

複素数の商力学系から生成 されるフラクタル領域

安居院 猛 永江 孝規 中嶋 正之
東京工業大学像情報工学研究施設

あらまし 近年、さまざまな再帰図形やフラクタル図形が考案され、とりわけヒルベルト曲線、4進木などは画像を再帰的に分割する手段として画像処理に応用されている。数学的な再帰的分割の例として整数のN進展開が挙げられる。N進展開は整数から剰余列への写像として定義される。本報告ではこの写像を整数の商を再帰的に生成する力学系と考えると、その複素平面上での性質を解析する。さらにN進展開を画像の再帰的な分割に応用する。

FRACTAL REGIONS DERIVED FROM COMPLEX QUOTIENT DYNAMICAL SYSTEMS

Takeshi AGUI Takanori NAGAE Masayuki NAKAJIMA
Tokyo Institute of Technology Imaging Science & Engineering Laboratory
4259 Nagatsuta, Midori-ku, Yokohama, 227 Japan

Abstract Recently, various recursive or fractal figures have been proposed, and especially Hilbert's curve and quad-tree which divide images recursively are applied to image processing. N-adic expansion is a mathematical example of recursive division. N-adic expansion is defined as a mapping from integers to residue series. In the present report, this mapping is regarded as dynamical systems which generate quotients recursively, and study their features on the complex plane. Further more, we apply N-adic expansion to recursive division of images.

1. はじめに

計算機の発達にともない、さまざまな再帰図形やフラクタル図形が多くの人たちによって描かれるようになった。とりわけ再帰的な空間充填図形を描く手法は、画像を再帰的に分割して処理する手段として注目される。その例としてはヒルベルト曲線⁽¹⁾、4進木⁽²⁾、三角形パッチ⁽³⁾などが挙げられる。これらの再帰的空間充填の例に整数のN進展開がある。本報告ではN進展開の基礎になる整数の割り算を一般化することで、N進表現を複素整数にまで拡張することができ、画像の再帰的な分割に適用できることを示す。

2. 数系とN進展開

通常、整数は有理整数を指すが、本報告では有理整数と複素整数とをあわせて指すことにする。整数の割り算は有理整数に限って定義されており、しかもその除数は正の整数に限られている⁽⁴⁾、⁽⁵⁾。このような制約を除くためには、割り算をその除数だけではなく、剰余の集合と除数とから定義する必要がある。

またこの割り算を繰り返して行うことで整数のN進展開ができる。このようにして一般化されるN進展開には従来のN進展開にはないさまざまな性質がある。

2.1 数系と割り算の定義

[定義1] 数系は $|m| > 1$ を満たす整数 m と、 m が定める合同関係によって類別される剰余類のそれぞれから一つずつ代表される整数の集合 R との組 $[m, R]$ である。

一般に m は法、 R は剰余系または代表系、 R の元は代表元または剰余と呼ばれる。 m の剰余類の個数を剰余類数、あるいはノルムといい、 $N(m)$ と表す。剰余の総数はその類の数と同じで $N(m)$ である。任意の2つの剰余 r, s に対して次式(1)が成り立つ。

$$r \equiv s \pmod{m} \iff r = s \quad (1)$$

即ち、剰余は自分自身以外と合同ではなく、どの二つの剰余も等しくない。

数系の特徴はその剰余が一般化されている点にある。例えば普通の2進数は数系 $[2, \{0, 1\}]$ で表されるが、2を法とする代表系は $\{5, 6\}$ や $\{1,$

