Vol. 35 No. 4　　　　情　報　処　理　　　　Apr. 1994

解　説

逆計算：計算の理論における逆問題

2. 計算における可逆性
——可逆チューリング機械と可逆論理回路——†

森　田　憲　一††

1. はじめに

可逆的な計算システムというのは，大まかにいえば，そのシステムのどの計算状況（全体の状態）もその直前の時刻にとり得る計算状況を高々一つしかもたない，つまりその計算過程を一意に逆戻りできるようなものを言う．それに対し，普通の計算システム，たとえば現在のコンピュータなどはメモリの内容を消去したり，状態を忘却したりできるので一般には非可逆である．

しかし，こんなふうに説明しただけでは可逆的な計算システムに何の意味があるのか，あるいは何の役に立つのかが分からず，非常に特殊な，取るに足りない概念ではないかという疑念が起こりがちである．実際，Bennett[1] による可逆チューリング機械の研究が現れる以前はこのような概念はあまり重視されなかったと言ってよい．現在でも一般に馴染みが深いものだとは言えないが，Bennett 以後は，この分野において大変興味深い研究がいくつかなされ，注目を集めている．

計算における可逆性が最近重視されるようになったのは主として次の理由による．

（1） 可逆的な計算システムは意外(？)に能力が高い．

（2） 計算に要するエネルギの問題と密接に関係している．

これらについてもう少し詳しくみてみよう．

計算システム（あるいはディジタル・システム）の数理モデルとしては，たとえば，チューリング機械，セル・オートマトン，論理回路や論理ゲートなど，いろいろなものが考えられ，それぞれに対して可逆性の概念を定義することができるが，これらの多くについては可逆性の制約を付加しても計算能力が下がらないことが判明している．

たとえば，任意の非可逆チューリング機械は可逆チューリング機械によって模倣でき[1]，任意の非可逆セル・オートマトンは可逆セル・オートマトンによって模倣できる[23),21]．また，任意の非可逆論理回路は可逆論理回路の中に埋め込める[8]．さらに，可逆チューリング機械や可逆セル・オートマトンを可逆論理回路として構成したりすることも可能である．このように，いくつかの可逆システムはその枠内だけで何でもできる（計算万能性あるいは論理的万能性を有する）ため，可逆性制約の付加によって理論の適用範囲が狭まることはない．

また，これら可逆システムのいくつか，特に可逆論理回路[8] や可逆セル・オートマトン[15),20] のいくつかのものは，非常に簡単な規則に従う枠組みであるにもかかわらず論理的万能性を有するという「単純な美しさ」をもっており，それ自体が興味深い対象である．

一方，計算における可逆性は物理的な可逆性とも密接な関係をもっている．これに関する初期の研究に Landauer[13] のものがあるが，彼は非可逆な論理演算は必ず熱の放出をともなうことを指摘した．このような研究がきっかけとなり，計算に要するエネルギの原理的限界に関するきわめて興味深い結果が出されることになる．Bennett は文献 1) において，可逆的な計算過程を物理的に可逆的な過程によって実現した場合，計算に要するエネルギを任意に小さくできることを示唆し，文献 2) では，そのような物理/化学モデルを提案した．また Fredkin & Toffoli[8] は“ビリヤード・ボール・モデル”(BBM) と呼ぶ非常に理解しや

---

† Reversibility in Computation —Reversible Turing Machines and Reversible Logic Circuits— by Kenichi MORITA (Department of Industrial and Systems Engineering, Faculty of Engineering, Hiroshima University).

†† 広島大学工学部第二類

すい可逆的物理モデルを考案し，任意の可逆論理回路がこれによって実現できることを示した．BBM は，摩擦なしに動きまわる理想的なボールを，他のボールや反射板と弾性衝突させることによって論理演算を実行するモデルであり，これによって実現された回路はその内部でエネルギを消費することがない．

これらの結果は，理想的な状況下では任意の計算システム（たとえ非可逆なものであっても）が内部でのエネルギ消費が0であるような可逆的な物理システムによって実現できることを示している（もちろん，実際に実現するのは大変困難だろう）．ただし，より詳しくみると，非可逆な計算システムを可逆化する際に次のような問題がある．

計算システムの可逆化自体は原理的にはそう難しいことではない．というのは，情報を消去したり状態を忘却したりするような演算・動作を禁止し，計算の完全な履歴をシステムのどこかに残すようにするだけでできるからである（ただし，各計算モデルにおける可逆性の定義に合致するように厳密に構成する必要がある）．実は，このようにした場合の問題点は，消去されずにおかれた不要情報が山のようにたまってしまうことである．この状況を BBM で考えてみると次のようになる．最初，整然と配置されていた多数のボールが，計算が進むにつれて次第に乱雑な配置となる．計算終了時には，それらのうちの少数個が答を表すものとして取り出されるが，ゴミ情報を担ったために乱雑になった大部分のボールはそのまま残されることになる．このゴミの山を片づけずに残したり，まとめて捨てたのでは何もならない．次に新たな計算を実行しようとしたときに，整然とした多数のボールを新たに供給する必要が生じてしまう．つまり，計算の結果生じる乱雑さを放置することこそがエネルギの消費につながるわけである．

