエデンの園が存在するための条件として，単射性に密接に関係した条件を示したことがきっかけとなり，CA の大域写像の全射性と単射性についての基礎的な研究がなされた (参考文献1)，12)，22)など)．

しかし，可逆 CA の情報処理能力についての研究は最近まで少なく，あまり重視されることもなかった．実際，可逆 CA はさほど大した能力をもっていないだろう，と考えられがちであった．ところが，どんな CA でも (たとえ非可逆なものでも) 可逆 CA によって模倣できること[24]や，非常に簡単な規則に従う可逆 CA でも万能な計算能力をもつ (つまりコンピュータと等価な働きができる) こと[11]などが判明したころから，可逆 CA に対する見方が変化してきた．

実は，このようなこと (つまり可逆性制約を付加しても計算能力が下がらないこと) は，可逆 CA だけでなく可逆チューリング機械や可逆論理回路など，他の多くの可逆的な計算システムのモデルについてもいえることが分かっている[3),7)]．さらに，計算システムにおける可逆性が物理的な可逆性と密接な関係をもっており，計算に要するエネルギの問題を論じる際に重要な鍵になることも明らかになってきた[7)]．(これらについては本特集の別稿[18)]に述べている．)

可逆 CA は，可逆的な法則に従う空間のある種のモデルと考えられるため，そのような空間の中で論理的演算や計算がどのようにして実行できるのかという問題を論じるのに特に都合がよい．また最近では，可逆的な空間で生じる種々の物理現象をモデル化するための枠組みとしても使われ始めている．

以下では，可逆 CA がどのようなものかということ，またどのようにして設計できるのかということ，および非常に単純な可逆 CA で万能な計算能力をもつものが存在すること，などについて解説する．

† Reversible Cellular Automata by Kenichi MORITA (Department of Industrial and Systems Engineering, Faculty of Engineering, Hiroshima University).

†† 広島大学工学部第二類

2. セル・オートマトンと可逆性

2.1 セル・オートマトン (CA)

2次元 CA の有名な例として“ライフ・ゲーム”がある[4,21]. これは碁盤目状に配列されたおのおののセルが0（死）か1（生）の2状態をとり，次の時刻の状態が，自分自身とその周囲8個の（合計9個の）“近傍セル”の状態に依存して次のように変化する.

（i） そのセルの状態が0の場合：
周囲8個のうち3個が1なら1に遷移.

（ii） そのセル状態が1の場合：
周囲8個のうち2または3個が1なら1を保つ.

（iii） 上記以外の場合は0になる.

各セルの状態遷移を決めるこのような規則を**局所写像**という. これを空間内のあらゆるセルに同時に適用することによって得られる写像を**大域写像**といい，これにより空間全体の**状相**（状態の配置；configuration）が時刻とともに変化していく.

図-1 はライフ・ゲームの空間における状相の時間的変化の例を示している（5つの黒丸は“グライダー”と呼ばれるパターンで，空間を斜め方向に移動する性質をもつ).

一般に，CA は次の4つを定めることにより定義されるようなシステム $A=(k, N, S, f)$ である.

（1） 空間の次元 k

（2） 近傍形 N（ただし N は $\mathbf{Z}^k$ の有限部分集合)

（3） セルの内部状態の有限集合 S

（4） 局所写像 $f: S^{|N|} \to S$

ただし，$\mathbf{Z}$ はすべての整数の集合であり，$\mathbf{Z}^k$ の各点にセルが置かれる. N は各セルの“近傍”に属するセルの相対位置の集合を表している. また，大域写像 F は，局所写像 f を（無限個の）セルすべてに対して同時に適用することによって得られる.

例 2.1 1次元 CA の例を二つ考える.

（1） $A_1=(k_1, N_1, S_1, f_1)$,

ただし，$k_1=1$, $N_1=\{-1, 0, 1\}$, $S_1=\{0, 1\}$ であり，f_1 は次のとおりとする.

$$f_1(0,0,0)=0,\ f_1(0,0,1)=1,$$
$$f_1(0,1,0)=0,\ f_1(0,1,1)=1,$$
$$f_1(1,0,0)=1,\ f_1(1,0,1)=0,$$
$$f_1(1,1,0)=1,\ f_1(1,1,1)=0.$$

$N_1=\{-1, 0, 1\}$ は，着目するセルの次の時刻の状態が，左隣(−1)，着目セル(0)，右隣(1)の三つのセルの状態に依存して決まる（つまり写像 f_1 がそれらの三つのセルの状態を引数にとる）ことを表している. **図-2** は A_1 の状相の時間的変化の例である.