12)などのように偶数と奇数の組であればどのようなものでもよい。これは整数が2を法として偶・奇の2類に類別されるからである。

数系 $[m, R]$ に関して、整数 x の商 y と剰余 r を次のように定義する。

[定義2]

$$y = \frac{x - r}{m}, \quad x \equiv r \pmod{m}, \quad r \in R. \quad (2)$$

ここでこのような r は R の定義から必ず存在してしかも一意的に決まる。数系 $[m, R]$ を x から商 y への写像と考え、式(2)を次式(3)で表すことにする。つまり、写像としての数系と割り算の商とを同一のものとしなす。

$$y = [m, R](x) \quad (3)$$

2.2 数系の合成則

数系の合成則は次の2.3で述べる商の結合則と本質的に同じものである。

[定理1] $[m, R], [n, S]$ を任意の数系とすると、集合 $R + mS = \{r + ms; r \in R, s \in S\}$ は mn を法とする代表系になる。

[証明] $R + mS$ が mn を法としてどの2つも合同でない $N(mn)$ 個の整数から構成されることを言えばよい。 $r, t \in R$ かつ $s, u \in S$ とすると $r + ms$ と $t + mu$ はともに $R + mS$ の元である。ここで次式(4)を仮定する。

$$r + ms \equiv t + mu \pmod{mn} \quad (4)$$

式(4)が成り立つならば次式(5)がなりたつ。

$$r + ms \equiv t + mu \pmod{m} \quad (5)$$

式(5)と次式(6)は同値である。

$$r \equiv t \pmod{m} \quad (6)$$

式(6)は剰余系の定義から $r = t$ と同値である。従って、式(4)は次のように書き換えられる。

$$ms \equiv mu \pmod{mn} \quad (7)$$

式(7)は次式(8)と同値である。

$$s \equiv u \pmod{n} \quad (8)$$

従って、式(8)は式(6)と同様の理由で $s = u$ と同値であり、式(4)が成り立つのは $r = t$ かつ $s = u$ の場合に限られる。 R, S は代表系なので元に重複はない。即ち、 $R + mS$ は mn を法としてどの2つも合同でない $N(m) \cdot N(n)$ 個の整数から構成される。さらにノルムの性質から $N(m) \cdot N(n) = N(mn)$ である。従って、集合 $R + mS$ は mn を法とする代表系である。

Q. E. D.

定理1の結果から、次のように数系の合成を定義する。

[定義3]

$$[n, S] \cdot [m, R] = [mn, R + mS] \quad (9)$$

さらに3つ以上の数系を合成したのもやはり数系になることが帰納的に証明できる。

数系の合成は、例えば2進カウンタと3進カウンタとから6進カウンタを合成することや、10進数が2桁で0から99までの数を表せることなどの一般化である。次に例を挙げる。

$$[2, \{0, 1\}] \cdot [3, \{0, 1, 2\}] = [6, \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}] \quad (10)$$

$$[10, \{0, \dots, 9\}] \cdot [10, \{0, \dots, 9\}] = [100, \{0, \dots, 99\}] \quad (11)$$

2.3 商の結合則

[定理2] 整数 m, n 及び x に関して、 x を m で割った商をさらに n で割った商は x を mn で割った商に等しい。ただし、 $|m| > 1$ かつ $|n| > 1$ 。

[証明] m, n を除数とする割り算はそれぞれ数系写像 $[m, R], [n, S]$ として一般化することができる。また、 mn を除数とする割り算は定義1から写像 $[mn, R + mS]$ として一般化することができる。従って、定理2を示すためには $[mn, R + mS]$ が $[m, R]$ と $[n, S]$ の合成写像に等しいことを言えば十分である。 x を m で割った商 y は次式(12)で表される。

$$y = \frac{x-r}{m}, \quad x \equiv r \pmod{m}, \quad r \in R \quad (12)$$

さらに y を n で割った商 z は次式(13)で表される。

$$\begin{aligned} z = \frac{y-s}{n} &= \frac{\frac{x-r}{m} - s}{n} \\ &= \frac{x - (r + ms)}{mn} \\ \frac{x-r}{m} &\equiv s \pmod{n}, \quad s \in S. \end{aligned} \quad (13)$$

