社団法人　情報処理学会　研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2005－FI－78（2）
2005－DD－49（2）
2005／3／25

ユークリッド距離による灰色関連測度の提案

山口 大輔 † 李 国棟 † 水谷 晃三 † 永井 正武 †

Deng の提案した灰色分析は，データ間の距離を正規化し灰色関連度という新しい評価基準を設けた点で重要な分析法である。しかし，灰色分析の計算式における弁別係数の物理的意味と工学適用時の必要性の議論および灰色関連マトリクスが非対称行列であることの工学的有効性についての議論が活発ではない。本論文ではこれら 2 点を指摘した上で，距離計算にユークリッド距離を導入した灰色関連測度を提案する。本提案灰色分析の特徴は，灰色関連度の特性が線形に近いこと，灰色関連マトリクスが対称行列となること，弁別係数を異常値発見に寄与していることの 3 点である。簡単な数値例に灰色分析を適用し，従来の手法との相違点について議論する。

New Grey Relational Measurement using Euclidean Distance

Daisuke YAMAGUCHI† Guo-Dong LI† Kozo MIZUTANI† Masatake NAGAI†

Grey relational analysis which proposed by Deng, is an important method as value of distance between each data is converted into the grey relational grade. However, discussion on distinguish coefficient of traditional method and asymmetric grey relational matrix is not sufficient. This paper proposes new grey relational measurement which used Euclidean distance. Proposed method has 3 features, which are that a characteristic of grey relational grade has nearly liner, the grey relational matrix is symmetrical, and an outlier is found by distinguish coefficient. Numerical example is given for traditional method and proposed one. We discuss a difference between each method.

1. はじめに

筆者らは以前に灰色理論 [1, 2, 3] による階層的クラスター分析法 [5] を提案した。このアルゴリズムは，灰色分析 [2, 3] で得られる灰色関連度，すなわち類似度の値を参照しながら樹形図 (dendrogram) を構築する方法である。

伝統的な階層的分類法では，類似行列にユークリッド距離を使用している。各サンプルに対してユークリッド距離計算を行うため，類似行列は対称行列となる。ところが，伝統的な灰色分析で得られる類似行列（以下，灰色関連マトリクスと呼ぶ）は非対称行列である。なぜならば，伝統的な灰色分析では全体性という公理 [1] が成立することを前提としている。文献 [5] では灰色関連マトリクスの対称成分について平均値を算出することで，灰色関連マトリクスを対称行列とみなしていた。

伝統的な灰色分析は各数列の類似度を [0,1] で与えること，基準値に対する順序を各数列に与える点で優れた分析法である。灰色関連マトリクスが非対称行列であっても，上記に示した方法で樹形図を得ることはできる。しかし，灰色関連マトリクスが非対称行列であることの有効性についてはこれまであまり議論がされていない。

灰色分析では弁別係数 ζ により灰色関連度の特性を変化させることができる。しかし，灰色分析を工学適用する際，灰色関連度の特性を変えることの物理的意味とその必要性の議論が活発ではない。そのため，ζ は固定値として利用されているのが現状である。

本論文では伝統的な灰色分析法における上記 2 つの課題について議論を行い，それらの改善方法として新しい灰色関連測度を提案する。本論文で複数の定義と定理を示し，定理についてはその証明を与える。これらの定理から本提案の灰色関連測度の性質を整理する。さらに，伝統的な灰色分析法と本提案分析法について灰色関連度の特性を比較し，弁別係数 ζ についても議論する。

2. 伝統的な灰色関連測度の課題

2.1 伝統的な灰色分析のアルゴリズム

灰色関連空間 $\{P(X);\Gamma\}$ において，

$$x_i = \{x_i(1), x_i(2), \cdots, x_i(n)\} \in X \quad (1)$$
$$i, j = 0, 1, \cdots, m; m \geq 2$$

となるサンプル（以下，数列と呼ぶ）について灰色分析を行うとする。灰色関連度 Γ_{ij} は数列 x_i, x_j 間の類似度であり，$\Gamma_{ij} \to 1$ であるほど数列 x_i, x_j は類似していることを表す値である。伝統的な灰色分析は因子 $k(k = 1, 2, \cdots, n)$ における局所的な類似度（灰色関連係数と呼ぶ）を評価し，それらの平均を総合的な類似度とするアルゴリズムである。

† 帝京大学大学院理工学研究科，Graduate School of Sciense and Engineering, Teikyo University

灰色理論を提唱した Deng[1] は，Γ_{ij} の算出過程において灰色関連係数 $\gamma\left(x_i(k), x_j(k)\right)$ を

$$\gamma\left(x_i(k), x_j(k)\right)=\frac{\Delta_{\min}+\zeta\Delta_{\max}}{\Delta_{ij}(k)+\zeta\Delta_{\max}} \tag{2}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta_{ij}(k)=\left|x_i(k)-x_j(k)\right| \\ \Delta_{\max}=\max_{\forall j}\max_{\forall k}\left\{\Delta_{ij}(k)\right\} \\ \Delta_{\min}=\min_{\forall j}\min_{\forall k}\left\{\Delta_{ij}(k)\right\} \\ \zeta=0.5\end{array}\right\} \tag{3}$$

