

最大最小位相分解に基づく pre-inverse 適応システムと収束条件

小林 正樹[†] 王 馳[†] 衣笠 保智^{††} 伊藤 良生^{†††}

[†] 中部大学工学部 〒487-8501 愛知県春日井市松本町 1200

^{††} 松江工業高等専門学校 〒690-8518 島根県松江市西生馬町 14-4

^{†††} 鳥取大学工学部 〒680-8552 鳥取県鳥取市湖山町南 4-101

E-mail: [†]mkoba@isc.chubu.ac.jp ^{††}te07002-3806@sti.chubu.ac.jp ^{†††}kinugasa@matsue-ct.ac.jp ^{†††}itoh@ele.tottori-u.ac.jp

あらまし 未知系の伝達関数の逆数を推定することを目的として、未知系の前段に適応フィルタを配置した構成の適応システムは一般に pre-inverse 適応システムと呼ばれる。未知系の伝達関数そのものは適応トランスバーサルフィルタにより容易に推定できるが、その逆数の実現性の保証がないために種々の適応システムが検討されてきた。その代表例が filtered-x アルゴリズムを用いた適応システムである。このシステムは推定誤差を有する補助の適応フィルタの出力を用いて前段の適応フィルタを制御するために、正しい適応動作は期待できない。これに対し最大最小位相分解手法を用いれば、各々の伝達関数の逆数が遅延を含む安定な伝達関数となるために、補助の適応フィルタは不要となりこれにより正しい適応動作が期待できる。本論文ではこの手法に基づく適応システムを提案し、その収束条件を定式化する。適応システムの出力が常に入力信号の遅延に等しいという性質を用いてヘッセ行列を求め、これが正定値となることを示す。この結果、収束条件が定式化される。これらの理論検討結果は計算機シミュレーションにより厳密に検証される。

キーワード 最大位相, デジタル制御, デジタル信号処理, 伝達関数, 適応アルゴリズム

A Pre-Inverse Adaptive System and Its Convergence Condition Based on Maximum and Minimum Phase Decomposition

Masaki KOBAYASHI[†] Chi WANG[†] Yasutomo KINUGASA^{††} and Yoshio ITOH^{†††}

[†] Faculty of Engineering, Chubu University 1200 Matsumoto-cho, Kasugai-shi, Aichi, 487-8501 Japan

^{††} Matsue National College of Technology, Shimane 14-4, Nishi-ikumacho, Matsue-shi, Shimane 690-8518 Japan

^{†††} Faculty of Engineering, Tottori University 4-101 minami, koyama-cho, Tottori-shi, Tottori, 680-8552 Japan

E-mail: [†]mkoba@isc.chubu.ac.jp ^{††}te07002-3806@sti.chubu.ac.jp ^{†††}kinugasa@matsue-ct.ac.jp ^{†††}itoh@ele.tottori-u.ac.jp

Abstract In general, the adaptive system using the structure in which an adaptive filter is placed before the unknown system to estimate the inverse transfer function of the unknown system is called pre-inverse adaptive system. The transfer function of the unknown system can be easily estimated by an adaptive transversal filter. Since there is no guarantee that the inverse transfer function of the estimated transfer function can be realized, various adaptive system has been studied. The representative example is an adaptive system that used the filtered-x adaptive algorithm. The correct adaptive performance cannot be expected since this system controls the main adaptive filter by using the output signal of the auxiliary adaptive filter that has the estimation error. In the maximum and minimum phase decomposition approach, the inverse of each transfer function becomes a stable transfer function that contains the delay so that the auxiliary adaptive filter becomes unnecessary and the correct adaptive performance can be expected. In this paper we propose an adaptive system and formulate the convergence condition of this adaptive system. Hessian is derived using the property that the output signal of the adaptive system always equals to the delay version of the input signal, and it is shown that Hessian becomes a positive definite. As a result, the convergence condition is formulated. Finally, these results of theoretical consideration are verified strictly by computer simulation.