ここで $r + ms$ は $R + mS$ の元の中で一意的に決まる。従って次式(14)が成り立つ。

$$\begin{aligned} z &= [n, S]([m, R](x)) \\ &= [mn, R + mS](x) \\ &= ([n, S] \cdot [m, R])(x) \end{aligned} \quad (14)$$

Q. E. D.

このようにして商の結合則が本質的に数系の

合成則と同じであることが示された。

さらに x を a_0, a_1, \dots, a_k で順に割って得られる商と x を $a_0 a_1 \dots a_k$ で一度に割って得られる商とが等しくなることも帰納的に証明することができる。

図1は定理2を図示したものである。

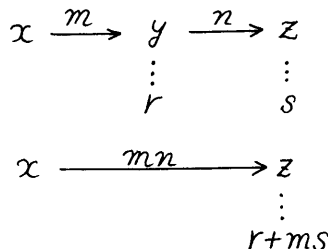


図1 商の結合則

2.4 N進展開

整数 x に対して k 回数系写像 $[m, R]$ を行ったものは次式(15)で与えられる。

$$\begin{aligned} [m, R]^k(x) &= [m^k, \sum_{i=0}^{k-1} m^i r_i](x) \\ &= \frac{x - \sum_{i=0}^{k-1} m^i r_i}{m^k} \end{aligned} \quad (15)$$

k の極限における剰余列 r_i を x の N 進展開と呼ぶ。

$x = [m, R](x)$ を満たす x は $[m, R]$ の不動点である。例えば10進展開 $[10, \{0, 1, \dots, 9\}]$ では不動点は0と-1であり、正の整数は0に、負の整数は-1にそれぞれ収束する。

$[m, R]$ の不動点 f は次式(16)で与えられる。

$$\begin{aligned} f(r) &= \frac{r}{1-m}, \quad r \in R, \\ r &\equiv 0 \pmod{1-m}. \end{aligned} \quad (16)$$

このように $f = f(r)$ は整数であり、しかも r が R に含まれる必要がある。従って $[m, R]$ の不動点の総数は最少で0、多くとも $N(m)$ である。

さらに c が次式(17)を満たすならば c は周期 k で循環する。

$$c = [m, R]^k(c) \quad (17)$$

式(15), (17)から f と同様にして c を解くと、 c は次式(18)で表され、 c を整数にする剰余列 $r_0, \dots, r_{k-1} \in R$ が存在しなければならない。

$$c = \frac{\sum_{i=0}^{k-1} m^i r_i}{1-m^k} \quad (18)$$

ここで $k=1$ とおけば c と f とは一致する。循環をおこす数系としては $[2, \{0, 9\}]$ などがある。

図2は循環を図で表したものである。

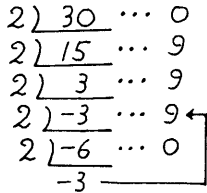


図2 数系 $[2, (0, 9)]$ による循環の例. 始点30, 周期2, 循環 $-3 \rightarrow -6 \rightarrow -3 \rightarrow -6 \rightarrow \dots$, 剰余列 $(0, 9, 9, 9, 0, 9, 0, \dots)$.

3. 複素離散力学系としてのN進展開

N進展開は整数から剰余列への写像であるが、同時に複素平面上の商の力学系と考えることによって、さまざまな性質が明らかになる。

3.1 複素離散力学系

複素数 x と複素数の写像 ψ が与えられたとき、次式(19)に示す列 x_i が生成される。

$$\begin{aligned}
 x_0 &= x, \\
 x_i &= \psi(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots \quad (19)
 \end{aligned}$$

このように ψ によって表される生成規則を一般に複素離散力学系という。また、このような列 x_i を ψ の軌道と言い、 x_0 をこの軌道の始点という。また ψ が x_{i-1} を x_i に移すことを ψ による x_{i-1} から x_i への遷移という。