と定義している。ζ は弁別係数と呼ばれており，Deng は $\zeta\in[0,1]$ としている。そして，灰色関連度 Γ_{ij} を

$$\Gamma_{ij}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\gamma\left(x_i(k), x_j(k)\right) \tag{4}$$

により計算する。Deng の貢献は，式 (2) の計算により距離の値を [0,1] に正規化し，灰色関連度という新しい値を提唱したことである。

2.2 数値例を用いた弁別係数 ζ の議論

式 (2) 中の弁別係数 ζ の値について Wong ら [4] は以下の点を指摘している。$\zeta\to 1$ とすると灰色関連係数 $\gamma\left(x_i(k), x_j(k)\right)$ の取りえる区間は狭くなる。そのため，$\gamma\left(x_i(k), x_j(k)\right)$ のばらつきが小さくなり，数列間における灰色関連係数の違いが不明確になる。改善案として，Wong らは

$$\gamma\left(x_i(k), x_j(k)\right)=\left(\frac{\Delta_{\max}-\Delta_{ij}(k)}{\Delta_{\max}-\Delta_{\min}}\right)^{\zeta} \tag{5}$$

という計算式を文献 [4] にて提案している。しかし，$\zeta(\zeta\in(0,\infty))$ を調節することの意味と必要性の議論がなされていない。

このほか，新しい灰色関連係数の計算式が Wu, Wen らからも提案されている [2]。文献 [2] についても ζ の工学適用の必要性については触れられていない。また，これまで提案された計算式はすべて全体性の公理が成立する。この議論は次節にて行う。

Deng,Wong らの式に数値例を適用し，灰色関連度と ζ の関係について考察する。数値例として，**表 1** に示すデータに伝統的な灰色分析を適用する。

表 1 は，日本の全世帯を対象とした 1 世帯あたりの各項目 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$ における支出金額である。本数値例は因子として，2000 年から 2003 年までのデータを用いる ($n=4$)。各データはあらかじめ [0,1] に規格化してあり，評価基準 x_0 は各因子の最大値とする。x_0 を基準数列として灰色分析すると，x_0 に近い，すなわち合計支出額の降順に項目が整列される。弁別係数は $\zeta=0.1,0.5,1,2,5$ とし，5 種類を用いた分析結果を比較する。

Deng の式 (2) を用いて灰色分析を行ったところ，**図 1**に示す結果が得られている。**図 2**は同じ数値例に Wong らの式 (5) を適用した分析結果である。図 1 に比べて図 2 の灰色関連度はややばらつきがあることが認められる。図 1 および図 2 から，伝統的灰色分析における ζ は灰色関連度のとり得る区間を調節する役割を果たす。ただし，Wong らの指摘は灰色関連係数 $\gamma\left(x_i(k), x_j(k)\right)$ の特性であって，灰色関連度 Γ の特性ではない。灰色関連係数の計算で特性を変換しても，その後の相加平均により灰色関連度の特性はもう一度変化する。図 2 において，項目 2 から 6 における灰色関連度のばらつきは，図 1 と相違がないようにも見える。

表 1 日本国民 1 世帯当たりの正規化済み支出額

	2000	2001	2002	2003	合計
x_0（評価基準）	1.000	1.000	1.000	1.000	4.000
x_1 家賃	1.000	1.000	1.000	1.000	4.000
x_2 旅費	0.665	0.661	0.608	0.580	2.513
x_3 外食（酒なし）	0.600	0.599	0.565	0.522	2.287
x_4 水道光熱費	0.433	0.421	0.427	0.431	1.711
x_5 交通費	0.343	0.316	0.326	0.306	1.291
x_6 飲酒	0.254	0.262	0.287	0.239	1.043
x_7 保険医療費	0.111	0.118	0.117	0.143	0.487

データ出典：総務省統計局 (http://www.stat.go.jp/data/soutan/1.htm)