幸い，このようにして発生したゴミは，それまでの計算を逆にたどる「逆計算」を実行することによって浄化することができる．ぐあいのよいことに，順方向の計算が可逆的で決定的ならば逆計算もそうなり，しかも，チューリング機械や論理回路の場合には逆計算を実行する「逆機械」が容易に構成できる．したがって，これら全体を一つの計算として実行する可逆システムを作ればよい（自分が出したゴミは自分で浄化するのが最も効率的！）．BBM でいえば，順方向計算がいったん終了したのち逆計算を行い，乱雑な配置のボールを整然とした初期配置に戻し，新たな計算のための資源として再利用するわけである．このアイデアは Bennett[1] がチューリング機械を可逆化する際に示したのが最初であるが，これは Fredkin & Toffoli[8] が可逆論理回路を構成するときにも用いている．これにより，エネルギ消費0の可能性につながるゴミなし可逆計算システムの構成が可能となる．

以下では，これらの問題を可逆チューリング機械と可逆論理回路について詳しく述べる．なお，可逆セル・オートマトンについては本特集の別稿[22]でとりあげている．

2. 可逆チューリング機械

ここでは，可逆チューリング機械が一体どのようなものか，および，それがどのようにして任意の計算を実行できるのかを説明する．以下ではこれらについてなるべく厳密に議論を進めるために定義や証明を細かく書いている箇所もあるが，本質的な点は説明的な部分と例を参照して理解していただきたい．

2.1 可逆チューリング機械とは

計算機の理論的モデルとしてよく使われるチュンリーグ機械（TM と略記）は，ます目に分割された（片無限の）テープ，テープ上の記号を読み書きするためのヘッド，および有限制御部からなるような機械で，ここでは次のように定義する．

定義 2.1 1テープ・チューリング機械 T は

$$T=(Q, S, q_0, q_f, s_0, M)$$

によって定められる．ただし，Q は制御部の状態の有限集合，S はテープ記号の有限集合，$q_0 \in Q$ は初期状態，$q_f \in Q$ は最終状態，$s_0 \in S$ は空白記号，M は $(Q\times S\times S\times Q)\cup(Q\times\{/\}\times\{-, 0, +\}\times Q)$ の部分集合で，動作規則を表している（$-$, 0, $+$ はヘッドの移動方向を表し，それぞれ左移動，移動なし，右移動を意味する）．

M の各要素は4項組と呼ばれ，$[q, s, s', q']$ または $[q, /, d, q']$ の形をしている（$q, q' \in Q$, $s, s' \in S$, $d \in \{-, 0, +\}$）．前者は，状態 q で記号 s を読んだ場合に記号 s' を書き，状態を q' にするという動作を，後者は，状態が q になった場合

にヘッドを d の方向に動かし，状態を q' にするという動作を表す．

通常の TM の定義（たとえば文献11)参照）では 4 項組ではなく $[q, s, q', s', d]$ というような形の 5 項組が用いられることが多い．しかしあとで分かるように，TM の可逆性を定義したり，ある TM の逆動作をする TM を考えたりするには 4 項組を使うのが便利である．

二つの 4 項組 $\alpha_1=[q_1, b_1, c_1, q_1']$，$\alpha_2=[q_2, b_2, c_2, q_2']$ を考える．

（i） 次の条件が成り立つとき，α_1 と α_2 は**定義域が重複する**という．

$q_1=q_2$ かつ $[b_1=b_2$ または $b_1=/$ または $b_2=/]$

（ii） 次の条件が成り立つとき，α_1 と α_2 は**値域が重複する**という．

$q_1'=q_2'$ かつ $[c_1=c_2$ または $b_1=/$ または $b_2=/]$

さて，TM $T=(Q, S, q_0, q_f, s_0, M)$ において，M のどの二つの異なる 4 項組も定義域が重複しないときに T を**決定性 TM**，どの二つの異なる 4 項組も値域が重複しないときに T を**可逆 TM** と呼ぶ．

この定義から分かるように，決定性 TM は次に適用可能な 4 項組が高々一つであるような，また可逆 TM は直前に適用された可能性のある 4 項組が高々一つであるような TM である．

例 2.1 次の TM $T_{\mathrm{copy}}=(Q, \{0, 1\}, q_0, q_f, 0, M)$ を考える．ただし，Q と M は次のとおり．

$Q=\{q_0, q_1, \cdots, q_{12}, q_f\}$

$$\begin{aligned} M=\{&[q_0, 0, 0, q_1], && [q_1, /, +, q_2], && [q_2, 0, 0, q_f],\\ &[q_2, 1, 0, q_3], && [q_3, /, +, q_4], && [q_4, 0, 0, q_5],\\ &[q_4, 1, 1, q_3], && [q_5, /, +, q_6], && [q_6, 0, 1, q_7],\\ &[q_6, 1, 1, q_5], && [q_7, /, +, q_8], && [q_8, 0, 0, q_9],\\ &[q_9, /, -, q_{10}], && [q_{10}, 0, 0, q_{11}], && [q_{10}, 1, 1, q_9]\\ &[q_{11}, /, -, q_{12}], && [q_{12}, 0, 1, q_1], && [q_{12}, 1, 1, q_{11}]\} \end{aligned}$$