（2） $A_2=(k_2, N_2, S_2, f_2)$.

ただし，$k_2=1$, $N_2=\{-1\}$, $S_2=\{0, 1\}$ であり，f_2 は次のとおり.

$$f_2(0)=0,\ f_2(1)=1.$$

この CA A_2 は，各セルの現在の状態がそのまま次の時刻の右隣のセルの状態になるような CA である(**図-3**).

2.2 可逆 CA と非可逆 CA

可逆 CA は大域写像が単射であるような CA であると定義される. 前節に述べたライフ・ゲームは非可逆な CA であることが分かる. なぜなら，**図-4** のように，同一の状相に遷移する異なる状相が存在するためである. また，**例 2.1**(1) の CA A_1 も非可逆である（その証明は読者に委

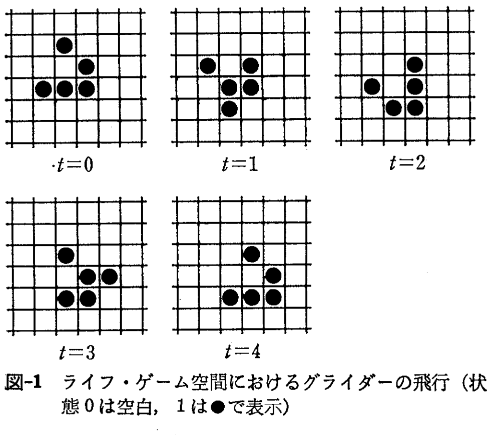


図-1 ライフ・ゲーム空間におけるグライダーの飛行（状態0は空白，1は●で表示）

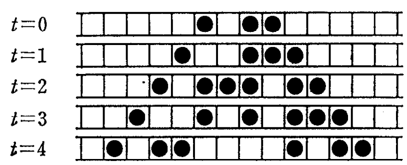


図-2 1次元 CA A_1 の状相遷移の例

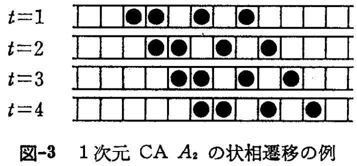


図-3 1次元 CA A_2 の状相遷移の例

ねる).

一方，**例 2.1**(2)の A_2 は，自明で面白くないものではあるが，可逆 CA の一例となっている(もっと面白い例はあとで示す).

CA においては大域写像が単射となるように局所写像を設計するのは一般にかなり困難である．特に，2次元 CA に対しては，大域写像が単射か否かを局所写像から決定する問題が決定不能になる[9]ことが知られている．また，1次元の場合は決定可能であることが分かっている[2]けれども，面倒な決定手続きが必要である．

今までに述べてきたような CA を考える限り，局所写像 $f:S^{|N|}\to S$ は，近傍 N の要素数が1か，セルの状態数が1であるという場合以外には単射にはなりえない．したがって，自明な場合を除き，局所写像を単射になるようにすることによって大域写像を単射にするという方法はとれない．

しかしながら，CA の枠組みを少し変えたもの，あるいは CA の適切な部分クラスを考えることにより，可逆 CA の設計が容易になる場合がある．次節ではこれについて述べる．

2.3 可逆 CA を構成するための方法

ここでは可逆 CA の設計を容易にするための方法として，“Margolus 近傍”を用いる方法と，“分割 CA”を用いる方法の二つを説明する．

(1) Margolus 近傍

Margolus[11] は，時刻の奇偶によって変化する近傍をもつような，通常の CA とは少し異なる枠組みを使って可逆 CA の設計を行った．これは，**図-5** のように，実線または破線で区切られた4つのセルを1まとめにしたブロック全体の状態を，同じブロック全体の状態に写すような局所写像をもつ CA (の変種) である．ただし，偶数時刻には実線のブロック，奇数時刻には破線のブロックに局所写像が適用される．