3.2 コッホ系

コッホ系⁽⁶⁾は複素数体上の離散力学系の一種であるが、その軌道が複素数の集合である点の特徴である。

コッホ系 K は有限個のどのふたつも等しくない線形な縮小写像 ψ の集合である。ここで縮小写像 ψ は任意の複素数 x, y に対して次式(20)を満たす写像である。

$$|x - y| > |\psi(x) - \psi(y)| \quad (20)$$

K 自体も写像として定義することができる。 K と任意の複素数の集合 X_0 に対して集合 X_1 が次式(21)で定義される。

$$X_1 = K(X_0) = \{\psi(x); \psi \in K, x \in X_0\} \quad (21)$$

線形写像 ψ は全単射であるから、 X_0 の元に重複がなければ X_1 の元にも重複がない。 X_0 を始点とし、 $X_i = K(X_{i-1})$ を生成規則と考えれば、

力学系の軌道としての集合の列 X_i が定まる。

コッホ系 K に関して、 i を無限大へ近づけたときの極限集合 $L = \lim_{i \rightarrow \infty} K^i(X_0)$ は K によって一意に決まって、始点 X_0 には無関係な有界なフラクタル集合になることが知られている⁽⁶⁾。

3.3 商力学系

$[m, R]$ を数系とする。複素数集合を軌道とする離散力学系を、 X_0 を始点として次のように定義する。

[定義4]

$$\begin{aligned}
 X_i = \{ q(x) = \frac{x - r}{m} ; x \in X_{i-1}, r \in R \} \\
 i = 1, 2, 3, \dots \quad (22)
 \end{aligned}$$

ここで q は線形写像であり、 $2 < |m| > 1$ を仮定しているから、 q は縮小写像である。従ってこの力学系はコッホ系である。この力学系を数系 $[m, R]$ のコッホ系と呼ぶ。 X_i は必ずしも整数の集合ではなく、 $q(x)$ も整数である必要はない。

x_0 を任意の整数とする。 x_0 に数系写像 $[m, R]$ を繰り返して生成される商の列 x_i は複素離散力学系である。さらに軌道 x_i は $X_0 = \{x_0\}$ を始点とする $[m, R]$ のコッホ系の軌道 X_i に含まれる。即ち次式(23)が成立する。

$$x_i \in X_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (23)$$

このように数系を商列の生成規則と考えて、この数系を商力学系と呼ぶ。 x_i を商の軌道と呼ぶ。

図3はコッホ系、コッホ系の極限集合、及び商の軌道を表したものである。

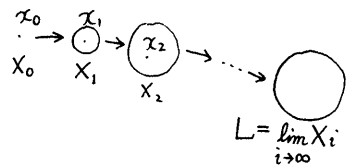


図3 コッホ系の軌道 X_i と商の軌道 x_i 、及びコッホ系の極限集合 L 。

3.4 数系のコッホ系の極限集合

[定理3]

数系 $[m, R]$ のコッホ系の軌道は収束半径 ∞ で収束し、その極限集合 L は次式(24)で表される。

$$L = \left\{ -\sum_{i=0}^{\infty} m^{-i-1} r_i ; r_i \in R \right\} \quad (24)$$

また、 L は複素平面上の有界な集合である。

[証明]

任意の複素数 x を元とする集合 $X_0 = \{x\}$ を始点として k 回遷移した軌道は次式(25)で表される。

$$X_k = \left\{ \frac{x - \sum_{j=0}^{k-1} m^j s_j}{m^k} \right\} \quad (26)$$

$$= \{m^{-k} x - \sum_{j=0}^{k-1} m^{j-k} s_j\}$$

ただし、ここで $s_j \in R$ である。 m は 2.1 から $|m| > 1$ である。ゆえに k が無限大に近づくとき、どのような x に対しても $m^{-k} x$ は 0 に収束する。さらに s_j を次式(27)のように定めることで式(24)が示される。

$$r_0 = s_{k-1}, \quad r_1 = s_{k-2}, \quad \dots, \quad r_{k-1} = s_0 \quad (27)$$

