情報学基礎 39－1
(1995. 9. 14)

複合事象システムの情報量評価について
－システム情報量の提案－

古閑　政
九州東海大学工学部経営管理学科

情報量の評価に関する基本的考え方を検討し、システム情報という概念を提案した。この新しい概念は、複数の事象間の関係を相補的分枝構造なるグラフによって表現することから発想された。単独事象及び２次元複合事象（２事象間の関係を問題とする）の場合は、従来の説明と同様な結果となるが、３事象間の関係を問題とする３次元複合事象の場合、従来の観点では問題が生ずることを、具体例によって論証した。したがって、この場合にはシステム情報という観点から、３事象間の関係を把握すべきであると主張した。そして、システム情報の意味を考察し、多次元複合事象システムの場合の表現形式も提示した。最後に、システム情報を具体例について求めるとき、複雑な情報エントロピーの計算が必要になるので、そのための簡便な計算法を紹介した。

EVALUATION OF INFORMATION INDEX ABOUT COMPLEX EVENT SYSTEM

Masashi Koga

Kyushutokai University
School of Business Engineering
9－1－1, Toroku, Kumamoto City, 862 Japan
E－mail：koga@bm－1. ktokai－u. ac. jp

The basic concept on evaluation of the information index is discussed here. From the point of this view a new concept " system information " is proposed. This new index is concerned with the complementary branch structure which shows the relation among multi-events. In the case of a single event or two events, the index is equal to the traditional mutual information.

But in the case of the three event system the traditional concept gives some wrong results. Its detail is explained by studying the special example. About the multi-(more than three) event system, the system information is defined to be consistent with the case of the two event system. Moreover, the simple calculation method is introduced for computing the complicated information entropy.

1. はじめに

1948年のシャノンの発表以来、それをめぐる研究は通信理論としての発展と、情報エントロピー論の発展として目覚ましいものがあったが、情報そのものの見方の研究については、どちらかといえば等閑に付されてきたと言えよう。

その理由として、情報は質と量の二面性を有していることがある。質を考えると、その意味の問題が表面化するが、意味は更に認識の問題も派生し、複雑化するばかりか、認識主体に左右される面が生まれて客観性を失う。

また量の大小は、重要な要素ではあっても、「無益な情報」という表現があるように、単なる言語情報の多寡では測れないことも当然である。

つまり、情報に或る量的概念（情報の尺度）を付与する必要性について、一般的同意はみられる反面、どのような計量法を採用すべきかについての具体的議論は、上述の背景から敬遠されてきた節がある。

とはいえ、事象の多様性を確率分布として捉え、それを情報エントロピーとして一意的に表現するというシャノンの提案は、情報量の概念の明確化に多大な示唆を与えた[1]。

とくに、通報（メッセージ）によって事象の生起確率が変化するとき、その事前確率と事後確率の比の対数によって、その通報が与える情報量を定義するという考え方（ゴールドマンの著書[2]にみられる）は、非常に説得力がある。しかし、この考え方の欠点は、その事象が起こらなかったという通報をどう扱うかにある。

したがって本論文では、情報量を事象の一局面（例えば、生起するかしないか）のみについて考えるべきではなく、事象の生起状態がシステムの中に、どのように組み込まれているかを考えるべきだ、という立場をとっている。この観点から、複合事象システムを事象間の関係を表す相補的分枝構造にグラフ化し、その特性を一意的に示すものとしてシステム情報量という概念を導入する。

2. 情報量の再定義

2.1 単独事象の情報量

いま問題としている事象Ｅの事前確率がＰであり、通報によりその事象が予想通り生起したとすれば、その通報によりもたらされる情報量は、$-\mathrm{Log}_2 P$ により与えられる[2]、とするのがこれまでの考え方である。

しかしこれには、次に述べる難点がある。つまり、Ｅの余事象の事前確率は暗黙裏に $1-P$ で与えられており、前述の通報によりこの余事象は起きなかったことが判明するが、この側面からみた情報量はどう計算するのかという問題が生じる。

前者を事象の表の側面とすれば、後者は裏の側面と言える事象である。上述の考え方では表の側面における情報量は定義できても、裏の側面における情報量は定義不能に陥る。この矛盾の背景には、事象生起の一側面のみを見ていることがある。