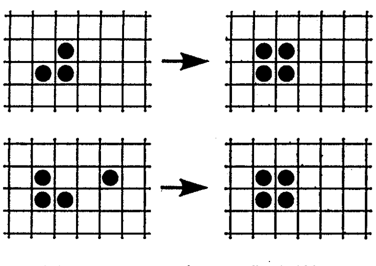


図-4 ライフ・ゲームの非可逆性

図-6 はそのような CA の局所写像の一例を示す (各セルは黒と白の2状態をとる)．これによって定まる奇数時刻の大域写像と偶数時刻の大域写像が共に単射になることは，局所写像の単射性から容易に示すことができる．

(2) 分割 CA (PCA)

Margolus 近傍をもつ CA は時間的・空間的に多少の非均一性をもつという点で標準的な CA とは異なっていた．それに対し**分割 CA** (partitioned CA ; PCA と略記)[15),16)]は，普通の CA のサブクラスとみなせる CA である．PCA は一つのセルが近傍セルの個数だけの部分に分割されており，着目セルの次の時刻の状態が，各近傍セル全体の状態ではなく，その中の対応する分割部分の状態だけによって決められるものである．

図-7 は2次元4近傍 PCA の空間を示す．この場合，着目セルの次の時刻の状態は，上隣のセ

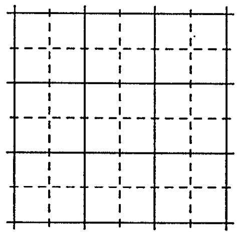


図-5 Margolus 近傍をもつ CA の空間
(偶数時刻には実線のブロック，奇数時刻には破線のブロックに局所写像が適用される.)

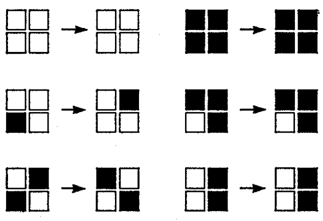


図-6 Margolus の2状態可逆 CA の局所写像
(矢印の左辺と右辺を共に 90°，180°，270° 回転して得られる遷移規則は省略してある)

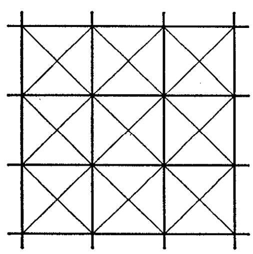


図-7 2次元4近傍 PCA の空間

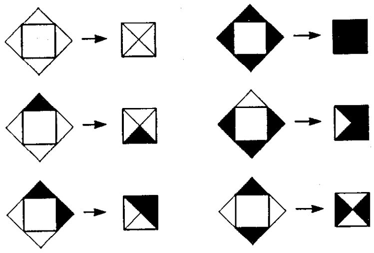


図-8 Morita & Ueno の 16 状態可逆 PCA の局所写像
(左辺と右辺を共に 90°, 180°, 270° 回転して得られる遷移規則は省略してある)

ルの下部分，右隣のセルの左部分，下隣のセルの上部分，および左隣のセルの右部分の現在の状態に依存して決められる．図-8 は，そのような PCA の局所写像で単射であるようなものの例である[16)]（この例では各分割部分は白と黒の 2 状態をとり，したがって一つのセルの状態数は 16 である)．Margolus 近傍の CA と同様，PCA の場合も，局所写像の単射性が大域写像の単射性と同値になることが示せる[15)]．そのため，可逆 CA とその状相の設計が非常に容易になる．

3. 可逆 CA の計算万能性

あるシステムが**計算万能**であるとは，チューリング機械で実行できるようなあらゆる計算がそのシステムで実行できることをいう．(非可逆な) 2 次元 CA が計算万能であることを最初に示したのは Neumann[20)] である．彼は 29 の状態をもつ CA の空間に，自己増殖機能も併せもつチューリング機械が埋め込めることを示した．また，先に述べたライフ・ゲームの空間が万能な計算能力をもつことも知られている[4)]．

ここでは可逆 CA の情報処理能力に関係する問題，特に，可逆 CA によって非可逆 CA を模倣する問題や，計算万能性に関する結果について述べる．

3.1 可逆 CA による非可逆 CA の模倣と 1 次元可逆 CA の計算万能性

チューリング機械や論理回路については，それらに可逆性の制約を付加しても計算能力が下がらないことが知られている[3),7)]．CA についても同様のことがいえるが，これを最初に示したのは Toffoli[24)] である．