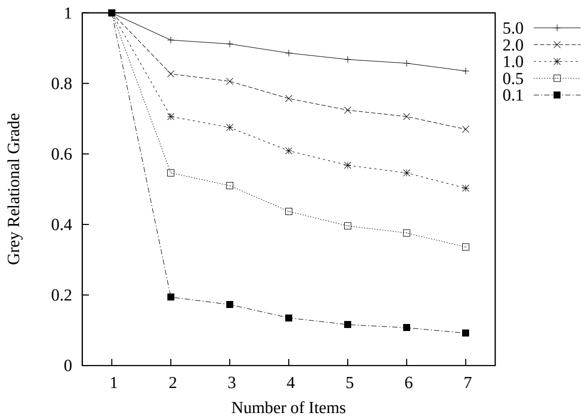

図 1 Deng の式 (2) による灰色関連度の特性

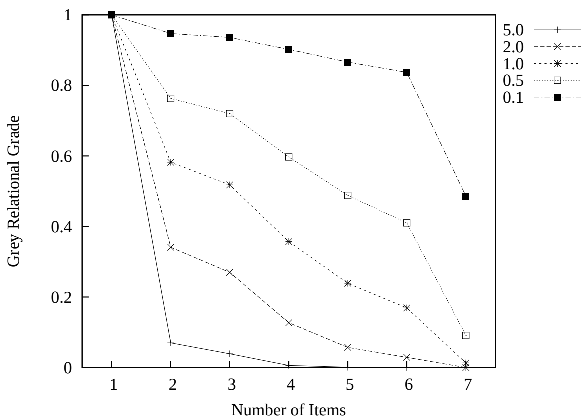

図 2 Wong らの式 (5) による灰色関連度の特性

2.3　灰色関連マトリクスの問題点と改善案

Deng，Wong らによって提案されている灰色関連係数の計算式はいずれも規範性，偶対対称性，全体性，接近性という 4 つの公理 [2, 3] を満足する。しかし，上記の 4 つの公理の中，全体性が以下に示す問題を抱えている。

灰色関連係数の全体性という公理は，

$$\gamma\left(x_i, x_j\right) \overset{\text{often}}{\neq} \gamma\left(x_j, x_i\right) \tag{6}$$

となっている。灰色関連係数が異なる場合，通常灰色関連度は $\mathit{\Gamma}_{ij} \neq \mathit{\Gamma}_{ji}$ となる。これは，A と B は似ているが B と A は似ているとは限らないことを表す。

数値例を用いて上記の内容を説明する。説明を簡単にするため，表 1 のデータのうち，x_1, x_2, x_3 を用いて灰色関連マトリクスを構築する。Deng による伝統的な灰色関連マトリクス $R_{3\times3}$ は

$$\begin{aligned} R_{3\times3} &= \begin{bmatrix} \mathit{\Gamma}_{11} & \mathit{\Gamma}_{12} & \mathit{\Gamma}_{13} \\ \mathit{\Gamma}_{21} & \mathit{\Gamma}_{22} & \mathit{\Gamma}_{23} \\ \mathit{\Gamma}_{31} & \mathit{\Gamma}_{32} & \mathit{\Gamma}_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1.000 & 0.393 & 0.359 \\ 0.363 & 1.000 & 0.788 \\ 0.359 & 0.809 & 1.000 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7}$$

と得られる。

式 (7) において $\mathit{\Gamma}_{12} \neq \mathit{\Gamma}_{21}, \mathit{\Gamma}_{23} \neq \mathit{\Gamma}_{32}$ であるから全体性は成立している。ユークリッド距離による非類似行列や相関行列は通常対称行列となるに対し，式 (7) は非対称となっている。クラスター分析をはじめとする工学手法を適用する際，式 (7) が非対称行列であっても有効な処理が実現可能であるには根拠を示す必要がある。ところが全体性を公理としているため，この点についての議論は少ないのが現状である。

条件式 (6) が成立するのは，灰色関連係数を計算する前の距離計算に起因する。**図 3**は表 1 に示す例における距離計算式 (3) のイメージである。x_1 を基準値として計算したとき，$\Delta_{\max} = \Delta_{13}(4) = 0.478$ である。一方，x_2 を基準値として計算したとき，$\Delta_{\max} = \Delta_{21}(4) = 0.42$ となる。全体性が成立するのは，$\gamma\left(x_i, x_j\right), \gamma\left(x_j, x_i\right)$ を計算するのにそれぞれ異なる $\Delta_{\max}$ を使用しているためである。この計算により得られる誤差は工学適用上問題である。

Deng が提案した距離は式 (3) に示す値であり，これをノルムと定義している [2]。通常，ノルムはベクトル空間上の距離である。しかしながら，式 (3) は明らかにスカラーによる数直線上の距離である。

ベクトル空間上の距離によるノルムを採用した場合，表 1 の数値例では**図 4**に示すような距離計算となる。Δ_{ij} の計算式にベクトル距離計算を導入すれば，基準数列が変わっても $\Delta_{\max}, \Delta_{\min}$ は常に等しくなる。ゆえに，類似行列は対称行列となり，全体性によらない新しい灰色関連測度を提案することができる。本論文では，以上の展開からユークリッド距離型灰色関連測度を提案する。