もし事象の生起だけを問題にすることにして、余事象についても起きたときの情報量 $-\mathrm{Log}(1-P)$ を採用し、両者の平均をとることにすれば、

$$-P\ \mathrm{Log}_2 P-(1-P)\mathrm{Log}(1-P) \qquad (1)$$

となる。これは、通常情報源の情報量と言われるものである。

2.2 2次元複合事象の情報量

この節では、２つの事象Ｘ，Ｙが組み合わさって起こる２次元複合事象について検討する。

順序は問題ではないが、事象Ｘに続いて事象Ｙが起きるものとし、考察を簡単にするためそれぞれの要素事象を $x_1.\ x_2$ と y_1 y_2 の２要素であるとする。そして $x_1.\ x_2$ のそれぞれの生起確率を $p_1.\ p_2$ とし、x_1 が起きたときの y_1 の確率を q_1、y_2 の確率を q_2 とし、x_2 が起きたときの y_1，y_2 の確率をそれぞれ q_3，q_4 とすれば

X，Yの２事象間の確率値の関係は、図１の左側に示される。この図左側のq_1とq_3はyの生起確率であり、q_2とq_4はy_2の生起確率であるため、同図右側に示すように交差的に結合でき、Yの周辺確率が得られる。

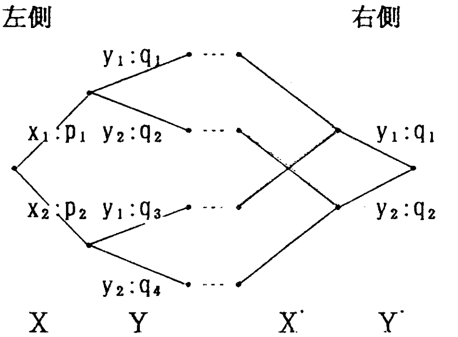


図１　２次元複合事象の相補的分枝構造図

すなわち

$$q_1' = p_1q_1 + p_2q_3 \qquad (2)$$

$$q_2' = p_1q_2 + p_2q_4 \qquad (3)$$

このときの相互情報量を次の式によって定義する。

$$I(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY) \qquad (4)$$

ここで

$$H(X)= H(p_1, p_2) \qquad (5)$$

$$H(Y)= H(q_1, q_2) \qquad (6)$$

$$H(XY)=H(p_1q_1, p_1q_2, p_2q_3, p_2q_4) \qquad (7)$$

これらの式で、$q_1=q_3=1$，$q_2=q_4=0$　とすると次式が得られる。

$$H(X)=H(Y)=H(XY)$$

よって(4) 式は

$$I(X;Y)=H(X) \qquad (8)$$

となる。これは単独事象の情報量に等しく、(4) 式の最大値を与える。なぜならば、YがXを伝送する事象であるとみなすと、上記の条件は、常に正しい伝送を保証するから、システム内に情報を損なうようなものは何も存在しないのである。

またX，Yが互いに独立であれば、$q_1=q_3$，$q_2=q_4$ であるから

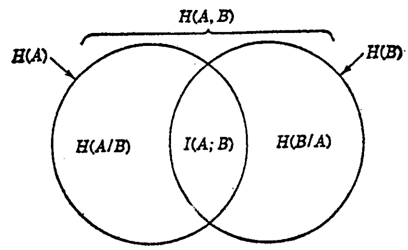
$$H(X)=0$$

したがって、相互情報量が零になるが、XとYとの間には何の関係もないのだから、ここにシステムは存在せず、当然の結果である。

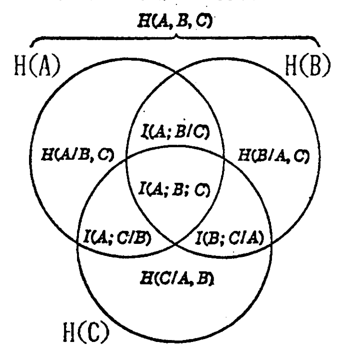
３．３次元複合事象の情報量の考え方

３．１　相互情報量について

前章において、単独事象と２次元複合事象の情報量を、値として連続するように定義してきた。それでは、X，Y，Zの３事象が同時に存在する（この意味は、X→Y→Zの順序での生起やY→Z→X，Z→X→Yの順序またはその逆の生起やZに無関係なX→Y等の生起を同時に考慮していることを言う）場合どう考えるかを次に論ずる。