Keyword Maximum Phase, Digital Control, Digital Signal Processing, Transfer Function, Adaptive Algorithm

1. まえがき

未知系の伝達関数の逆数により定義される逆伝達関数を推定する適応システムの構成は、適応フィルタを未知系の後段に配置した構成と前段に配置した構成に大別される。前者の代表例は適応等化器であり、後者の代表例は自動制御システムである。後者はその構成の特徴から pre-inverse 適応システムと呼ばれる。前者は未知系を通過した信号を直接利用できるために、そのままの構成により未知系の推定が可能であり古くから実用化されている。この構成に新しく適応フィルタを前段に配置して後段の適応フィルタのタップ係数の値をこれにコピーする手法が pre-inverse 適応システムとして、最初に研究されたが適応フィルタ中に混入するノイズによるバイアス誤差が生じ、望ましい性能が得られなかった。補助の適応フィルタにより未知系の伝達関数を推定し、このフィルタの出力を用いることにより前者と同様な作用を期待する filtered-x アルゴリズムを用いた適応システムが次に提案された[1]が補助の適応フィルタの推定誤差による性能劣化という問題が新しく生じた[2]。これらの方式の問題を解決する手法として最大最小位相分解手法が新しく提案された[3]。この手法は未知系の伝達関数を最大位相関数と最小位相関数に時間領域において分解して推定する。未知系の逆伝達関数は推定された各々の伝達関数の逆数の積として直接計算できる。このことは逆伝達関数を直接推定していることと等価である。しかし文献[3]の適応システムは、

(1) 適応最小位相フィルタのタップ係数がノイズ(有色)によるバイアス誤差をもつ。

(2) 収束条件が推定誤差電力に依存する。

の問題があり、実用化の妨げになっていた。本論文はこの問題を解決し、更に収束条件を定式化し実用に供することを目的としている。なお、周波数領域においてはヒルベルト変換を用いた適応フィルタ[4]により単位円内外の極と零を分離する手法が考えられるが信号の周期性の仮定、スペクトル漏れ、実現上の問題がある。最初に、評価関数のタップ係数による微分を厳密に求め、これから決定されるこう配中の出力信号をタップ係数に依存しない入力信号の遅延に置換する。常に逆伝達関数が遅延を含む伝達関数として決定できるためである。次に置換されたこう配を用いてヘッセ行列を求め、これが正定値となることを示し、収束条件を定式化する。最後にこれらの検討結果を計算機シミュレーションにより検証する。

2. 適応システムの構成とその動作

図1に適応システムの構成を示す。 H_{\max} は適応最大位相フィルタであり、未知系の最大位相部伝達関数 $H_{\max}^*(z)$ を推定し、適応トランスバーサルフィルタにより構成される。 H_{\min} は適応最小位相フィルタであり、未知系の最小位相部伝達関数 $H_{\min}^*(z)$ を推定し、適応指数フィルタにより構成

される。その理由は伝達関数が常に最小位相関数となるからである。 $H_{\max}(z)$, $H_{\min}(z)$ は各々の伝達関数を表わす。逆フィルタ Q , R は $H_{\max}(z)$, $H_{\min}(z)$ から直接計算される逆伝達関数 $z^{-1}/H_{\max}(z)$, $1/H_{\min}(z)$ をもつフィルタ、 S , G , z^{-1} は各々、後述するゲインファクターの符号の推定値、及び遅延である。また、 $N(n)$ は出力において加法的に加わるノイズである。これは適応フィルタには入力されない構成となっているから、信号の統計的な独立性を仮定すれば、その影響は無視できる。 $H^*(z)$ は H_{\max} , H_{\min} , S によりこの配アルゴリズムを用いて推定され、更新毎にその逆フィルタ Q , R が決定される。適応システムが収束すれば未知系の出力 $z(n)$ は入力 $x(n)$ の遅延信号に一致する。

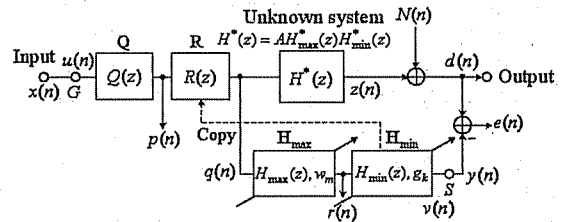


図1 適応システムの構成

Fig.1. Structure of a proposed adaptive system.