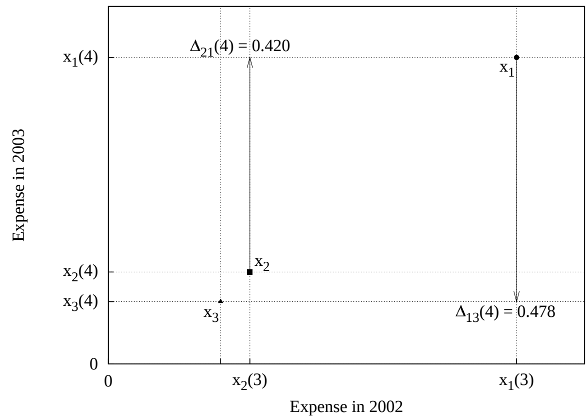

図 3 伝統的な灰色分析における距離計算

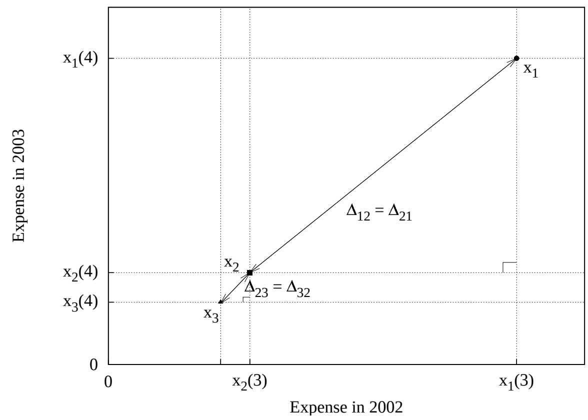

図 4 ユークリッド距離を適用したときの距離計算

3.　ユークリッド距離型灰色関連測度の提案

3.1　ノルムの再定義

灰色関連度の計算をベクトル空間によるユークリッド距離で表すため，本論文は伝統的な灰色分析で使われている評価基準値を再定義する。数列 $x_i, x_j (i, j = 1, 2, \cdots, m)$ 間におけるユークリッド距離の計算に向けて

$$\begin{gathered} \delta_{0i}(k) = |x_0(k) - x_i(k)| \\ k = 1, 2, \cdots, n; x_0, x_i \in X \end{gathered} \tag{8}$$

という $\delta_{0i}(k)$ を導入する。式 (8) は局部型灰色分析における値である。全体型灰色分析では，

$$\begin{gathered} \delta_{ij}(k) = |x_i(k) - x_j(k)| \\ k = 1, 2, \cdots, n; x_i, x_j \in X \end{gathered} \tag{9}$$

となる。式 (8)，式 (9) は伝統的な灰色分析における $\Delta_{0i}(k), \Delta_{ij}(k)$ と同じ計算式である。式 (9) から，δ の性質について 3 つの重要な定義を整理する。

定義 1. 数列 x_i 自身の差は，式 (9) から明らかなように，

$$\delta_{ii}(k) = 0 \quad \text{for all } k \tag{10}$$

である。

定義 2. 数列 x_i, x_j が $x_i = x_j$ であれば，式 (9) より，

$$\delta_{ij}(k) = \delta_{ji}(k) = 0 \quad \text{for all } k \tag{11}$$

である。

定義 3. 数列 x_i, x_j が $x_i \neq x_j$ であれば，式 (9) より，

$$\begin{aligned} \delta_{ij}(k) &= \delta_{ji}(k) \quad \text{for all } k & (12) \\ (\delta_{ij}(k))^{\zeta} &= (\delta_{ji}(k))^{\zeta} & (13) \end{aligned}$$

である ($\zeta \geq 1$)。

上記に示した δ から，Δ という値を定義する。

定義 4. 局部型灰色分析における数列 x_0, x_i 間の距離（空間）は，

$$\begin{aligned} \Delta_{0i} &= \left(\sum_{k=1}^{n} (\delta_{0i}(k))^{\zeta} \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_0(k) - x_i(k)|^{\zeta} \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ &= ||x_0 - x_i||_{\zeta} & (14) \\ 0 &\leq \Delta_{0i} \end{aligned}$$

である。

定義 5. 全体型灰色分析における数列 x_i, x_j 間の距離（空間）は，

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^{n} (\delta_{ij}(k))^{\zeta} \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} |x_i(k) - x_j(k)|^{\zeta} \right)^{\frac{1}{\zeta}} \\ &= ||x_i - x_j||_{\zeta} & (15) \\ 0 &\leq \Delta_{ij} \end{aligned}$$

である。

Δ_{0i}, Δ_{ij} はベクトル空間におけるノルム (Norm) であり，$\zeta = 2$ のときユークリッドノルム，すなわちユークリッド距離である。ζ の値は不等式

$$||x_i + x_j||_{\zeta} \leq ||x_i||_{\zeta} + ||x_j||_{\zeta} \quad \text{for all } i, j \tag{16}$$

を満たすことが条件となる。

ここで，ζ の物理的意味について筆者らの考察を与える。式 (14) および式 (15) において $\zeta \to \infty$ とすると，$\zeta = 2$ と比較した場合 Δ_{ij} の値は増幅される。距離は別の表現を用いると誤差である。つまり，本提案灰色分析における ζ は基準数列と各比較数列における誤差を増幅させる係数であり，異常値を見つける役割を担っていると筆者らは考える。

Δ_{ij} の性質について，次の 3 つの重要な定義を整理する。

定義 6. 数列 x_i 自身のノルムは，定義 1 中の式 (10) および定義 5 中の式 (15) から，

$$\Delta_{ii} = ||x_i - x_i||_{\zeta} = 0 \tag{17}$$

である。

定義 7. 定義 2 により，数列 x_i, x_j が $x_i = x_j$ であれば，定義 5 中の式 (15) より，

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = 0 \quad \text{if } x_i = x_j \tag{18}$$

である。

定義 8. 定義 3 により，数列 x_i, x_j が $x_i \neq x_j$ であれば，定義 5 中の式 (15) より，

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} \quad \text{if } x_i \neq x_j \tag{19}$$