（１）２次元の場合



（２）３次元の場合

図２　VENN図による相互情報量の把握

情報エントロピーに関するVENN図（図２）に示されるように、２次元複合事象の場合を拡張することによって、３次元複合事象の相互情報量が与えられている[3),4)]。

すなわち、VENN図（２）の H(A),H(B),H(C)が全て重畳する領域に着目して次頁の式が得

られる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
I(X;Y;Z) &= I(Y;Z)-I(Y;Z/X) \\
&= I(Z;X)-I(Z;X/Y) \qquad (9) \\
&= I(X;Y)-I(X;Y/Z)
\end{aligned}
$$

これらは、また次式と同等である。

$$
I(X;Y;Z)=H(XYZ)+H(X)+H(Y)+H(Z)-H(XY)-H(YZ)-H(ZX) \qquad (10)
$$

以上の式は、２次元の場合との類似性を有し興味深いが、問題点がある。次に具体例によりそれを検討する。

３．２　社員構成システムに関する検討

或る企業の社員構成を、男女比・年齢層・学歴で区分けすると、表１のごとくである。

表１　社員構成

性別Ｘ		年齢層Ｙ			学歴Ｚ	
男	女	①	②	③	大卒	高卒
0.7	0.3	0.36	0.47	0.17	0.65	0.35

但し①30才以下②31から50才迄③51才以上

社員は、全員がＸ，Ｙ，Ｚの各要素事象のどれかに、同時に該当するので、ある一人の社員の性別・年齢層・学歴を問題とする事象は、明らかに３次元複合事象 XYZ=YZX=ZXY の問題である。

ところで、表１だけでは事象間の関係が不明であるので、関連表を右上に掲げる。

表２　各事象間の関係

性　別 Ｘ	年齢層 Ｙ	学歴Ｚ 大卒	 高卒
男性 0.7	① 0.3	0.9	0.1
	② 0.5	0.7	0.3
	③ 0.2	0.4	0.6
女性 0.3	① 0.5	0.7	0.3
	② 0.4	0.4	0.6
	③ 0.1	0.1	0.9

この表に基づいて相補的分枝構造図を描くと図３が得られる[5)]。

この図の分枝の傍らにその構成比が記入されているが、左側は自明である。これら各分枝の値の相乗積によって、複合事象ＸＹＺの値が図中央に記したように求められる。次に右側の分枝結合手順にしたがって集めていくと、Ｚの構成比 0.65 と 0.35 が得られる。右側のＸは、それぞれ２要素の和が１になるように、構成比を計算すればよい。例えば図示した 0.643と0.357 は次の計算式によって得られる。

$$0.189/(0.189+0.105)=0.643$$

$$0.105/(0.189+0.105)=0.357$$

Ｙについては、ＺとＸの値から求められる。例えば、Ｙの 0.45 は次の計算式から得られる。

$$\underset{XYZ}{0.189}/(\underset{X}{0.643}*\underset{Z}{0.65})=\underset{Y}{0.45}$$