3. 未知系と適応フィルタの伝達関数

3.1 未知系の伝達関数

$H^*(z)$ は一般に次式により表わされる。

$$H^*(z) = A H_{\max}^*(z) H_{\min}^*(z)$$

$$H_{\max}^* = z^{-M} \prod_{i=1}^M (1 - \alpha_i z), |\alpha_i| < 1$$

$$H_{\min}^* = \frac{\prod_{i=1}^B (1 - \beta_i z^{-1})}{\prod_{i=1}^C (1 - \gamma_i z^{-1}), |\beta_i| < 1, |\gamma_i| < 1 \quad (1)$$

A はゲインファクター、 $H_{\max}^*(z)$ は最大位相部伝達関数、 $H_{\min}^*(z)$ は最小位相部伝達関数を表わす。 $H_{\max}^*(z)$ のすべての零点は単位円外に存在する。 $H_{\min}^*(z)$ はその対数伝達関数 $G(z) = \log[H_{\min}^*(z)]$ が安定な伝達関数として定義され[5]、その極、零点はすべて単位円内に存在する。また、逆に $H_{\min}^*(z) = \exp[G(z)]$ のように表現することもできる。

3.2 適応フィルタの伝達関数

H_{\max} , H_{\min} の伝達関数は次式より与えられる。

$$H_{\max}(z) = \sum_{l=0}^M w_l z^{-l}, w_M = 1$$

$$H_{\min}(z) = \exp\left(\sum_{l=0}^N g_l z^{-l}\right) \quad (2)$$

$H_{\max}(z)$ は式(1)の $H_{\max}^*(z)$ を推定する適応最大位相フィルタ, $H_{\min}(z)$ は式(1)の $|A| |H_{\min}^*(z)|$ を推定する適応最小位相フィルタであり, g_0 は $|A|$ を推定する。また, 文献[3]とは異なり $w_M = 1$ に固定することにより, 適応過程においてそれが零となることを防止している。これにより新しくゲインファクター A の符号の推定を行う係数 S が必要となる。

3.3 フィルタ Q, R の伝達関数

文献[3]より, フィルタ Q の伝達関数 $Q(z)$ は次式により与えられる。

$$Q(z) = \sum_{l=0}^V f_{V-l} z^{-l}$$

$$f_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{H_{\max}(z^{-1})} \frac{z^M}{z^{k-1}} dz \quad (3)$$

f_k は図 2 の再帰フィルタのインパルス応答 $f(m)$ の k タイムスロットの値として算出される。 V は $f(m)$ の継続長である。このとき,

$$Q(z)H_{\max}(z) = z^{-(M+V)} \quad (4)$$

となる。

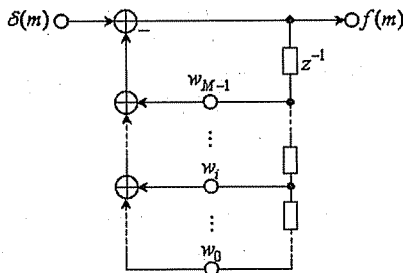


図 2 f_k を算出する再帰フィルタ

Fig. 2. Recursive filter to calculate signal f_k .

一方, フィルタ R の伝達関数 $R(z)$ は,

$$R(z) = \frac{1}{H_{\min}(z)} = \exp\left(\sum_{l=0}^N (-g_l) z^{-l}\right) \quad (5)$$

により与えられる。これらの伝達関数は w_m, g_k から一意に決定される。 w_m, g_k は正しい方向に適応制御されるから逆フィルタ Q, R も常に正しい方向に適応制御さ