である。

定義 4 および定義 5 で示したノルムの値は線形代数の形式で整理することができる。

定義 9. 定義 4 より，式 (14) で得られたノルム Δ_{0i} はベクトル $\boldsymbol{q}_0$ により，

$$\boldsymbol{q}_0 = [\Delta_{01}, \Delta_{02}, \cdots, \Delta_{0m}] \tag{20}$$

と表すことができる。式 (20) を灰色ノルムベクトル (Grey Norm Vector) と定義する。

定義 10. 定義 5 より，式 (15) で得られたノルム Δ_{ij} は行列 Q により，

$$Q = \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1 \\ \boldsymbol{q}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{q}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \cdots & \Delta_{1m} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \cdots & \Delta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{m1} & \Delta_{m2} & \cdots & \Delta_{mm} \end{bmatrix} \tag{21}$$

と表すことができる。式 (21) を灰色ノルム行列 (Grey Norm Matrix) と定義する。

式 (21) は $\zeta = 2$ ならばユークリッド距離による類似行列である。Q に備わっている重要な性質を定理として整理する。

定理 1. 行列 Q は対角成分を全て 0 とする対称行列である。

証明. 定義 6 より，$i = 1, 2, \cdots, m$ における対角成分は $\Delta_{ii} = 0$ である。また，定義 8 より，$i = 1, 2, \cdots, m$ における対称成分は $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$ である。ゆえに，Q は対称行列である。 □

3.2　ユークリッド距離型灰色関連度の提案

灰色関連度の計算は，距離の値を $[0,1]$ の閉区間に正規化する点で重要である。なぜならば，[0,1] に収めることは値の取り扱いを容易にするという利点がある。本論文ではユークリッド空間で値の取り扱いが可能なノルムによる灰色関連度 (Grey Relational Grade) の式を定義する。Q の導出により，図 4 に示す距離空間をすでに構築している。局部型灰色関連度の計算式から，全体型灰色関連度の式に新提案を行う。

定義 11. 局部型灰色関連度を γ_{0i} とすれば，算出式は

$$\gamma_{0i} = \frac{\Delta_{\max} - \Delta_{0i}}{\Delta_{\max} - \Delta_{\min}} \tag{22}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_{\max} = \max_{\forall i}\{\Delta_{0i}\} \\ \Delta_{\min} = \min_{\forall i}\{\Delta_{0i}\} \end{array}\right\}$$

である。

定理 2. 全体型灰色関連度を γ_{ij} とすれば，算出式は，

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= 1 - \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{\max}} \\ \Delta_{ij} &= \max_{\forall i}\max_{\forall j}\{\Delta_{ij}\} \end{aligned} \tag{23}$$

と導出することができる。

証明. 全体型灰色関連度の計算式は，式 (22) より，

$$\gamma_{ij} = \frac{\Delta_{\max} - \Delta_{ij}}{\Delta_{\max} - \Delta_{\min}} \tag{24}$$

と定義することができる。定理 1 から $\Delta_{\min}$ は

$$\begin{aligned} \Delta_{\min} &= 0 \\ \because \Delta_{\min} &= \min_{\forall i}\min_{\forall j}\{\Delta_{ij}\} = \Delta_{ii} = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

である。式 (25) を式 (24) に代入すると，

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{\Delta_{\max} - \Delta_{ij}}{\Delta_{\max}} \\ &= \frac{\Delta_{\max}}{\Delta_{\max}} - \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{\max}} \\ &= 1 - \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{\max}} \end{aligned} \tag{26}$$

となる。 □

式 (23) は Hsia ら [6] により類似した式が報告されている。しかし，Hsia らの式は灰色分析を行うための前処理であり，式 (23) とは別の意味で使われている。

式 (22) および式 (23) に示す γ_{0i} と γ_{ij} は，伝統的な灰色分析法で得られる灰色関連度と同等の意味を持つ値である。両者の値を線形代数形式で整理する。

定義 12. 定義 11 より，式 (22) で算出した灰色関連度 γ_{0i} はベクトル $\boldsymbol{\gamma}_0$ により，

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = [\gamma_{01}, \gamma_{02}, \cdots, \gamma_{0m}] \tag{27}$$

と表すことができる。式 (27) を灰色関連ベクトル (Grey Relational Vector) と定義する。

定義 13. 定理 2 より，式 (23) で算出した灰色関連度 γ_{ij} は行列 $\mathit{\Gamma}$ により，

$$\mathit{\Gamma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \boldsymbol{\gamma}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mm} \end{bmatrix} \tag{28}$$

と表すことができる。式 (28) を灰色関連マトリクス (Grey Relational Matrix) と再定義する。

本論文で提案する灰色関連マトリクスは次の性質を備えている。

定理 3. 行列 $\mathit{\Gamma}$ は対角成分を全て 1 とする対称行列である。

証明. 定理 1 より，行列 Q の対角成分は $\Delta_{ii} = 0$ であるから，γ_{ii} の値は式 (23) により，

$$\begin{aligned} \gamma_{ii} &= 1 - \frac{0}{\Delta_{\max}} \\ &= 1 \end{aligned} \tag{29}$$