T_{copy} は与えられた単進数をその右にコピーする機能をもつ決定性の可逆 TM である（**図-1**）．

定義 2.1 の TM はテープを 1 本もつものだったが，k 本のテープをもつ ***k* テープ TM** T_k は次のように定義できる．

$T_k=(Q, (S_1, \cdots, S_k), q_0, q_f, s_0, M)$

ただし，S_i $(i=1, \cdots, k)$ は i 番目のテープで使われるテープ記号の集合であり，4 項組集合 M は $(Q\times(S_1\times\cdots\times S_k)\times(S_1\times\cdots\times S_k)\times Q)\cup(Q\times\{/\}\times\{-, 0, +\}^k\times Q)$ の部分集合となる．k テープ TM に対する決定性と可逆性の定義も同様である．

なお，以下で論じる TM は決定性のものに限ることにする（つまり，決定性の可逆または非可逆 TM だけを考察の対象とする）．

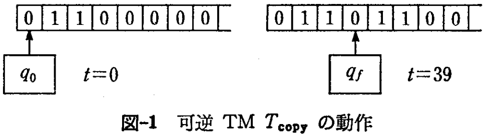


図-1 可逆 TM T_{copy} の動作

2.2 非可逆チューリング機械の可逆化

非可逆 TM の可逆化はある意味では簡単で，もとの TM が各時刻にどのような動作をしたかを履歴記録用テープに逐一記録しながら模倣することによってできる（もちろん可逆 TM の定義に厳密に合致するように注意深く設計する必要がある）．このようにした場合の問題点は，計算終了時に大量の履歴情報がゴミとして残されることである．Bennett[1] による可逆化法の面白い点は，このようなゴミ情報を残さずに元の機械を模倣する可逆 TM が構成できることである．これは次のアイデアに基づく．つまり，履歴情報は（決定性の）可逆 TM によって出されたものなので，この TM の逆動作をする TM（これも決定性で可逆的）を作ることができ，これを用いて計算過程を逆にたどればゴミ情報を可逆的に消去できる，ということである．ただし，せっかく得られた計算結果(答)も失われてしまうので，逆計算を開始する前に答を別の出力テープに可逆的に複写しておく必要がある．

この構成法（ただし Bennett の方法を少し変形してある）を詳しく述べよう．

定理 2.1[1] 任意の 1 テープ TM T に対し，その動作を模倣するような 3 テープ可逆 TM R で，計算終了時には入力と計算結果だけをテープ上に残して（ゴミ情報は消去して）停止するものが存在する．

証明：$T=(Q, S, q_0, q_f, 0, M)$ は次の条件を満たすとする（そのように作り変えるのは容易）．

（i） 左端のます目の記号は常に空白記号．

（ii） 停止する場合はテープの左端で状態 q_f で停止．

（iii） 停止したときに答として出される出力記号列は，左端から 2 番目のます目から右に書か

れる．

（iv） 出力記号列中には空白記号は含まれない．

（v） q_0 は4項組の4番目の項としては現れない．つまり，他の状態から q_0 に移ることはない．

（vi） q_f を4番目の項として含む4項組はただ一つ．

R は，作業用テープ（T のテープを模倣），履歴テープ（T の動作の履歴を記録），出力テープ（計算結果を書く）の3本のテープをもつ．計算開始時には作業用テープに入力記号列が与えられ，履歴テープと出力テープはすべてのます目が空白であるとする．

ここで，$Q=\{q_0, q_1, \cdots, q_f\}$ とする．また，M に含まれる4項組の総数を m とし，各4項組には $1, \cdots, m$ の番号が付けられているとする．このとき，R は次のように構成できる．

$$R=(Q', (S, \{0, 1, \cdots, m\}, S), q_0, p_0, 0, M')$$
$$Q'=\{q_0, q_1, \cdots, q_f\} \cup \{q_0', q_1', \cdots, q_f'\}$$
$$\cup \{c_1, c_1', c_2, c_2'\}$$
$$\cup \{p_0, p_1, \cdots, p_f\} \cup \{p_0', p_1', \cdots, p_f'\}$$

R の計算過程は，(1)順方向計算，(2)答の複写，(3)逆方向計算，の三つの段階に分かれていて，動作規則 M' は各段階ごとに以下のように構成される4項組集合 M_1, M_2, M_3 の和集合として定める．

（1） 順方向計算のための4項組集合 M_1

R は T の動作を1ステップずつ模倣していくが，R を可逆 TM にするために，T のどの4項組が使われたかを履歴テープに逐一記録する．この動作は T のおのおのの4項組に対し，M_1 の4項組を次のように構成することによって実現できる．

（i） T の h 番目 $(h=1, \cdots, m)$ の4項組が

$[q_i, s_j, s_k, q_l]$ $(q_i, q_l \in Q, s_j, s_k \in S)$

であるならば，次の4項組を M_1 に加える．

$[q_i, \quad /, \quad [0, +, 0], q_i']$

$[q_i', [s_j, 0, 0], [s_k, h, 0], q_l]$

（ii） T の h 番目の4項組が

$[q_i, /, d, q_l]$ $(q_i, q_l \in Q, d \in \{-, 0, +\})$

であるならば，次の4項組を M_1 に加える．

$[q_i, \quad /, \quad [d, +, 0], q_i']$

$[q_i', [x, 0, 0], [x, h, 0], q_l]$ $(x \in S)$

（2） 答の複写のための4項組集合 M_2

順方向計算が終了して状態 q_f になったならば，作業テープ上に得られている出力記号列(答)を出力テープに複写する．これは以下の4項組集合 M_2 によって行える．ただし，q_f を4番目の項として含む T の4項組の番号を n とする．