れることがわかる。

4. 適応アルゴリズム

4.1 適応最大位相フィルタ H_{\max}

図 1 において評価関数 D を,

$$D = \frac{1}{2} \overline{e^2(n)} \quad (6)$$

により与える。ここで, $\overline{\quad}$ は時間平均長 L の時間平均を表わす。適応フィルタのタップ係数は時間平均をとっている間は一定であり, 適応フィルタ内の信号はこの時間内において定常と考えることができる。図 1 を参照して,

$$\frac{\partial D}{\partial w_m} = -e(n) \frac{\partial y(n)}{\partial w_m}$$

$$y(n) = S r(n) * h_{\min}(n) = S \left(\sum_{i=0}^M w_i q(n-i) \right) * h_{\min}(n) \quad (7)$$

が成立するから,

$$\frac{\partial y(n)}{\partial w_m} = S q(n-m) * h_{\min}(n) = S p(n-m) * h_{\min}^{-1}(n) * h_{\min}(n) \quad (8)$$

を得る。ここで, $*$ は畳み込みを, $h_{\min}(n), h_{\min}^{-1}(n)$ は各々 H_{\min}, R のインパルス応答を表わす。式(8)において, $h_{\min}(n) * h_{\min}^{-1}(n) = 1$ が成立するから, 式(7), (8)より,

$$\frac{\partial D}{\partial w_m} = -S \overline{e(n)p(n-m)} \quad (9)$$

式(7), (9)より, 適応アルゴリズムとして,

$$w_m(l+1) = w_m(l) + \mu S \overline{e(n)p(n-m)} \quad (10)$$

を得る。ここで l は更新時刻である。

4.2 適応最小位相フィルタ H_{\min}

図 1 において,

$$\frac{\partial D}{\partial g_k} = -e(n) \frac{\partial y(n)}{\partial g_k} = -S \overline{e(n)v(n-k)} \quad (11)$$

が成立する。指数フィルタにおいてはよく知られているように, その出力のタップ係数に関する微分は出力の遅延になるからである[6]。式(4), (5)より, $v(n) = u(n-M-V)$ が成立するから, 適応アルゴリズムとして次式を得る。

$$g_k(l+1) = g_k(l) + \mu S \overline{e(n)u(n-k-M-V)} \quad (12)$$

5. 適応アルゴリズムの収束条件

同一の評価関数 D を用いているために互いに結合している式(10), (12)の適応アルゴリズムにおいて $S^2=1$ の関係を考慮して,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 D}{\partial w_m \partial w_j} &= \overline{p(n-j)p(n-m)} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial g_k \partial g_l} &= \overline{u(n-i-M-V)u(n-k-M-V)} \\ \frac{\partial^2 D}{\partial w_m \partial g_k} &= \frac{\partial^2 D}{\partial g_k \partial w_m} = \overline{u(n-k-M-V)p(n-m)}\end{aligned}\quad (13)$$

を得る. 今, 信号ベクトル $\xi(n)$ を

$$\xi(n) = [p(n), \dots, p(n-M+1), u(n-1-M-V), \dots, u(n-N-M-V)]^T$$

T: 転置 (14)

と置けば, ヘッセ行列 H は $H = \overline{\xi(n)\xi^T(n)}$ となり, ほとんど常に正定値であるから, その最大固有値 λ_{\max} は $\lambda_{\max} < \text{Tr}(H) = M\overline{p^2(n)} + (N+1)\overline{u^2(n)}$ の関係を満たす. したがって, 収束条件として次式を得る.

$$0 < \mu < \frac{2}{M\overline{p^2(n)} + (N+1)\overline{u^2(n)}}\quad (15)$$

一方 filterd-x アルゴリズムは, $H = \overline{\hat{z}(n)z^T(n)}$ となる. $z(n)$ は未知系の出力信号ベクトル, $\hat{z}(n)$ は補助の適応フィルタによるその推定値である. よって, H が正定値となる保証はないために種々の困難な問題が生じる.

6. 数値検証

本章ではこれまでの検討結果を計算機シミュレーションにより検証する.