ここで R は有限集合で、その元のなかで絶対値が最大のもの r_{max} が決まる。式(28)が絶対収束することから、 L の元の極限は収束する。従って L は有界であることが示された。

$$\begin{aligned} & \left| - \sum_{j=0}^{\infty} m^{-j-1} r_j \right| \\ \leq & |r_{max}| \cdot \sum_{j=0}^{\infty} |m^{-j-1}| \\ = & \frac{|r_{max}|}{|m| - 1} \end{aligned} \quad (28)$$

Q. E. D.

3.5 商の軌道の循環

[定理 4]

ある数系の商の軌道に循環があれば、この循環はその数系のコッホ系の極限集合に含まれる。

[証明]

数系 $[m, R]$ の商の軌道に有限周期 k の循環があれば、この循環以降の軌道もやはり同様の循環を繰り返す。従ってこの循環は $[m, R]$ の不変領域である。任意の整数 x がこの循環に含まれれば、 x は式(18)と同様に次式で表される。

$$x = \frac{\sum_{j=0}^{k-1} m^j s_j}{1 - m^k}, \quad s_j \in R. \quad (29)$$

ここで $x \in L = \left\{ - \sum_{j=0}^{\infty} m^{-j-1} r_j \right\}$ であることを証明するには、 x に対して適当な無限数列 r_j が存在して次式(30)を満たすことを示せばよい。

$$\frac{\sum_{j=0}^{k-1} m^j s_j}{1 - m^k} - \left(- \sum_{j=0}^{\infty} m^{-j-1} r_j \right) = 0 \quad (30)$$

次式(31)は前式(30)の左辺を通分してその分子

だけを取り、変形したものである。

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{k-1} m^j s_j + (1 - m^k) \sum_{j=0}^{\infty} m^{-j-1} r_j \\ = & m^{k-1} (s_{k-1} - r_0) \\ & + m^{k-2} (s_{k-2} - r_1) + \dots \\ & + m^0 (s_0 - r_{k-1}) \\ & + \sum_{j=0}^{\infty} m^{-j-1} s_j - \sum_{j=k}^{\infty} m^{k-1-j} r_j \end{aligned} \quad (31)$$

ここで s_j に対して r_j を次のように定めれば前式(31)を 0 にすることができる。

$$\begin{aligned} r_0 &= r_k = r_{2k} = \dots = s_{k-1} \\ r_1 &= r_{k+1} = r_{2k+1} = \dots = s_{k-2} \\ & \vdots \\ r_{k-1} &= r_{2k-1} = r_{3k-1} = \dots = s_0 \end{aligned} \quad (32)$$

Q. E. D.

この証明において、商の軌道に循環が存在するならばそれはコッホ系の極限集合の中にだけ存在し、しかもそれらの循環点は有限項のべき級数と、有限周期で循環する無限項のべき級数とのふたつの表現を持ち、それらの表現の係数の間には式(32)で表される関係があることを示した。

3.6 商の軌道の有限性

[定理 5]

商の軌道は有限の遷移の後有限の周期で循環する。

[証明]

記号 m, r, R, q, K, L 等は従来の意味で用いることにする。

$1 \leq p < |m|$ を満たす任意の実数 p が与えられたとする。このような p に対して式(33)を満たす複素数 x を求めると、その存在範囲は式(34)に示す C を中心として、式(35)に示す半径 R_p の円の外部になる。ここでこの円の円周と内部の点の集合を q の A と呼ぶ。

$$p |q(x)| < |x| \quad (33)$$

$$C = \left(\frac{-p^2 s}{|m|^2 - p^2}, \frac{-p^2 t}{|m|^2 - p^2} \right) \quad (34)$$