$[q_f, [0, n, 0], [0, n, 0], c_1]$

$[c_1, \quad /, \quad [+, 0, +], c_2]$

$[c_2, [y, n, 0], [y, n, y], c_1]$ $(y \in S-\{0\})$

$[c_2, [0, n, 0], [0, n, 0], c_2']$

$[c_1', [y, n, y], [y, n, y], c_2']$ $(y \in S-\{0\})$

$[c_2', \quad /, \quad [-, 0, -], c_1']$

$[c_1', [0, n, 0], [0, n, 0], p_f]$

（3） 逆方向計算のための4項組集合 M_3

答の複写が終了したならば，履歴テープ上にゴミ情報として残されている記号列を可逆的に消去するため，(1)で行った計算を逆向きに実行する．この動作は T のおのおのの4項組に対し，M_3 の4項組を次のように構成することによって実現できる．

（i） T の h 番目 $(h=1, \cdots, m)$ の4項組が

$[q_i, s_j, s_k, q_l]$ $(q_i, q_l \in Q, s_j, s_k \in S)$

であるならば，次の4項組を M_3 に加える．

$[p_i', \quad /, \quad [0, -, 0], p_i]$

$[p_l, [s_k, h, 0], [s_j, 0, 0], p_i']$

（ii） T の h 番目の4項組が

$[q_i, /, d, q_l]$ $(q_i, q_l \in Q, d \in \{-, 0, +\})$

であるならば，次の4項組を M_3 に加える．ただし d が $-, 0, +$ のとき，d' をそれぞれ $+, 0, -$ とする．

$[p_i', \quad /, \quad [d', -, 0], p_i]$

$[p_l, [x, h, 0], [x, 0, 0], p_i']$ $(x \in S)$

以上のように構成した R が可逆的であることは，T が決定性であることから確かめられる． □

例 2.2 次の TM $T_{\mathrm{erase2}}=(Q, \{0, 1, 2\}, q_0, q_f, 0, M)$ を定理 2.1 の方法で可逆化してみよう．ただし，Q と M は次のとおり．

$Q=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_f\}$

$M=\{1: [q_0, /, +q_1],\ 2: [q_1, 0, 0, q_4],$

$3: [q_1, 1, 1, q_2],\ 4: [q_1, 2, 1, q_2],$

$5: [q_2, /, +, q_1], 6: [q_3, 0, 0, q_f],$

$7: [q_3, 1, 1, q_4],\ 8: [q_4, /, -, q_3]\}$

T_{erase2} は，“1”と“2”からなる任意の記号列

が与えられたとき，“2”をすべて“1”に書き換えて停止するような決定性の非可逆 TM である(**図-2**).（これが非可逆であるのは，1番と5番，および3番と4番の4項組の値域が重複するため.）

T_{erase2} を模倣する3テープ可逆 TM R_{erase2} の4項組集合は**図-3** のように，また，その計算過程は**図-4** のようになる.

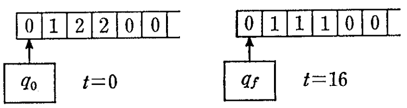


図-2　非可逆 TM T_{erase2} の動作

$[q_0,\ /,\ [+,+,0],\ q'_0]$	$[p'_0,\ /,\ [-,-,0],\ p_0]$
$[q'_0,\ [x,0,0],\ [x,1,0],\ q_1]$	$[p_1,\ [x,1,0],\ [x,0,0],\ p'_0]$
$[q_1,\ /,\ [0,+,0],\ q'_1]$	$[p'_1,\ /,\ [0,-,0],\ p_1]$
$[q'_1,\ [0,0,0],\ [0,2,0],\ q_4]$	$[p_4,\ [0,2,0],\ [0,0,0],\ p'_1]$
$[q'_1,\ [1,0,0],\ [1,3,0],\ q_2]$	$[p_2,\ [1,3,0],\ [1,0,0],\ p'_1]$
$[q'_1,\ [2,0,0],\ [1,4,0],\ q_2]$	$[p_2,\ [1,4,0],\ [2,0,0],\ p'_1]$
$[q_2,\ /,\ [+,+,0],\ q'_2]$	$[p'_2,\ /,\ [-,-,0],\ p_2]$
$[q'_2,\ [x,0,0],\ [x,5,0],\ q_1]$	$[p_1,\ [x,5,0],\ [x,0,0],\ p'_2]$
$[q_3,\ /,\ [0,+,0],\ q'_3]$	$[p'_3,\ /,\ [0,-,0],\ p_3]$
$[q'_3,\ [0,0,0],\ [0,6,0],\ q_f]$	$[p_f,\ [0,6,0],\ [0,0,0],\ p'_3]$
$[q'_3,\ [1,0,0],\ [1,7,0],\ q_4]$	$[p_4,\ [1,7,0],\ [1,0,0],\ p'_3]$
$[q_4,\ /,\ [-,+,0],\ q'_4]$	$[p'_4,\ /,\ [+,-,0],\ p_4]$
$[q'_4,\ [x,0,0],\ [x.8,0],\ q_3]$	$[p_3,\ [x,8,0],\ [x,0,0],\ p'_4]$
$[q_f,\ [0,6,0],\ [0,6,0],\ c_1]$	$[c'_1,\ [0,6,0],\ [0,6,0],\ p_f]$
$[c_1,\ /,\ [+,0,+],\ c_2]$	$[c'_2,\ /,\ [-;0,-],\ c'_1]$
$[c_2,\ [y,6,0],\ [y,6,y],\ c_1]$	$[c'_1,\ [y,6,y],\ [y,6,y],\ c'_2]$
$[c_2,\ [0,6,0],$	$[0,6,0],\ c'_2]$

図-3　3テープ可逆 TM R_{erase2} の4項組集合
$(x\in\{0,1,2\},\ y\in\{1,2\})$

定理 2.1 の可逆 TM は3本のテープと多くのテープ記号を用いるが，次のように，テープ数は1に，記号数は2にできることが分かっている.