6.1 シミュレーションの条件

(1) 入力信号 $x(n)$: 白色信号 $w(n)$ を 1 次再帰フィルタに入力したときの出力とする.

$$x(n) = \sqrt{1-R_x^2}w(n) + R_x x(n-1)\quad (16)$$

(2) 未知系: 次式の 2 次システムとする.

$$H^*(z) = A \frac{R_z^{-2} - (2R_z^{-1} \cos \Phi_z)z^{-1} + z^{-2}}{1 - (2R_p \cos \Phi_p)z^{-1} + R_p^2 z^{-2}}$$

A: ゲインファクター
 R_p, R_z : 極, 零点の半径
 Φ_p, Φ_z : 極, 零点の位相角 (17)

(3) 適応最大位相フィルタ

$$\begin{aligned}H_{\max}(z) &= \sum_{i=0}^2 w_i z^{-i}, w_2 = 1 \\ Q(z) &= \sum_{i=0}^V b_i z^{-i}\end{aligned}\quad (18)$$

図 2 の回路により f_k を計算し, $b_k = f_{V-k}$ のようにコピーを行う.

(4) 適応指数フィルタ: 次式の多項式とする.

$$H_M(z) = \exp\left(\sum_{i=0}^N g_i z^{-i}\right) \approx 1 + \sum_{r=1}^F \left(\sum_{i=0}^N g_i z^{-i}\right)^r / r!\quad (19)$$

逆フィルタ $R(z)$ も同様である.

(5) 適応パラメータとフィルタ係数の初期値

H_{\max} : $w_2(0)=1.0$, その他はすべて零とする. これにより $H_{\max}(z)$ の初期値は最大位相関数になる.

H_{\min} : すべて零とする.

Q: 適応システムに信号を導くために $b_V=1.0$, その他はすべて零とする.

R: すべて零とする.

S, G: $G=1, S=0$ とする.

(6) 適応アルゴリズム: 式(10), (12)の時間平均を厳密に表現した次式による.

$$\begin{aligned}w_m(l+1) &= w_m(l) + \frac{\alpha S \sum_{n=LL}^{(l+1)L-1} e(n)p(n-m)}{M \sum_{n=LL}^{(l+1)L-1} p^2(n) + (N+1) \sum_{n=LL}^{(l+1)L-1} u^2(n)} \\ g_k(l+1) &= g_k(l) + \frac{\alpha S \sum_{n=LL}^{(l+1)L-1} e(n)u(n-k-M-V)}{M \sum_{n=LL}^{(l+1)L-1} p^2(n) + (N+1) \sum_{n=LL}^{(l+1)L-1} u^2(n)}\end{aligned}$$

$0 < \alpha < 2$ (20)

S の更新は図 3 に示すように LPF の出力を用いる[7]. 適応アルゴリズムは次式により与えられ, この値を入力側の G にコピーする.

$$\begin{aligned}t(l+1) &= t(l) + \alpha_F L^{-1} \sum_{n=LL}^{(l+1)L-1} e_F(n)f(n), t(0) = 0.0 \\ S(l+1) &= \text{sgn}[t(l+1)] \\ G(l+1) &= S(l+1)\end{aligned}\quad (21)$$

(7) $e(n)$ の評価: 次式による.

$$E(l) = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=LL}^{(l+1)L-1} z^2(n)}{\sum_{n=LL}^{(l+1)L-1} [e(n) - N(n)]^2} \quad (\text{dB})\quad (22)$$

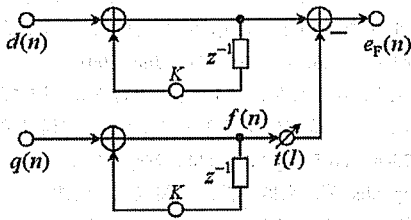


図3 ゲインファクターAの符号の推定
Fig. 3. Estimation of sign of gain factor A.