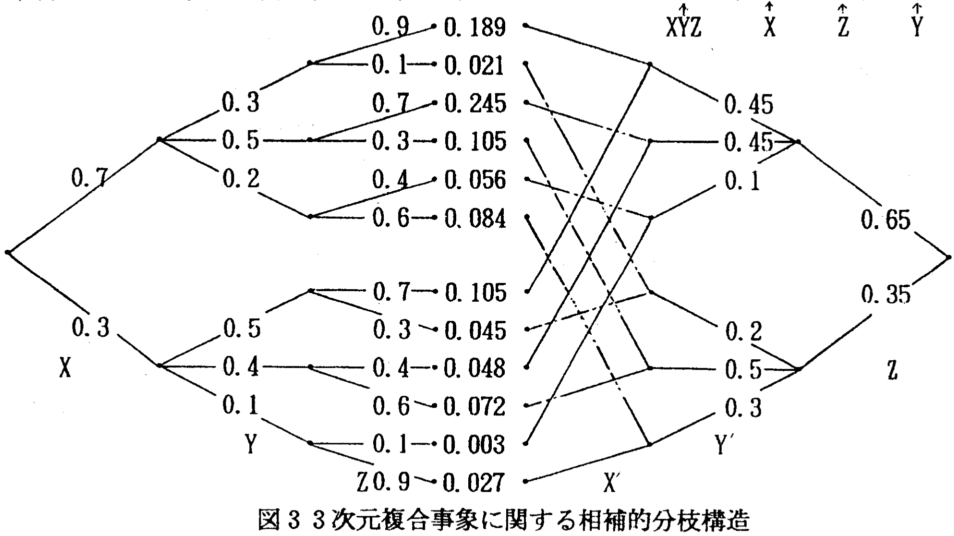


図３ ３次元複合事象に関する相補的分枝構造

以上の計算を各分枝について繰り返すことにより、図3の右側の分枝の値が得られる。

これらの結果を使って、サブシステムにあたる2次元複合事象XYに関する相補的分枝構造を示す図4が得られる。

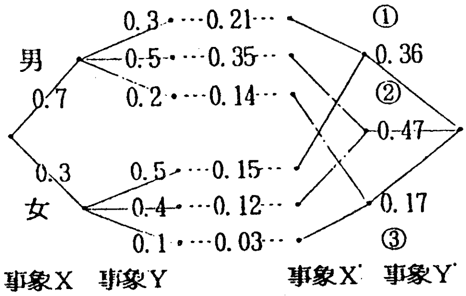


図4　XYの相補的分枝構造図

次に各年齢層における学歴構成を算出することにり、YZに関する相補的分枝構造を示す図5が得られる。

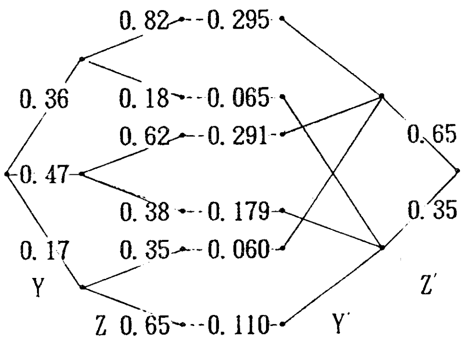


図5　YZの相補的分枝構造図

さらに、同様な算出によってZXに関する相補的分枝構造を示す図6が得られる。

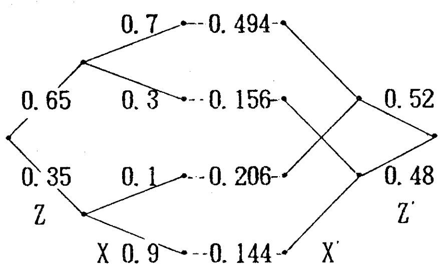


図6　ZXの相補的分枝構造図

以上の図4から図6で得られている数値を使えば (9)式は計算できる。しかし、(8) 式による計算を行うには、例えば図5を男と女の場合に分けて描く必要がある。それを図7と図8に示す。

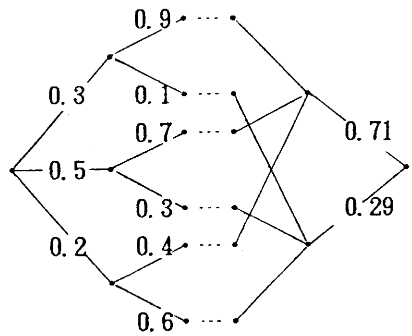


図7　条件付相補的分枝構造図
（男性の場合）

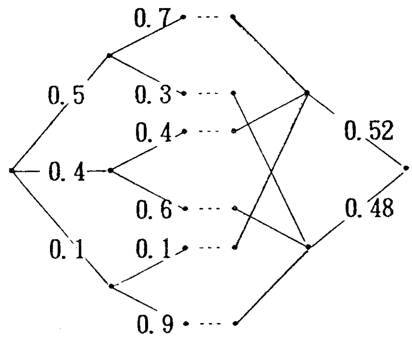


図8　条件付相補的分枝構造図
（女性の場合）

ここで、図7について得られる相互情報量を $I_M(Y;Z)$, 図8について得られる相互情報量を $I_F(Y;Z)$ と置くと、条件付相互情報量は次式により求められる。

$$I(Y;Z/X) = 0.7I_M(Y;Z) + 0.3I_F(Y;Z) \quad (11)$$

これと、次式から相互情報量が求まる。

$$I(X;Y;Z) = I(Y;Z) - I(Y;Z/X) \quad (12)$$

実際に求めてみると、-0.03 となり、負数である。それは、(12)式において

$$I(Y;Z) < I(Y;Z/X) \quad (13)$$

となることから当然である。この理由を以下に検討する。

図4、5、6から

$I(X;Y)=0.03$　$I(Y;Z)=0.08$　$I(Z;X)=0.02$

が求まるので、H(X), H(Y), H(Z)間には相互に何らかのかかわりが存在するとみなせる。

したがって、Xが与えられた状態でのY，Z間の相互情報量I(Y;Z/X)は、Xとは無関係に求められた相互情報量 I(Y;Z) に比べ小となることはない。 I(X;Y)=I(Z;X)=0 のとき両者は一致し、I(X;Y;Z)=0である。