定理 2.2[17]　任意の1テープ TM T に対し，その動作を模倣するような1テープ2記号可逆 TM R で，計算終了時には入力と計算結果だけをテープ上に残して停止するものが存在する.

3. 可逆論理回路

可逆論理回路および可逆ゲートに関する研究には，Toffoli[24),25)] による AND/NAND ゲートの族の研究や，Fredkin & Toffoli[8)] による“保存論理回路”の研究がある．後者においては，“Fredkin ゲート”と呼ばれる1種類の可逆ゲートを用いるだけで，(一般には非可逆な) 任意の組合せ論理回路がゴミ情報を出すことなく構成できるという非常に単純で美しい結果が得られており，それに加えて，ビリヤード・ボール・モデルによる巧妙な実現法も示されているので，ここではこれについて解説する.

3.1 保存論理回路

保存論理 (Conservative Logic)[8)] は，可逆的かつビット保存的な論理ゲートから構成される回路

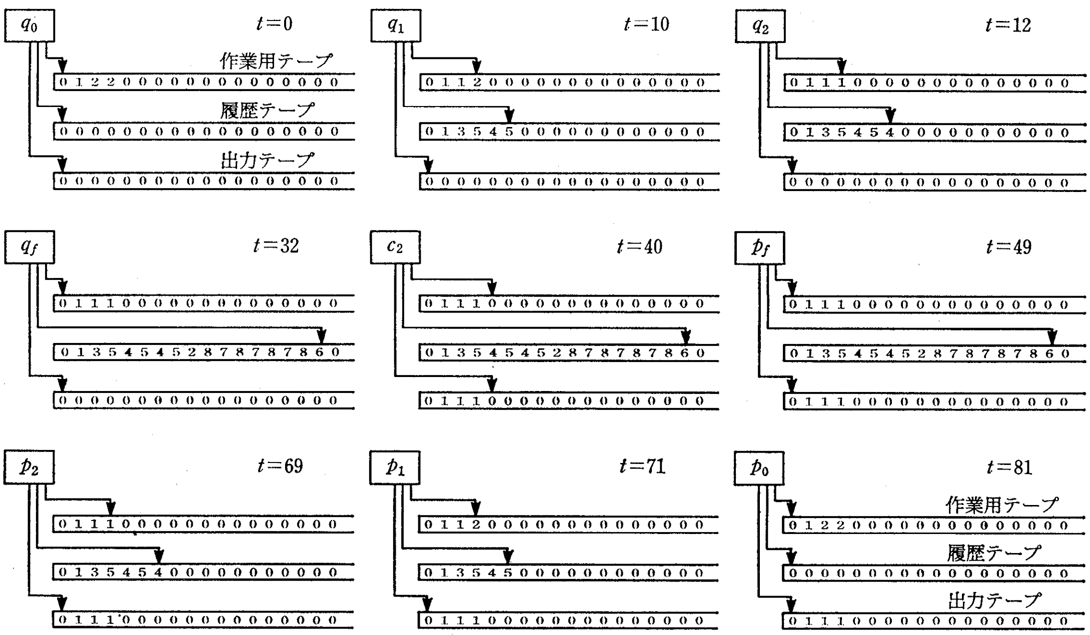


図-4　可逆 TM R_{erase2} の動作

の設計理論である．論理ゲートが**可逆的**であるとは，それが実現する論理関数が単射であることを，また，**ビット保存的**であるとは，そのゲートに対する入力中の記号“1”の個数が出力中の“1”の個数と常に一致することをいう．もしも，1, 0 の情報を一定量の物質やエネルギの有無によって表現し，情報に対する論理演算を可逆的な物理現象で実現することを考えた場合，ビット保存性は物質やエネルギの保存性に，可逆性は物理現象の可逆性に対応づけられる．

保存論理回路を構成するためのゲートとして，特に **Fredkin ゲート**を考える．これは，**図-5** のような可逆的かつビット保存的なゲートである．

Fredkin ゲートは概念的には，2 本の入力線 p, q と 2 本の出力線 y, z を交差して接続するか，平行に接続するかを，入力 c によって制御するゲートだと考えられる（**図-6**）．

保存論理においては，Fredkin ゲート以外に，信号の伝達と保持（記憶）のために，**単位ワイヤ**を用いる．これは，論理ゲート間の結線に使われ，入出力間に 1 単位時間の遅れをもっている（**図-7**）．明らかに単位ワイヤも可逆性とビット保存性をもつ．

保存論理回路は Fredkin ゲートと単位ワイヤから構成される回路である．ただし，次の条件を満たす．

（1） ゲートおよび単位ワイヤの出力は分岐できない（分岐させたい場合はそのための回路を作る必要がある）．

（2） ゲートの出力は単位ワイヤの入力にだけ接続できる．

さて，保存論理回路の定義から明らかなように，そのままでは非保存論理回路（たとえば AND 回路）を実現することはできない．しかし，保存論理回路の入出力に対して次のような操作と見方を許すことにより，任意の組合せ論理回路や順序回路を保存論理回路の中に実現できる．