(8) 適応システムの性能評価:

次式の推定精度 EA(Estimation Accuracy)による。

$$EA(l) = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=ll}^{(l+1)L-1} z^2(n)}{\sum_{n=ll}^{(l+1)L-1} |x(n-M-V) - z(n)|^2} \quad (\text{dB}) \quad (23)$$

(9) S/N: 次式による。

$$S/N(l) = 10 \log_{10} \frac{\sum_{n=ll}^{(l+1)L-1} z^2(n)}{\sum_{n=ll}^{(l+1)L-1} N^2(n)} \quad (\text{dB}) \quad (24)$$

ここで、 $N(n)$ は白色雑音である。

6.2 シミュレーション結果

図4に基本性能の評価として入力信号 $x(n)$ が白色信号 ($R_x = 0.0$) の場合のシミュレーション結果の一例を示す。未知系のパラメータは $A = -1.8$, $R_p = 0.8$, $R_z = 1.5$, $\Phi_p = 45$ 度, $\Phi_z = 60$ 度である。式(17)の2次システムにおいて零点は単位円外に設定してあり、最大位相システムとなっている。適応システムのパラメータは、 $M = 2$, $N = 10$, $\alpha = 1.0$, $L = 512$, $F = 8$, $V = 20$, $\alpha_F = 10^{-4}$, $K = 0.995$ である。

評価値 E, EA 共に $S/N \approx 20$ (dB) 以上の値に収束していることがわかる。Sの収束値は-1である。よく知られているように入力信号 $x(n)$ が白色信号の場合にはヘッセ行列 \mathbf{H} の固有値のばらつきが小さくなる。したがって、 λ_{\max} と $\text{Tr}(\mathbf{H})$ の差が大きくなるために収束条件の検証が困難となる。この理由から収束条件の検証は入力信号を有色信号とした。有色化のための1次再帰フィルタの再帰係数 R_x の値を大きく設定して $\lambda_{\max} \approx \text{Tr}(\mathbf{H})$ の状態において検証を行った。

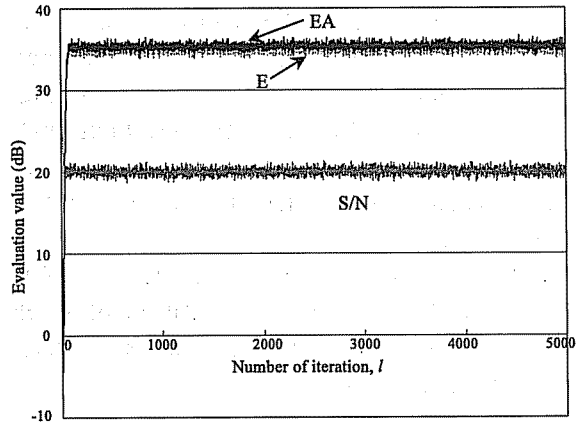


図4 E,EAの収束特性 (白色信号, $\alpha = 1.0$)
Fig.4. Convergence performance of evaluation value E and EA (White signal, $\alpha = 1.0$).

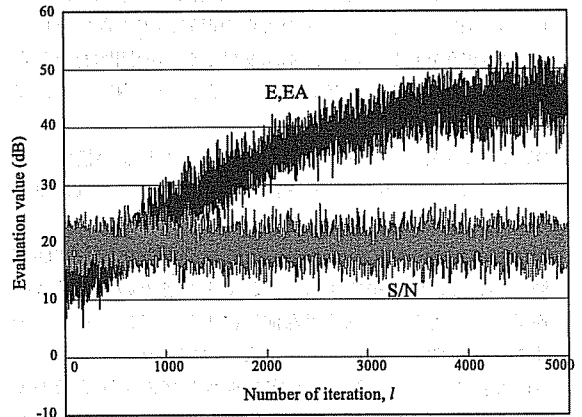


図5 E,EAの収束特性 (有色信号, $\alpha = 1.0$)
Fig.5. Convergence performance of evaluation value E and EA (Colored signal, $\alpha = 1.0$).