つまりI(X;Y;Z)≦0 であるが、前述したように3事象のうちのどの事象をとっても相互情報量の値は正であるのに、3事象の相互情報量が負になるような定義は問題であろう。

3．3　システム情報量の提案

本論文では、相互情報量に代わるシステム情報量を以下に提案する。

（1）2次元複合事象の場合

$$S(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY) \qquad (14)$$

（2）3次元複合事象の場合

$$S(X;Y)=H(X)+H(Y)+H(Z)-H(XYZ) \qquad (15)$$

ここで(14)式について、X或いはYのどちらかの確率分布が（1,0,…,0）とすれば、

$$H(X)+H(Y)-H(XY) \rightarrow H(X)\mathrm{or}H(Y)$$

(15)式について、Zの確率分布が（1,0,…,0）とすれば、

$$H(X)+H(Y)+H(Z)-H(XYZ) \rightarrow H(X)+H(Y)-H(XY)$$

すなわち、それぞれ単独事象や2次元複合事象の場合に還元される。

また、各事象の生起が全く他事象の生起に無関係なとき、（1）の場合

$$H(X)+H(Y) = H(XY) \qquad (16)$$

（2）の場合

$$H(X)+H(Y)+H(Z) = H(XYZ) \qquad (17)$$

が成立するので、システム情報量は零となる。

単独事象の場合、システムとは言えないがその事象が常に生起することとなるので、

$$H(X) = 0$$

となり、システム情報量としての一貫性が保たれている。

4．システム情報量に関する考察

2次元の場合、システム情報量は相互情報量と同じ形式であり、解析も十分なされ、問題はない。ところが、3次元の場合応用面の関心がなかったためか、前述したようにVENN図から類推されるような形で相互情報量が定義されているに過ぎない。一般に、多次元については殆ど検討されていない。そこで、システム情報量によって3次元以上の場合にも解析し易くすることを考えている。

さて、(15)式には2事象間の関係を示す情報が含まれている。実際、社員構成システムについて計算すると、0.16が得られる。これから、サブシステムにあたる2者間のシステム情報量（前出）の合計　0.03+0.08+0.02 = 0.13を差し引いた 0.03 が3事象間だけの同時システム情報量になるので次式が得られる。

3次元システム情報量＝3種類の2次元システム情報量の和＋3次元同時システム情報量　(18)

上式の右辺第2項は、3次元相互情報量の符号を反転したものである。

3次元相互情報量を定義する(10)式のもうひとつの問題点は、2次元相互情報量との連続性がないことである。すなわち、(10)式でZの確率分布が（1,0,…,0）とすると、

$$H(XYZ) \rightarrow H(XY),\ H(Z) \rightarrow 0,\ H(YZ) \rightarrow H(Y)$$
$$H(ZX) \rightarrow H(X)$$

であるから、(10)式は零となり、2次元相互情報量を与える式（4)と同じにはならない。

この原因は、VENN図の錯誤にあり、2次元の場合たまたま I(A;B) をうまく説明している（図2）が、H(A)やH(B)がこの図に描かれているように重畳しているかどうか不明である。したがって、VENN図による理解は便宜的なものであり、3次元複合事象に応用することはできない。

これにたいし、システム情報量は次の模擬的な図10、11の概念から得られる。

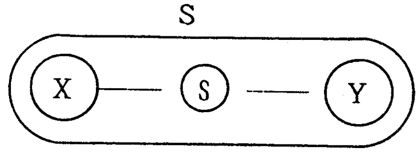


図10　2次元複合事象システム

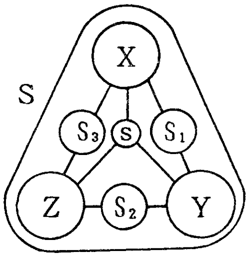


図１１　３次元複合事象システム

これらの図で、s, s_1, s_2, s_3 はその両端間の事象を結び付ける相補的分枝構造を意味している。

図１０について簡単に説明すると、システムSの中にはXやYの単独のエントロピーとXYの同時エントロピーが存在しており、前２者の和から後者を差し引いた値がX，Y間の関係のみに対応する情報エントロピーとなるのである。