（i） 本来の入力（引数）が与えられる線以外に，回路の入力線の何本かには“定数”の入力を与えることを許す．

（ii） 回路の出力線の何本かは，ゴミ情報を出す線だとして無視する．

つまりこれは，非保存論理回路を保存論理回路中に**図-8** のような方法で“埋め込む”ことを意味する．特に，AND, NOT, および分岐回路は**図-9** のようにして実現できる．したがって，定数の供給とゴミ情報の発生をいとわなければ，Fredkin ゲートと単位ワイヤだけから任意の論理回路が構成できる．

3.2 クリーンな保存論理回路の構成法

任意の論理回路を前節の方法で保存論理回路中に実現したときに生じるゴミ情報は，保存論理回路のもつ可逆性を利用してうまく浄化することができ，資源として再利用することができる[8]．

Φ を任意の保存論理回路とする．Φ の逆回路 Φ^{-1} とは，Φ に含まれるおのおのの Fredkin ゲートと単位ワイヤの入力と出力をすべて逆にすることによって得られる回路である（**図-10**）．

Φ として，ループをもたず，かつどの出力も入力からの遅れが同じであるような（組合せ的な）

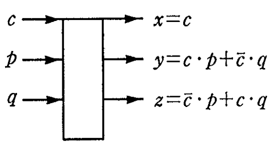


図-5 Fredkin ゲート

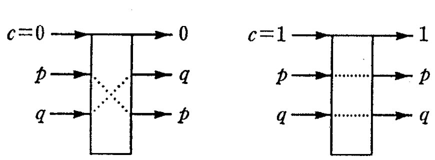


図-6 Fredkin ゲートの機能

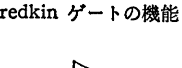


図-7 単位ワイヤ（$y(t)=x(t-1)$）

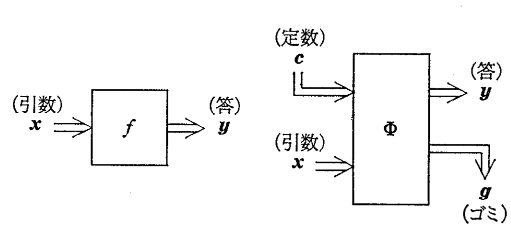


図-8 非保存論理回路 f の保存論理回路 Φ への埋め込み

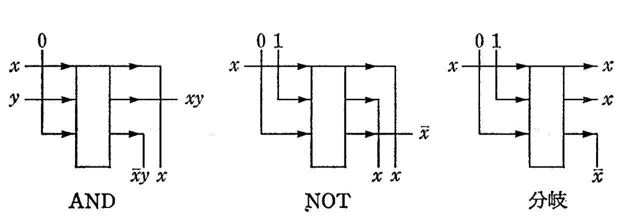


図-9 Fredkin ゲートによる AND, NOT, 分岐の実現

保存論理回路を考える．そうすると Φ^{-1} は，Φ が実現している論理関数の逆関数を実現する回路になる（Fredkin ゲートの逆関数を実現するゲートは Fredkin ゲート自身であることに注意）．したがって，Φ と Φ^{-1} を直列に接続すれば，Φ から発生したゴミ g は浄化されて再び定数 c に戻る（**図-11**）．浄化されてできた定数 c は再び Φ への定数入力として循環使用できるので，これにより，定数を無限に供給する供給源も不要となる．

もちろん，図-11 のままだと答 $\boldsymbol{y}$ が再び引数の値 $\boldsymbol{x}$ に戻ってしまい，肝心の答が得られないが，これは，図-9 の分岐回路を（答のビット数だけ）Φ と Φ^{-1} の間にはさむことによって取り出すことができる（**図-12**）．これにより，任意の組合せ論理回路（たとえ，非可逆または非ビット保存なものであっても）が，クリーンな保存論理回路の中に埋め込めることになる（ただし，定数 0 と 1 を答のビット数だけ入力してやる必要があり，また出力 $\boldsymbol{y}$ 以外にその反転 $\bar{\boldsymbol{y}}$ も出てくる）．

この方法は，**2.2** の可逆 TM の構成法と相似であることが分かるだろう．つまり，Φ による論理関数の実現は可逆 TM の順方向計算過程に，分岐回路による答の取り出しは答の複写過程に，Φ^{-1} によるゴミの浄化は逆方向計算過程に，また，定数 $\boldsymbol{c}$ の供給は“きれいな”（空白の）履歴テープを用意することに，それぞれ対応させることができる．

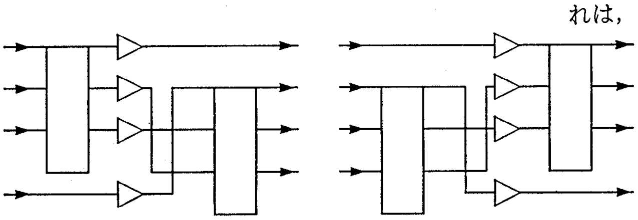
ところで，Margolus[16] は，これとは異なる巧妙な方法で図-12 における定数入力 $\boldsymbol{c}$ をすべて 0 にできることを証明した．これは次のことを意味する．もし，論理値“1”には物質やエネルギが存在することを，“0”にはそれが存在しないことを対応づけるような方法で回路が実現されるならば（次節のビリヤード・ボール・モデルはそうなっている），定数入力としては事実上何も与えなくてよい．