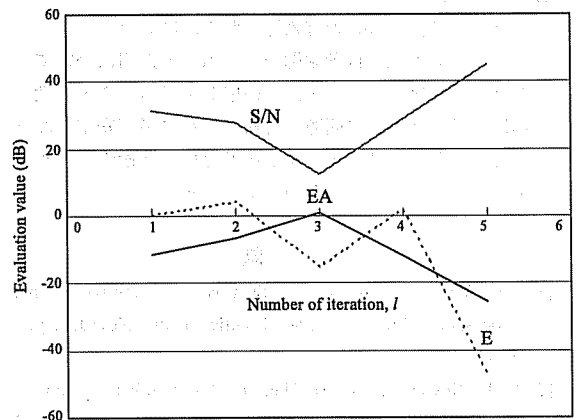


図6 E,EAの収束特性 (有色信号, $\alpha = 2.2$)
Fig.6. Convergence performance of evaluation value E and EA (Colored signal, $\alpha = 2.2$).

図5に収束条件を満たす場合 ($\alpha=1.0$) のシミュレーション結果の一例を示す。入力信号のパラメータは $R_x=0.99$ である。未知系と適応システムのパラメータは図4と同様である。収束条件の検証のために時間平均長 L は比較的大きく設定したが実用的には小さく設定することができる。評価値 E , EA 共に $S/N \approx 20(\text{dB})$ 以上の値に収束していることがわかる。

図6は収束条件を満たさない場合 ($\alpha=2.2$) のシミュレーション結果の一例を示す。すべての評価値は発散し、オーバーフローとなった。このことから適応アルゴリズムとその収束条件は正しいといえる。

7. むすび

pre-inverse 適応システムの代表例である filtered-x アルゴリズムは、補助の適応フィルタの推定誤差に起因した推定精度の劣化と適応フィルタの収束の保証ができないという大きな問題を有していた。本論文はこれらの問題を有しない pre-inverse 適応システムを提案した。その内容を次に示す。

- (1) 未知系の出力を適応フィルタには入力しない構成とした。これにより適応フィルタ内の信号にはノイズは含まれずノイズによるバイアス誤差が生じない。
- (2) 未知系の伝達関数の最小位相部と最大位相部を時間領域において個別に推定する。これにより各々の伝達関数の逆数(逆伝達関数)は簡単な演算により一意に定まる。全体の逆伝達関数はこれらの積により決定される。
- (3) 個別に推定するための適応アルゴリズムを演算量の少ないこう配アルゴリズムにより実現し、その収束条件を導出した。
- (4) 計算機シミュレーションによりこれらの内容の数値検証を行った。

これにより提案方式の有効性を明らかにした。

今後、提案方式の自動制御システムへの適用について検討を進める予定である。また、適応システムのタップ数が大幅に不足した場合の問題、再帰フィルタが不安定になった場合の処置およびヒルベルト変換を用いた適応フィルタによる手法などの検討も進める予定である。

文 献

- [1] B. Widrow and S. D. Stearns, "Adaptive signal processing," pp.292 - 294, Prentice-Hall, New Jersey, 1985.
- [2] S. D. Snyder and C. H. Hansen, "The effect of transfer function estimation errors on the Filtered-X LMS algorithm," IEEE Trans. Signal Processing vol.42, no.4, pp.950 - 953, Apr.1994.

- [3] 小林正樹, 伊藤良生, ジェームス オケロ, "適応指数フィルタを用いた逆伝達関数の推定," 信学論(A), vol.J84-A, no.6, pp.769 - 776, June 2001.
- [4] 小林正樹, 伊藤良生, 三上直樹, "周波数領域における補間に基づく適応デジタルフィルタ," 信学論(A), vol.J75-A, no.5, pp.883 - 888, May 1992.
- [5] A. Papoulis 著, 大槻 喬, 平岡寛二 監訳, 工学のための応用フーリエ積分, pp. 251-252, オーム社, 東京, 1985.
- [6] 小林正樹, 西川俊一, "対数近似に基づく適応デジタルフィルタ," 信学論(B-I), vol.J72 - B - I, no.12, pp. 1272 - 1274, Dec.1989.
- [7] M. Kobayashi, Y. Takagi, J. Okello, and Y. Itoh, "An IIR adaptive filter based on estimation of all-pass system," IEEE Trans. Circuits and Syst. II, vol.45, no.6, pp.676-684, June, 1998.