定理 3.1[24)] 任意の k 次元非可逆 CA は，$k+1$ 次元可逆 CA によって実時間で模倣できる．

Toffoli の方法で可逆化すると次元が一つ増えてしまうが，森田[17)]は PCA の枠組みを補助として用いることにより，同じ次元の可逆 CA で模倣できることを示した．

定理 3.2[17)] 任意の k 次元非可逆 CA は，k 次元可逆 CA によって模倣できる．(ただし，1 ステップの模倣に状相のサイズに比例した時間がかかる．)

ところで，チューリング機械や論理回路に関しては，非可逆なものを可逆的なもので模倣する際に一時的に多量の“ゴミ情報”を生じるが，このゴミは最終的には浄化できることが分かっている (これに関する解説は参考文献 18) を参照)．しかし，CA に対する上記二つの可逆化法はいずれも，可逆化によって生じるゴミ情報を（いわば熱として）無限の空間に散逸させてしまうという欠点をもつ．現在のところ，ゴミを出さずに非可逆 CA を模倣するような可逆 CA が存在するかどうかは未解決である．

さて，1 次元非可逆 CA（のあるもの）が計算万能になることは，チューリング機械（特に万能チューリング機械）の動作を CA に直接模倣させることにより証明できる．

定理 3.3[23)] 1 次元（非可逆）CA で計算万能なものが存在する．

定理 3.2 と定理 3.3 から，1 次元可逆 CA で計算万能なものが存在する，という結果が導かれる．しかし，定理 3.2 の方法を使った場合，ゴミ情報の発生と散逸が避けられない．

ゴミ情報を出さない万能な可逆 CA は別の方法で構成できる．まず，1 テープ可逆チューリング機械に関して次のような結果が示されている．

定理 3.4[14)] 任意の 1 テープ（非可逆）チューリング機械 T に対し，その動作を模倣するような 1 テープ 2 記号可逆チューリング機械 R で，計算終了時には入力と計算結果だけをテープ上に残して（ゴミ情報は残さずに）停止するものが存在する．

このような 1 テープ可逆チューリング機械は，次のように，ゴミを発生しない 1 次元可逆 CA で直接模倣できることが示されている．

定理 3.5[15)] 任意の 1 テープ可逆チューリング機械はゴミなしの 1 次元可逆 CA によって模倣できる．

したがってこの定理の系として次の結果が得られる.

系 3.6 ゴミなしの1次元可逆 CA で計算万能なものが存在する.

3.2 非常に単純な2次元可逆 CA の計算万能性

CA の計算万能性を示そうとするとき，各セルがある程度多くの状態をもつ場合には，チューリング機械のテープ記号や制御部の状態をセルの内部状態でそのまま表現することにより，その動作を直接模倣できる（したがって1次元 CA でも計算万能になる).

しかし，状態数が少ない場合にはそのようなことができないので，チューリング機械を組み立てられるような論理素子をセル空間内で実現するという方法がとられる．たとえば，AND, OR, NOT のような，論理的万能性をもつ（つまり，それらだけで任意の論理回路が構成できる）素子が実現できればよいわけである．ライフ・ゲーム空間の計算万能性の証明もそのようにしてなされた[4]．そこでは，図-1 の“グライダー”を信号として使用したとき，それに対する AND, OR, NOT などの演算がセル空間内で実現できることが示されている.

可逆 CA の場合，AND, OR のような非可逆な（つまり論理関数が単射でない）論理ゲートを直接に実現するのは困難である．しかしもし，可逆ゲートで論理的万能性をもつものが存在するならば，それをセル空間に実現するという方法がとれる．Fredkin & Toffoli[7] は，“Fredkin ゲート”と呼ぶ1種類の可逆ゲートと遅延素子だけで任意の論理回路が構成できることを示している．さらに彼らは，ビリヤード・ボール・モデル (BBM) と呼ぶ弾性衝突球のモデルによって Fredkin ゲートや遅延素子が実現できることも示している（これらについては参考文献 18) の解説を参照)．したがって可逆 CA の万能性を示すには，Fredkin ゲートと遅延素子，あるいは BBM がそのセル空間内に実現できることを言えばよい.

Margolus は，図-6 の局所写像をもつ Margolus 近傍のセル空間に BBM が埋め込めるという大変興味深い結果を示した[11]．したがって，この CA は計算万能である．たとえば，反射版によるボールの反射（**図-9**）は彼の CA では**図-10** のようにして実現できる.