５．多次元複合事象システム

４次元の場合も、同様な考え方を適用するとシステム情報量は次式で与えられる。

$$S(X:Y:Z:W)=H(X)+H(Y)+H(Z)+H(W)-H(XYZW) \tag{19}$$

多次元に拡張すれば、

$$S(X_1;X_2;\cdots;X_n)=\sum_{i=1}^{n} H(X_i)-H(X_1X_2\cdots X_n) \tag{20}$$

そしてこの式には、２次元からN次元に至る諸々のシステムの情報量が含まれている。

６．おわりに

本論文では、情報がシステムの構造に依存し、情報量を求めるにはシステム上に生起する事象間の関係を知る必要があることを述べた。それらの事象が確率的現象であるならばその関係は、相補的分枝構造で表せることとその構造を代表する数値としてシステム情報量を提案した。

単独事象及び２次元複合事象の場合、システムとしての特別な性質をもたないので、従来の結果と変わらないが、新しい観点に基づいて説明した。３次元以上になると、３事象間の複雑な関連が出てくるので、新しい概念であるシステム情報量によって、その性質を全体として把握するのが望ましいことを主張した。これにより、システムの性質についてどんな新しい知見が得られるかは次の課題である。例えば、マーケティングチャネルのモデル構築と情報ネットワークの解析がその対象であり、次の機会に報告したい。

－参考文献－

１）C. E. Shannon & W. Weaver:The Mathematical Theory of Communication, p. 125 University of Illinois Press (1963)

２）S. ゴールドマン，関訳：情報理論 p. 390 近代科学社(1956)

３）N. アブラムソン，宮川訳：情報理論入門 p. 229, 好学社 (1969)

４）T. M. Cover&J. A. Thomas:Elements of Information Theory, p. 542, John Wiley & Sons, INC. (1991)

５）古閑：相補的分枝構造を有する状態変換システムの性質，情報処理学会九州支部研究会報告，pp. 92-101 (1995/2)

付記「情報エントロピー計算の簡略化」

本文に述べたシステム情報量を計算するには、以下にあげる公式を使うと便利である。

$$H(p_1, p_2 \cdots, p_n)=H(P, p_{k+1}\ p_{k+2}, \cdots\ p_n)+P\ H(p_1/P, p_2/P\ \cdots\ p_k/P) \tag{21}$$

ただし $P=p_1+p_2+\cdots+p_k$ 、上式を繰り返し適用することによって

$$\begin{aligned}H(p_1, p_2 \cdots, p_n)=&(p_1+p_2)H(p_1/(p_1+p_2), p_2/(p_1+p_2))\\&+(p_1+p_2+p_3)H((p_1+p_2)/(p_1+p_2+p_3), p_3/(p_1+p_2+p_3))\\&\vdots\\&+(p_1+p_2\cdots+p_n)H((p_1+p_2\cdots+p_{n-1})/(p_1+p_2\cdots+p_n), p_n/(p_1+p_2\cdots+p_n))\end{aligned} \tag{22}$$

ただし $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$、特殊な場合として $H(p_1, p_1\cdots p_1, p_2)=H(np_1, p_2)+np_1 \mathrm{Log}\ n$　(23)

以上から H(x, 1-x) の値さえわかれば、一般的な計算ができるので、その表を次に掲げる。
但し、紙面の都合でxが 0.36 から0.50にいたる部分は省略した。