である。また，定理 1 より

$$\begin{gathered} \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{\max}} = \frac{\Delta_{ji}}{\Delta_{\max}} \\ \because \Delta_{ij} = \Delta_{ji} \end{gathered} \tag{30}$$

であるから式 (23) の計算により $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$ となる。ゆえに，$\mathit{\Gamma}$ は対称行列である。 □

上記に示した多数の式を誘導することにより，対称行列となる灰色関連マトリクスを提案する。

3.3　本提案灰色関連測度の性質

本論文で提案する灰色関連測度は，伝統的な灰色分析とほぼ同じ性質を備える。以下にその性質を示し，証明を与える。特に，全体性とは異なる新しい性質について証明を与え，ユークリッド距離型灰色関連測度を提案する。

はじめに，局部型灰色関連度の性質を述べる。証明の展開を簡略にするため，式 (22) は

$$\gamma_{0i} = f(\Delta_{0i}) \tag{31}$$

とする。

定理 4. 本論文で提案する局部型灰色関連度は，規範性

$$0 \le \gamma_{0i} \le 1 \quad \text{for all } i \tag{32}$$

を満足する。

証明. 局部型灰色分析におけるノルムは，定義4より $0 \leq \Delta_{0i}$ である。ただし，定義11に示す $\Delta_{\max}, \Delta_{\min}$ を考慮すると，

$$0 \leq \Delta_{\min} \leq \Delta_{0i} \leq \Delta_{\max} \tag{33}$$

である。ここで，式 (31) により

$$f(\Delta_{\max}) = \frac{\Delta_{\max} - \Delta_{\max}}{\Delta_{\max} - \Delta_{\min}} = 0 \tag{34}$$

$$f(\Delta_{\min}) = \frac{\Delta_{\max} - \Delta_{\min}}{\Delta_{\max} - \Delta_{\min}} = 1 \tag{35}$$

である。つまり，式 (33) から

$$\begin{aligned} \Delta_{\min} &\leq \Delta_{0i} \leq \Delta_{\max} \\ &\Leftrightarrow f(\Delta_{\max}) \leq f(\Delta_{0i}) \leq f(\Delta_{\min}) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \gamma_{0i} \leq 1 \end{aligned} \tag{36}$$

となる。 □

定理 5. 本論文で提案する局部型灰色関連度は，離反性

$$\Delta_{0i} = \Delta_{\max} \Leftrightarrow \gamma_{0i} = 0 \tag{37}$$

および接近性

$$(x_0 \neq x_i \vee \Delta_{0i} = \Delta_{\min}) \Leftrightarrow \gamma_{0i} = 1 \tag{38}$$

を満足する。

証明. 定理4を証明中の式 (34) により，真理値関数式 (37) は成立する。式 (33) の関係から，$\Delta_{\min} \neq 0$ となる Δ_{0i} が存在する。言い換えれば，$x_0 \neq x_i$ であっても $\Delta_{0i} = \Delta_{\min}$ であれば式 (35) により $\gamma_{0i} = 1$ となる。ゆえに，真理値関数式 (38) は成立する。真理値表を**表 2**に示す。 □

定理4，定理5は局部型灰色分析にとって重要な性質である。規範性は，灰色関連度 γ_{0i} が必ず 0,1 の実数範囲内に収まることを保証している。接近性は，$\Delta_{\min}$ となる数列 x_i は関連度が1になることを示している。また，離反性は $\Delta_{\max}$ となる数列 x_i は関連度が必ず0になることを示している。

局部型灰色関連度だけでなく，全体型灰色関連度においても重要な性質がある。灰色関連度の式 (23) は証明を行うために

$$\gamma_{ij} = f(\Delta_{ij}) \tag{39}$$

とおく。

定理 6. 本論文で提案する全体型灰色関連測度は，規範性

$$0 \leq \gamma_{ij} \leq 1 \quad \text{for all } i, j \tag{40}$$

を満足する。

証明. 定義5より $0 \leq \Delta_{ij}$ である。ただし，$\Delta_{\max}, \Delta_{\min}$ および式 (25) の条件を考慮すると，

$$0 = \Delta_{\min} \leq \Delta_{ij} \leq \Delta_{\max} \tag{41}$$

である。ここで，式 (39) により

$$f(\Delta_{\max}) = 1 - \frac{\Delta_{\max}}{\Delta_{\max}} = 0 \tag{42}$$

$$f(\Delta_{\min}) = f(0) = 1 - \frac{0}{\Delta_{\max}} = 1 \tag{43}$$

である。つまり，式 (41) から

$$\begin{aligned} \Delta_{\min} &\leq \Delta_{ij} \leq \Delta_{\max} \\ &\Leftrightarrow f(\Delta_{\max}) \leq f(\Delta_{ij}) \leq f(\Delta_{\min}) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \gamma_{ij} \leq 1 \end{aligned} \tag{44}$$