また，Morita & Ueno[16] は，2次元 PCA の枠組みを用いて，BBM を埋め込めるような16状

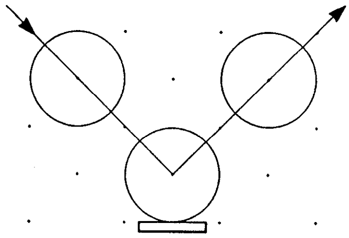


図-9 BBM におけるボールの反射

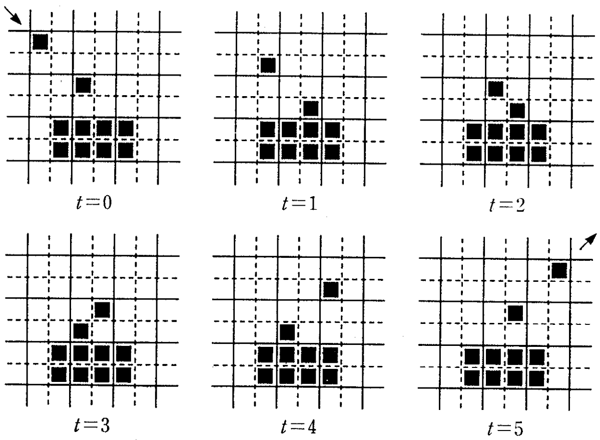


図-10 図-6 の局所写像をもつ Margolus の2状態可逆 CA に埋め込まれた BBM のボールと反射版
(一つのボールは斜めに並んだ二つの黒いセル，反射版は8つの黒いセルからなる)

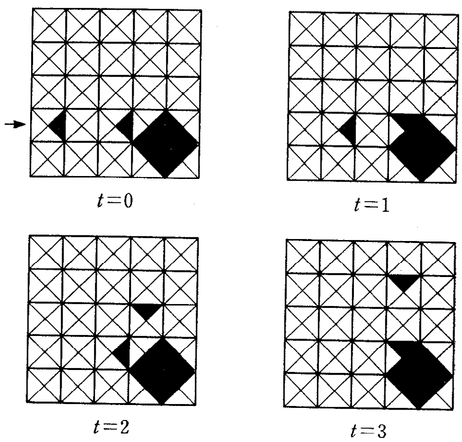


図-11 図-8 の局所写像をもつ可逆 PCA に埋め込まれた BBM のボールと反射版

態4近傍可逆 CA のモデルを2種類示している．先に示した図-8の局所写像をもつ可逆 PCA はその一つであり，その中に BBM を埋め込めることが証明できる[16]（**図-11** はボールと反射版を示す）．したがって，これは計算万能な CA である．

4. おわりに

本稿では，可逆 CA とは何かということ，およびその情報処理能力，特に計算万能性に関する結果について解説した．また，ここでは触れることができなかったが，可逆 CA の枠組み（あるいはその変種）を用いて種々の物理現象を説明しようという研究も近年盛んになりつつある（たとえば参考文献 5), 6), 8), 10) などを参照）．なお，可逆 CA に関する解説には Toffoli & Margolus[25),26)] がある．

謝辞　有益なご意見・示唆をいただいた本稿の閲読者に厚く謝意を表します．

参考文献

1) Amoroso, S. and Cooper, G.: The Garden-of-Eden Theorem for Finite Configurations, *Proc. American Mathematical Society*, Vol. 26, pp. 154-164 (1970).

2) Amoroso, S. and Patt, Y. N.: Decision Procedures for Surjectivity and Injectivity of Parallel Maps for Tessellation Structures, *J. Comput. Syst. Sci.*, Vol. 6, pp. 448-464 (1972).

3) Bennett, C. H.: Logical Reversibility of Computation, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 17, No. 6, pp. 525-532 (1973).

4) Berlekamp, E., Conway, J. and Guy, R.: *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, Vol. 2, Academic Press, New York (1982).

5) Chopard, B.: Strings: A Cellular Automata Model of Moving Objects, in *Cellular Automata and Modeling of Complex Physical Systems* (eds. P. Manneville, N. Boccara, G. Y. Vichniac and R. Bidaux), pp. 246-256, Springer-Verlag, Berlin (1990).

6) Farmer, D., Toffoli, T. and Wolfram, S. (eds.): *Cellular Automata*, p. 247, North-Holland, Amsterdam (1984).