付表　情報エントロピー計算表

x ＼ Δx	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0.01	0.0808	0.0874	0.0938	0.1001	0.1063	0.1124	0.1184	0.1242	0.1301	0.1358
0.02	0.1414	0.1470	0.1525	0.1580	0.1633	0.1687	0.1739	0.1791	0.1843	0.1894
0.03	0.1944	0.1994	0.2043	0.2092	0.2141	0.2189	0.2236	0.2284	0.2330	0.2377
0.04	0.2423	0.2469	0.2514	0.2559	0.2603	0.2648	0.2692	0.2735	0.2778	0.2821
0.05	0.2864	0.2906	0.2948	0.2990	0.3032	0.3073	0.3114	0.3154	0.3195	0.3235
0.06	0.3274	0.3314	0.3353	0.3392	0.3431	0.3470	0.3508	0.3546	0.3584	0.3622
0.07	0.3659	0.3696	0.3733	0.3770	0.3807	0.3843	0.3879	0.3915	0.3951	0.3986
0.08	0.4022	0.4057	0.4092	0.4127	0.4161	0.4196	0.4230	0.4264	0.4298	0.4331
0.09	0.4365	0.4398	0.4431	0.4464	0.4497	0.4529	0.4562	0.4594	0.4626	0.4658
0.10	0.4690	0.4722	0.4753	0.4784	0.4815	0.4846	0.4877	0.4908	0.4939	0.4969
0.11	0.4999	0.5029	0.5059	0.5089	0.5119	0.5148	0.5178	0.5207	0.5236	0.5265
0.12	0.5294	0.5322	0.5351	0.5379	0.5408	0.5436	0.5464	0.5492	0.5519	0.5547
0.13	0.5574	0.5602	0.5629	0.5656	0.5683	0.5710	0.5737	0.5763	0.5790	0.5816
0.14	0.5842	0.5869	0.5895	0.5920	0.5946	0.5972	0.5997	0.6023	0.6048	0.6073
0.15	0.6098	0.6123	0.6148	0.6173	0.6198	0.6222	0.6247	0.6271	0.6295	0.6319
0.16	0.6343	0.6367	0.6391	0.6414	0.6438	0.6461	0.6485	0.6508	0.6531	0.6554
0.17	0.6577	0.6600	0.6632	0.6645	0.6668	0.6690	0.6712	0.6735	0.6757	0.6779
0.18	0.6801	0.6823	0.6844	0.6866	0.6887	0.6909	0.6930	0.6952	0.6973	0.6994
0.19	0.7015	0.7036	0.7056	0.7077	0.7098	0.7118	0.7139	0.7159	0.7179	0.7199
0.20	0.7219	0.7219	0.7239	0.7259	0.7279	0.7299	0.7318	0.7338	0.7352	0.7376
0.21	0.7415	0.7434	0.7453	0.7472	0.7491	0.7509	0.7528	0.7547	0.7565	0.7583
0.22	0.7602	0.7620	0.7638	0.7565	0.7674	0.7692	0.7710	0.7727	0.7745	0.7763
0.23	0.7780	0.7798	0.7815	0.7832	0.7849	0.7866	0.7883	0.7900	0.7917	0.7934
0.24	0.7950	0.7967	0.7984	0.8000	0.8016	0.8033	0.8049	0.8065	0.8081	0.8097
0.25	0.8113	0.8129	0.8144	0.8160	0.8176	0.8191	0.8207	0.8222	0.8237	0.8252
0.26	0.8267	0.8283	0.8297	0.8312	0.8327	0.8342	0.8357	0.8386	0.8400	0.8415
0.27	0.8415	0.8429	0.8443	0.8457	0.8471	0.8485	0.8499	0.8513	0.8527	0.8541
0.28	0.8555	0.8568	0.8582	0.8595	0.8608	0.8622	0.8635	0.8648	0.8661	0.8674
0.29	0.8687	0.8700	0.8713	0.8726	0.8738	0.8751	0.8763	0.8776	0.8788	0.8801
0.30	0.8813	0.8825	0.8837	0.8849	0.8861	0.8873	0.8885	0.8897	0.8909	0.8920
0.31	0.8932	0.8943	0.8955	0.8966	0.8977	0.8989	0.9000	0.9011	0.9022	0.9033
0.32	0.9044	0.9055	0.9065	0.9076	0.9087	0.9097	0.9108	0.9118	0.9129	0.9139
0.33	0.9149	0.9159	0.9170	0.9180	0.9190	0.9200	0.9209	0.9219	0.9229	0.9239
0.34	0.9248	0.9258	0.9267	0.9277	0.9286	0.9295	0.9304	0.9314	0.9323	0.9332
0.35	0.9341	0.9350	0.9358	0.9367	0.9376	0.9385	0.9393	0.9402	0.9410	0.9418