$$R_p = \frac{p |r m|}{|m|^2 - p^2} \quad (35)$$

ただしここで $r = s + it$; $s, t \in R, i$ は虚数単位とする。 A の外部の点 x においては次式(36)が成り立つ。

$$\frac{1}{|m|} < \frac{|q(x)|}{|x|} < \frac{1}{p} \leq 1 \quad (36)$$

即ち $\frac{1}{|m|}$ から $\frac{1}{p}$ の比で A の外部の点は原

点に近づく。

次に $|x| < R_I = |q(x)| < R_I$ となる半径 R_I の円の内部の集合 I を求める。

$$\begin{aligned} |q(x)| &= \frac{|x-r|}{|m|} \\ &\leq \frac{|x|+|r|}{|m|} \\ &< \frac{R_I+|r|}{|m|} < R_I \end{aligned} \quad (37)$$

これを解いて、 R_I は次式(38)で与えられる。

$$R_I = \frac{|r|}{|m| - 1} \quad (38)$$

$r \in R$ のうちで絶対値が最大のものを r_{max} とすると、 $R_I > \frac{|r_{max}|}{|m| - 1}$ となるように R_I をある値に定めれば、 K のどんな写像 q に対しても、 $|x| < R_I \Rightarrow |q(x)| < R_I$ となるようにすることができる。なおこの R_I は式(28)で求めた軌道の絶対収束値に等しい。

さらに K の極限集合 L 及び K のすべての q の A も包含するように半径 R_I を定めることができる。図4は複素平面上の A 、 I 、 L の関係を表したものである。以上から商の軌道は有界な領域 I の中へ有限回の遷移の後に収束することがわかる。

ところが、 I に含まれる整数の個数は有限であり、定理4で示したように L 上の整数でないかぎり軌道は循環しないので、 I に含まれる軌道はやはり有限の遷移の後に I に包含される L に入り、ここで有限の周期で循環する。

Q. E. D.

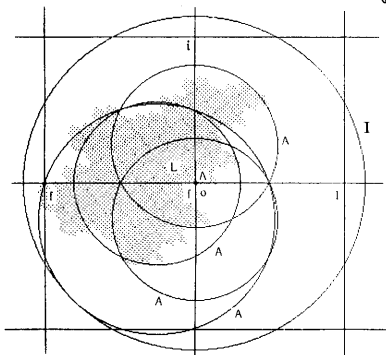


図4 数系 $[2+i, \{-i, 0, 1, 1+i, i\}]$ の L と q の A と I 、及び不動点 f 。
 i は虚数単位、 o は複素平面の原点。正
方格子の1辺の長さは1。

3.7 N進展開の全単射同型性

次の定理でN進展開によって任意の整数を一意的に表すことができることを示す。

[定理6]

整数環と剰余列の集合とは全単射同型である。

[証明]

整数環を ξ とする。 ξ が与えられると、数系 $[m, R]$ 及び剰余列の集合 ρ が定まる。N進展開は ξ から ρ への写像 $\varepsilon: \xi \rightarrow \rho = \rho(\xi)$ と考えることができる。また、 ε の逆写像として、N進数 ε^{-1} を定義することができる。 ε^{-1} は ρ から ξ への写像 $\rho \rightarrow \xi(\rho)$ である。桁数 k の剰余列の集合を $\rho(k)$ と書くと、 $\rho(k)$ によって表されるN進数の集合、即ち ε^{-1} による $\rho(k)$ の像 $\xi(\rho(k))$ は次式(39)で与えられる。

$$\xi(\rho(k)) = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} m^i r_i \right\} \quad (39)$$

ところが定義3及び式(15)から、 $\xi(\rho(k))$ は m^k を法とする代表系なので、その元はすべて異なる。即ち、 k の極限において $\varepsilon^{-1}: \rho \rightarrow \xi(\rho)$ は単射である。さらに ξ の任意の元は必ず ε によって ρ の元と対応する。従って ε^{-1} は全射である。従って ε^{-1} 、 ε は全単射である。