なお，（組合せ的でない）一般の順序回路をゴミのない保存論理回路によって実現しようとした場合，動作の履歴を保存するスタックを回路内に用意しなければならず，やっかいである．しかし，可逆順序回路や可逆セル・オートマトンについては，これらを定数入力やゴミ出力のない閉じた保存論理回路として実現できる[19]．さらに，ゴミなし可逆 TM はゴミなし可逆セル・オートマトンに埋め込める[18]ので，結局 Fredkin ゲートと単位ワイヤだけでゴミなしの万能な可逆コンピュータが作れる．

3.3 ビリヤード・ボール・モデル

Fredkin & Toffoli[8] はまた，弾性衝突をするボールの動きによって論理演算を行わせる**ビリヤード・ボール・モデル**（BBM）を提案した．BBM は，2 次元空間を摩擦なしに運動するボールと，その軌道を変えるために適当な位置に置くことのできる反射版から構成される．

ボールと反射版を適切に配置すれば，BBM の空間に保存論理ゲート，特に Fredkin ゲートを埋め込めることが分かっている．この実現法は 2 種類知られているが，ここではそのうちの一つを説明する．まず，“スイッチ・ゲート”と呼ばれる単純なゲートが**図-13** のようにして構成できる．これは，信号 x の出口を信号 c によって切り替える機能をもつようなゲートである．そうすると，Fredkin ゲートは，これを 2 個とその逆ゲート（逆関数を実現するゲート）2 個を**図-14** のように接続することにより構成できる（この回路は R. Feyman



(a)　　　　(b)

図-10　(a)保存論理回路の例と，(b)その逆回路

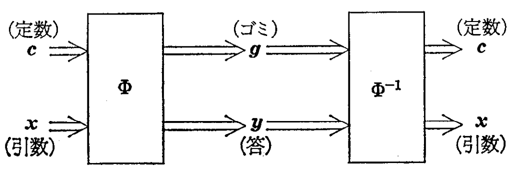


図-11　ゴミの浄化法

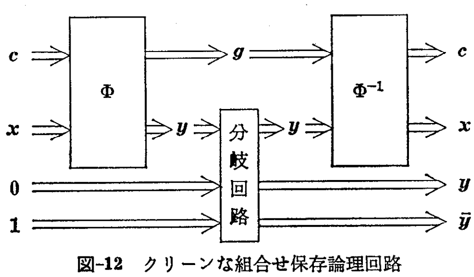
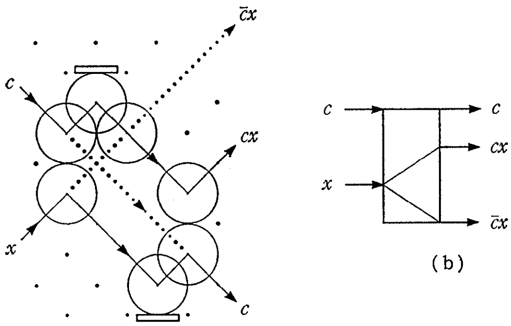


図-12　クリーンな組合せ保存論理回路



(a)

図-13 (a)BBM によるスイッチ・ゲートと，(b)その表記法

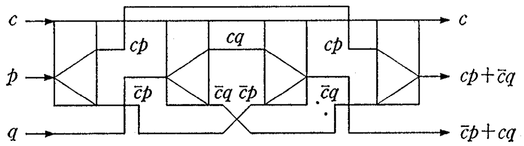


図-14 スイッチ・ゲートとその逆ゲートによる Fredkin ゲートの構成

と A. Ressler によって考案された). なお単位ワイヤについては，反射版をうまく配置してボールを相対的に遅延させることにより実現できる.

これと前節の結果を合わせて考えると，任意の論理回路が BBM によって実現できることが分かる. ボールが理想的なものであれば，系全体としてはエネルギ保存則が成り立つため，内部でのエネルギ損失が 0 であるような回路ができる. また，前節のような方法でゴミの発生を防いでやれば，資源として用いたボールを次の計算の際に再利用でき，ボールの廃棄によるエネルギ損失もない.

4. おわりに

本稿では可逆的な計算システムがもつ計算能力の問題を中心に述べながら，それと物理的な可逆性との関係についても触れた. なお，これらに関する解説としては Bennett & Landauer[3), Bennett[5), Feynman[7), 井森[12)などがある.

計算における可逆性の概念は物理学のほうにも影響を与えている. Bennett[4) は “Maxwell の悪魔” に対する一つの解を与えているが，これは “情報の忘却はエネルギ消費をともなう” ということが鍵となっており，大変興味深い. また, “宇宙は巨大なコンピュータ（あるいはセル・オートマトン）である” という仮説に基づいて新しい物理学を作ろうとする Fredkin の途方もない試みもある (Fredkin[9), Wright[26)).

エネルギを消費しない計算機が作れるかという問題について言えば，原理的には可能だとしても実際に作るのは不可能だろうと考える向きもあるかもしれない. しかし自然界には，DNA の複写が大変少ないエネルギで行われているという例もあり（テープの複写は可逆 TM で実行できることに注意), 可逆的な計算システムに基づくこのようなアプローチがまったくの空論であるとは言えない. いずれにせよ，現在のような電子回路ではなく，ミクロな物理現象を利用した新しい素子を開発しようという方向の研究においては，可逆性などの物理的性質を反映した計算システムや論理の研究が重要な鍵を握ると思われる.