となる。 □

定理 7. 本論文で提案する全体型灰色関連度は，離反性

$$\Delta_{ij} = \Delta_{\max} \Leftrightarrow \gamma_{ij} = 0 \tag{45}$$

を満足する。

証明. 定理6を証明中の式 (42) により，直ちに式 (45) は成立する。 □

定理 8. 本論文で提案する全体型灰色関連度は，同一性

$$x_i = x_i \Leftrightarrow \gamma_{ii} = 1 \tag{46}$$

$$\big(x_i = x_j \Leftrightarrow \Delta_{ij} = \Delta_{\min}\big) \Leftrightarrow \gamma_{ij} = 1 \tag{47}$$

を満足する。

証明. 定義6および定理3証明中の式 (29) より，式 (46) は直ちに成立する。式 (47) を満たすには，左辺の真理関数が真でなければならない。定理2を証明中の式 (25) より，$\Delta_{\min} = 0$ である。つまり，真理関数 (47) を満たすには

$$x_i = x_j \Leftrightarrow \Delta_{ij} = 0 \tag{48}$$

が真でなければならない。ところで，定義7により真理関数 (48) は真となっている。つまり，式 (43) の計算により同一性を満足する。真理値表を**表 3**に示す。 □

定理 9. 本論文で提案する灰色関連測度は，対称性

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji} \quad \text{for all } i, j \tag{49}$$

を満足する。

証明. 定理3の証明により式 (49) はすでに成立している。つまり，対称性は成立する。 □

表 2 接近性の式 (38) を証明するための真理値表

$x_i \neq x_j$	$\Delta_{0i} = \Delta_{\min}$	$x_i \neq x_j \vee \Delta_{0i} = \Delta_{\min}$	$\gamma_{0i} = 1$	$(x_i \neq x_j \vee \Delta_{0i} = \Delta_{\min}) \Leftrightarrow \gamma_{0i} = 1$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	0
1	0	1	0	0
1	1	1	0	0
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	1	1
1	1	1	1	1

表 3 同一性の式 (47) を証明するための真理値表

$x_i = x_j$	$\Delta_{ij} = \Delta_{\min}$	$x_i = x_j \Leftrightarrow \Delta_{ij} = \Delta_{\min}$	$\gamma_{ij} = 1$	$(x_i = x_j \Leftrightarrow \Delta_{ij} = \Delta_{\min}) \Leftrightarrow \gamma_{ij} = 1$
0	0	1	0	0
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	1	1	1

表 4 本提案灰色関連測度の持つ性質

種類	名前	性質
局部型	規範性	$\gamma_{0i} \in [0,1]$
	離反性	$\Delta_{0i} = \Delta_{\max}$ であれば $\gamma_{0i} = 0$
	接近性	$\Delta_{0i} = \Delta_{\min}$ であれば $\gamma_{0i} = 1$
全体型	規範性	$\gamma_{ij} \in [0,1]$
	離反性	$\Delta_{ij} = \Delta_{\max}$ であれば $\gamma_{ij} = 0$
	同一性	$\gamma_{ii} = 1$,$x_i = x_j$ であれば $\gamma_{ij} = 1$
	対称性	$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$

規範性，離反性は，局部型灰色関連測度で示したそれらと同じ意味である。同一性は，数列 x_i 自身の灰色関連度は 1 であること，数列 x_i, x_j の持つ全因子が等しければ灰色関連度 $\gamma_{ij} = 1$ であることを示している。そして，式 (49) の対称性により，本論文の目的の 1 つである，対称行列となる灰色関連マトリクスを導出した。

まとめとして，本論文で提示した灰色関連測度の性質を**表 4**に示す。

4. 提案アルゴリズムの数値例の適用

4.1 本提案アルゴリズムの計算例

表 1 のデータを本提案アルゴリズムに適用する。Deng,Wong らの式の適用と同様に，x_0 を基準数列としたときの局部型灰色分析を行う。計算結果から，表 4 にて整理した性質を確認する。ただし，式 (14) および式 (22) において $\zeta = 2$ とする。ノルムの成立条件を満たしていることを事前に確認する。

1. ノルムベクトルの獲得

$$\begin{aligned}
\Delta_{01} &= \Big(|1-1|^2 + |1-1|^2 \\
&\quad + |1-1|^2 + |1-1|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0 \\
\Delta_{02} &= \Big(|1-0.665|^2 + |1-0.661|^2 \\
&\quad + |1-0.608|^2 + |1-0.580|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0.558 \\
&\vdots \\
\Delta_{07} &= \Big(|1-0.111|^2 + |1-0.118|^2 \\
&\quad + |1-0.117|^2 + |1-0.147|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \\
&= 3.085
\end{aligned}$$

2. 局部型灰色関連度の計算式を確立

$$\begin{aligned}
\Delta_{\max} &= \Delta_{07} = 3.085 \\
\Delta_{\min} &= \Delta_{01} = 0 \\
\gamma_{0i} &= \frac{3.085 - \Delta_{0i}}{3.085} = 1 - \frac{\Delta_{0i}}{3.085}
\end{aligned}$$

3. 局部型灰色関連度の計算

$$
\begin{aligned}
\gamma_{01} &= \frac{3.085-0}{3.085}=1\\
\gamma_{02} &= \frac{3.085-0.558}{3.085}=0.574\\
&\vdots\\
\gamma_{07} &= \frac{3.085-3.085}{3.085}=0
\end{aligned}
$$