従って ξ と ρ とが全単射同型であることが示された。

Q. E. D.

4. 画像の再帰的分割

ガウスの整数環 $\{x+iy: x, y \text{ は有理整数, } i \text{ は虚数単位}\}$ は幾何学的には正方格子点の集合とみなすことができる。また、数系 $[m, R]$ の代表系 R が0を含む場合には、 k 桁の剰余列の表す整数の集合 $\xi(\rho(k))$ は k を1以上の整数として次式(40)を満たす。

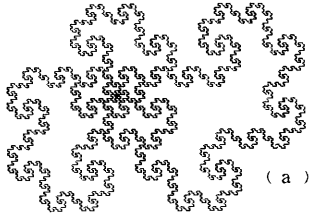
$$\xi(\rho(k)) \subset \xi(\rho(k+1)) \quad (40)$$

この包含関係を表したものが図5である。例えば同図(b)において図形全体は $\xi(\rho(14))$ であり、 2^{14} 個の整数から構成される。そのうち斜線を施した部分が $\xi(\rho(13))$ である。

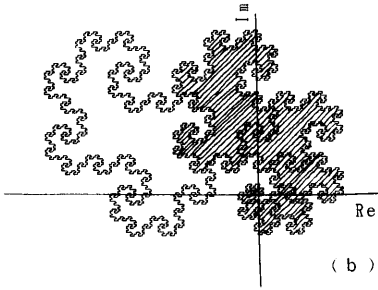
また、次式(41)が成り立つ。

$$\begin{aligned} \xi(\rho(k+1)) &= \left\{ \sum_{i=0}^k m^i r_i \right\} \\ &= \{m^k r; r \in R\} + \xi(\rho(k)) \end{aligned} \quad (41)$$

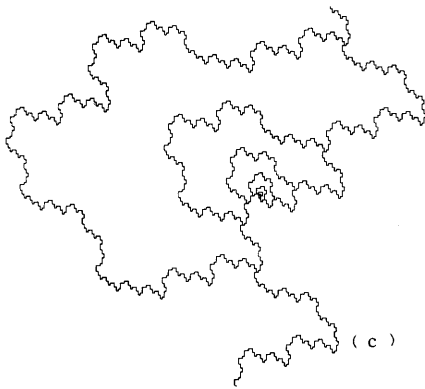
このようにして $\xi(\rho(k+1))$ は $N(m)$ 個の部分集合 $\xi(\rho(k))$ に分割され、それぞれの部分は平行移動によって重ね合わせられる。即ち、



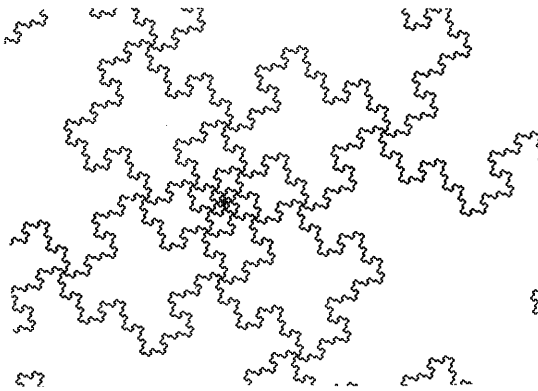
(a)



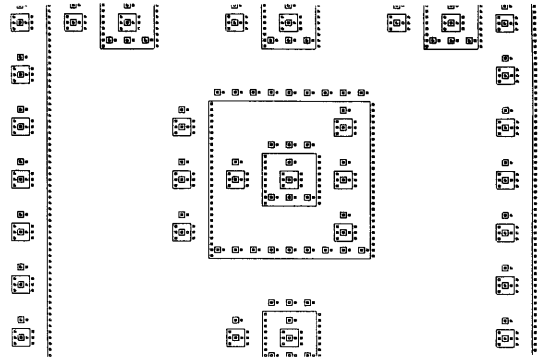
(b)