謝辞　本特集を企画し，本稿の執筆を勧めてくださった千葉大学井宮淳氏，および，文献の教示やご討論をいただいた東京工業大学小林孝次郎氏に厚く謝意を表します.

参 考 文 献

1) Bennett, C. H.: Logical Reversibility of Computation, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 17, No. 6. pp. 525-532 (1973).
2) Bennett, C. H.: The Thermodynamics of Computation, *Int. J. Theoretical Physics*, Vol. 21, No. 12, pp. 905-940 (1982).
3) Bennett, C. H. and Landauer, R.: The Fundamental Physical Limits of Computation, *Sci. Am.*, Vol. 253, No. 1, pp. 38-46 (1985).
4) Bennett, C. H.: Demons, Engines and the Second Law, *Sci. Am.*, Vol. 255, No. 11, pp. 108-116 (1987).
5) Bennett, C. H.: Notes on the History of Reversible Computation, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 32, No. 1, pp. 16-23 (1988).
6) Farmer, D., Toffoli, T. and Wolfram, S. (eds.): *Cellular Automata*, p. 247, North-Holland, Amsterdam (1984).
7) ファインマン, R. P.: 未来の計算機（1985 年 8 月 9 日の日本での講演の記録), 数学セミナー, Vol. 25, No. 1, pp. 6-18 (1986).
8) Fredkin, E. and Toffoli, T.: Conservative Logic, *Int. J. Theoretical Physics*, Vol. 21, Nos. 3/4, pp. 219-253 (1982).
9) Fredkin, E.: Digital Mechanics, *Physica D*, Vol. 45, Nos. 1-3, pp. 254-270 (1990).
10) Gutowitz, H. (ed.): *Cellular Automata*, p. 483, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts (1991).
11) Hopcroft, J. E. and Ullman, J. D.: *Introduction*

to Automata Theory, *Languages*, *and Computation*, p. 418, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts (1979).

12) 井森正敏：情報処理の熱力学，科学，Vol. 54, No. 10, pp. 629-637 (1984).

13) Landauer, R.: Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process, *IBM J. Res. Dev.*, Vol. 5, pp. 183-191 (1961).

14) Manneville, P., Boccara, N., Vichniac, G. Y. and Bidaux, R. (eds.): *Cellular Automata and Modelling of Complex Physical Systems*, p. 319, Springer-Verlag, Berlin, (1989).

15) Margolus, N.: Physics-Like Model of Computation, *Physica*, Vol. 10 D, Nos. 1/2, pp. 81-95 (1984).

16) Margolus, N.: The Role of Constants in Conservative-Logic (private communication) (1985).

17) Morita, K., Shirasaki, A. and Gono, Y.: A 1-Tape 2-Symbol Reversible Turing Machine, *Trans. IEICE Japan*, Vol. E 72, No. 3, pp. 223-228 (1989).

18) Morita, K. and Harao, M.: Computation Universality of One-Dimensional Reversible (Injective) Cellular Automata, *Trans. IEICE Japan*, Vol. E 72, No. 6, pp. 758-762 (1989).

19) Morita, K.: A Simple Construction Method of a Reversible Finite Automaton out of Fredkin Gates, and its Related Problem, *Trans. IEICE Japan*, Vol. E 73, No. 6, pp. 978-984 (1990).

20) Morita, K. and Ueno, S.: Computation-Universal Models of Two-Dimensional 16-State Reversible Cellular Automata, *IEICE Trans. Inf. & Syst.*, Vol. E 75-D, No. 1, pp. 141-147 (1992).

21) 森田憲一：非可逆セル構造オートマトンの可逆的模倣，信学技報 COMP 92-45 (1992).

22) 森田憲一：可逆セル・オートマトン，情報処理，Vol. 35, No. 4, pp. 315-321 (Apr. 1994).

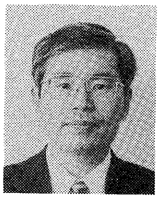
23) Toffoli, T.: Computation and Construction Universality of Reversible Cellular Automata, *J. Comput. Syst. Sci.*, Vol. 15, No. 2, pp. 213-231 (1977).

24) Toffoli, T.: Reversible Computing, in *Automata, Languages and Programming*, LNCS-85, Springer-Verlag, Berlin, pp. 632-644 (1980).

25) Toffoli, T.: Bicontinuous Extensions of Invertible Combinatorial Functions, *Math. Systems Theory*, Vol. 14, pp. 13-23 (1981).

26) Wright R.: *Three Scientists and Their Gods*, Random House Inc., New York (1988). 邦訳：ロバート・ライト：三人の「科学者」と「神」(野村美紀子訳)，どうぶつ社 (1990).

(平成5年9月13日受付)



森田　憲一（正会員）

1949 年生．1971 年大阪大学基礎工学部生物工学科卒業．1973 年同大学院修士課程修了．工学博士．1974 年大阪大学基礎工学部生物工学科助手．1987 年山形大学工学部情報工学科助教授．1990 年同教授．1993 年広島大学工学部第二類教授，現在に至る．この間，オートマトン理論，計算理論，形式言語理論，自然言語と知識情報処理のための論理学などに関する研究に従事．