計算結果によると，灰色関連度 γ_{0i} は [0,1] に収まっており規範性は満たしている。また，$\Delta_{\max}=\Delta_{07}$ の灰色関連度が 0 になっていること，$\Delta_{\max}=\Delta_{01}$ の灰色関連度が 1 になっていることから離反性・接近性も満たしている。

2.2 にて示した計算例と同様，x_1, x_2, x_3 だけを用いた全体型灰色分析の計算過程を示す。

1. 灰色ノルム行列の獲得

$$
\begin{aligned}
Q &= \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13}\\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23}\\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 0.000 & 0.747 & 0.859\\ 0.747 & 0.000 & 0.115\\ 0.859 & 0.115 & 0.000 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

2. 全体型灰色関連度の計算式を確立

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\max} &= \Delta_{13}=\Delta_{31}=0.859\\
\gamma_{ij} &= 1-\frac{\Delta_{ij}}{0.859}
\end{aligned}
$$

3. 全体型灰色関連度の計算

$$
\begin{aligned}
\mathit{\Gamma} &= \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13}\\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23}\\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix} 1.000 & 0.131 & 0.000\\ 0.131 & 1.000 & 0.866\\ 0.000 & 0.866 & 1.000 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

定理 1 にて示したように，Q は対角成分を 0 とする対称行列である。また，定理 3・規範性・離反性・同一性・対称性についても $\mathit{\Gamma}$ の成分により確認することができる。

4.2 弁別係数の議論

図 5は上記の数値例に対して $\zeta=1,2,5,10,30$ としたときの灰色関連度特性である。図 1 および図 2 との相違点は，ζ の値によらずほぼ同じ特性を持っていること，最大値を 1, 最小値を 0 とすることで灰色関連度の違いがより明白になっていることなどが挙げられる。したがって，Wong らの指摘を改善していると考えられる。

図 5 における $\zeta=30$ に着眼する（ノルムの条件は満たしている）。項目 2 および 3 のところだけ値の変動が認められる。上記の考察で触れたように，値の変動は誤差の増幅によるものである。表 1 によると，両者の項目は 2002，2003 年の支出額が以前に比べ減少していることがわかる。このように，本提案アルゴリズムでは従来の機能に加えて異常値の発見をサポートすることができる。

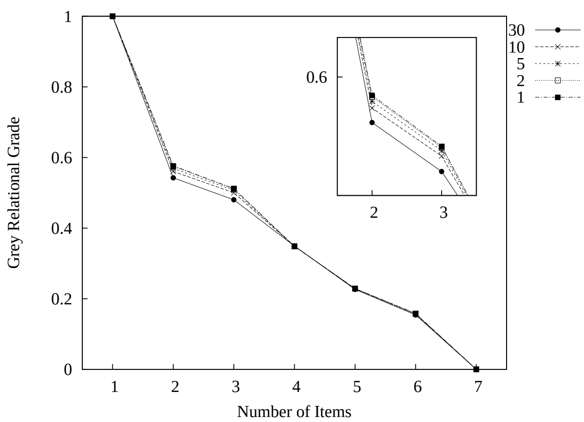

図 5 提案手法における ζ と灰色関連度の関係

5. おわりに

本論文は，伝統的な灰色分析の工学適用上において，①弁別係数 ζ の物理的意味と必要性，②全体性の公理と灰色関連マトリクスが非対称行列となる根拠，という 2 点を指摘した。両者の原因は従来の手法におけるアルゴリズムにあることを指摘し，本論文では改善案としてユークリッド距離型灰色関連測度を提案した。

本提案の灰色関連測度では複数の定義，定理，および性質を示した。本論文の提案で得られた結果として①弁別係数 ζ は誤差の値を調節し，異常値の発見に寄与する，②灰色関連マトリクスを対称行列とすることで，対称性という新しい性質を示した，の 2 点が挙げられる。

今後の課題は，工学における現実問題に本手法を適用し，ζ および本手法の有効性を示すことが必要である。灰色関連マトリクスを用いる応用アルゴリズムの適用なども必要である。

参 考 文 献

[1] J.L. Deng, Grey System, China Ocean Press, 1988.

[2] K.L. Wen, Grey Systems Modeling and Prediction, Yang's Scientific Press, Tucson, 2004.

[3] 永井正武，山口大輔，灰色理論と工学応用方法，共立出版，2004.

[4] C.C. Wong and H.R. Lai, "A New Grey Relational Measurement," The Journal of Grey System, vol.12, no.4, pp.341–346, Dec. 2000.

[5] 山口大輔，小林俊裕，水谷晃三，永井正武，"灰色分析を適用した階層的クラスター分析法の提案，" 情報処理学会研究報告，vol.2004, no.10, AL-93-11, pp.75–92, Jan. 2004.

[6] K.H. Hsia and J.H. Wu, "A Study on the Data Preprocessing in Grey Relational Analysis," Journal of Chinese Grey System, vol.1, no.1, pp.47–54, Mar. 1998 (in Chinese).