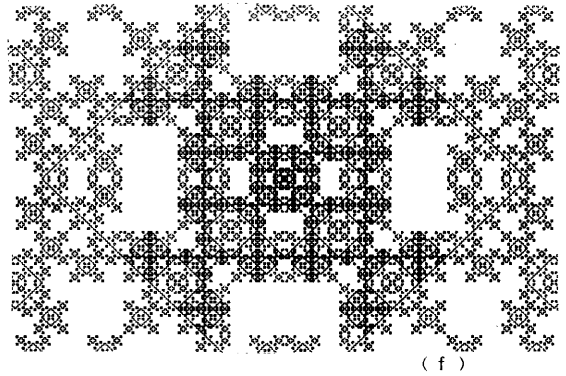
(c)



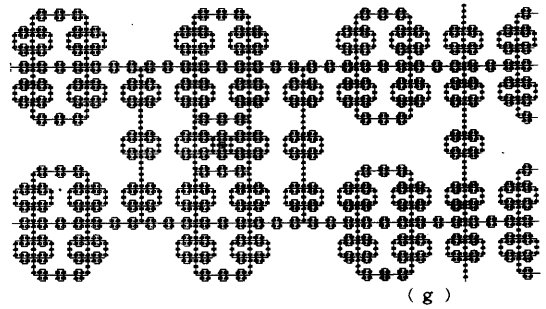
(d)



(e)



(f)



(g)

図 5 画像の再帰的分割例. (b)においてReは実軸, Imは虚軸. 図の縮尺はすべて同じ. 各図のパラメータ $[m, R]$:

(a) $[-1 + i, \{0, 1\}]$

(b) $[1 + i, \{0, 1\}]$

(c) $[2 + i, \{-i, 0, 1, 1 + i, i\}]$

(d) $[2 + i, \{0, i, -1, i, -i\}]$

(e) $[3 i, \{1, 1 + i, i, -1 + i, -1, -1 - i, -i, 1 - i, 2\}]$

(f) $[3, \{0, 1, -1, i, -i, 2 + 2 i, 2 - 2 i, -2 - 2 i, -2 + 2 i\}]$

(g) $[3 i, \{-1 + i, i, 1 + i, -2, 0, 2, -1 - i, i, 1 - i\}]$

式(41)の方法によって正方格子を再帰的に分割することができる。

5. まとめ

整数のN進展開が複素整数にまで拡張することができることを示した。また、N進展開を商の力学系として解析した。さらに整数の集合と整数をN進展開して得られる剰余列の集合とが全単射同型であることを示した。最後に複素整数の典型的な例としてガウスの整数を挙げ、N進展開が画像の再帰的な分割に応用できることを示した。

今後の応用としてはN進木を構成して画像の圧縮を行ったり、フラクタル形状を中点変位法などで生成するための2次元の関数として利用したりすることが考えられる。

参考文献

- (1)W. Skarbek: "HIGH-SPEED GENERATING OF HILBERT CURVES", Research Reports of Institute of Computer Science, Polish Academy of Sciences, ICPAS Reports, no. 608, July 1987.
- (2)A. K. Dewdney: "フラクタル山脈, フラクタル植物など C. G.", コンピュータ・リクリエーションII・遊びの探索, pp. 115-120, 日経サイエンス社, Sept. 1989.
- (3)P. Strobach: "Quadtree-Structured Linear Prediction Models for Image Sequence Processing", IEEE Trans. on pattern analysis and machine intelligence, vol. 11, num. 7, pp. 742-748, July 1989.
- (4)高木貞治: "初等整数論講義", 共立出版, 1931.
- (5)彌永昌吉, 小平邦彦: "現代数学概説 I", 付録 II, 岩波書店 1961.
- (6)Przemyslaw Prusinkiewicz, Glen Sandness: "Koch Curves as Attractors & Repellers", IEEE Computer Graphics & Applications, pp. 26-40, November 1988.