7) Fredkin, E. and Toffoli, T.: Conservative Logic, *Int. J. Theoretical Physics*, Vol. 21, Nos. 3/4, pp. 219-253 (1982).

8) Gutowitz, H. (ed.): *Cellular Automata*, p. 483, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1991).

9) Kari, J.: Reversibility of 2D Cellular Automata is Undecidable, *Physica D*, Vol. 45, Nos. 1-3, pp. 379-385 (1990).

10) Manneville, P., Boccara, N., Vichniac, G. Y. and Bidaux, R. (eds.): *Cellular Automata and Modelling of Complex Physical Systems*, p. 319, Springer-Verlag, Berlin (1989).

11) Margolus, N.: Physics-Like Model of Computation, *Physica*, Vol. 10 D, Nos. 1/2, pp. 81-95 (1984).

12) Maruoka, A. and Kimura, M.: Condition for Injectivity of Global Maps for Tessellation Automata, *Inf. Control*, Vol. 32, pp. 158-162 (1976).

13) Moore, E. F.: Machine Models of Self-Reproduction, in *Essays on Cellular Automata* (ed. A. W. Burks), University of Illinois Press, Urbana, pp. 187-203 (1970). The original paper appeared in *Proc. Symposia in Applied Mathematics*, American Mathematical Society, Vol. 14, pp. 17-33 (1962).

14) Morita, K., Shirasaki, A. and Gono, Y.: A 1-Tape 2-Symbol Reversible Turing Machine, *Trans. IEICE Japan*, Vol. E 72, No. 3, pp. 223-228 (1989).

15) Morita, K. and Harao, M.: Computation Universality of One-Dimensional Reversible (Injective) Cellular Automata, *Trans. IEICE Japan*, Vol. E 72, No. 6, pp. 758-762 (1989).

16) Morita, K. and Ueno, S.: Computation-Universal Models of Two-Dimensional 16-State Reversible Cellular Automata, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, Vol. E 75-D, No. 1, pp. 141-147 (1992).

17) 森田憲一：非可逆セル構造オートマトンの可逆的模倣，信学技報 COMP 92-45 (1992).

18) 森田憲一：計算における可逆性，情報処理，Vol. 35, No. 4, pp. 306-314 (Apr. 1994).

19) Myhill, J.: The Converse of Moore's Garden-of-Eden Theorem, in *Essays on Cellular Automata* (ed. A. W. Burks), pp. 204-205, University of Illinois Press, Urbana (1970). The original paper appeared in *Proc. American Mathematical Society*, Vol. 14, pp. 658-686 (1963).

20) von Neumann, J.: *Theory of Self-Reproducing Automata*, The University of Illinois Press, Urbana (1966).

21) Poundstone, W.: *The Recursive Universe*, International Creative Management (1985). 邦訳：ウイリアム・パウンドストーン：ライフゲイムの宇宙（有澤　誠訳），日本評論社 (1990).

22) Richardson, D.: Tessellations with Local Transformations, *J. Comput. Syst. Sci.*, Vol. 6, pp. 373-388 (1972).

23) Smith III, A. R.: Simple Computation-Universal Cellular Spaces, *J. ACM*, Vol. 18, No. 3. pp. 339-353 (1971).

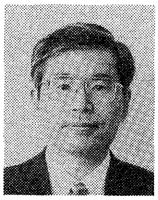
24) Toffoli, T.: Computation and Construction Universality of Reversible Cellular Automata, *J. Comput. Syst. Sci.*, Vol. 15, No. 2, pp. 213-231 (1977).

25) Toffoli, T. and Margolus, N.: *Cellular Auto-*

mata Machines, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1987).

26) Toffoli, T. and Margolus, N.: Invertible Cellular Automata : A Review, *Physica D*, Vol. 45, Nos. 1-3, pp. 229-253 (1990).

(平成5年9月13日受付)



森田 憲一（正会員）

1949年生．1971年大阪大学基礎工学部生物工学科卒業．1973年同大学院修士課程修了．工学博士．1974年大阪大学基礎工学部生物工学科助手．1987年山形大学工学部情報工学科助教授．1990年同教授．1993年広島大学工学部第二類教授．現在に至る．この間，オートマン理論，計算理論，形式言語理論，自然言語と知識情報処理のための論理学などに関する研究に従事．