

# 正規直交判別ベクトルの組合せによる特徴抽出

松浦 豊<sup>+</sup>      浜本義彦<sup>+</sup>      内村俊二<sup>++</sup>  
金岡泰保<sup>+</sup>      富田真吾<sup>+</sup>

<sup>+</sup> 山口大学 工学部      <sup>++</sup> 大島商船高等専門学校

あらまし      特徴抽出系の一設計法として提案された正規直交判別ベクトル法は、判別ベクトルを単独で評価し、更に評価関数の最適化が逐次的に行われるため、特徴選択問題で指摘されている問題点を有するものと考えられる。この問題点の一解決法として、準逐次形正規直交判別ベクトル法が提案された。この手法の特色は、判別ベクトルの組合せによる評価を導入した点にある。しかし、求めるべき特徴空間の次元数が大きくなると、判別ベクトルの組合せの数が膨大となる問題点がある。本論文では、準逐次形正規直交判別ベクトル法とは異なる立場から判別ベクトルの組合せによる特徴抽出法を考察する。更に、処理効率を改善する手法として、分岐限定法を組み込んだ手法を提案し、その有効性を実験的に検討する。

## Feature Extraction based on the Combination of Discriminant Vectors

Yutaka MATSUURA<sup>+</sup>      Yoshihiko HAMAMOTO<sup>+</sup>      Shunji UCHIMURA<sup>++</sup>  
Taiho KANAOKA<sup>+</sup>      Shingo TOMITA<sup>+</sup>

<sup>+</sup> Yamaguchi University      <sup>++</sup> Oshima National College of Maritime Technology  
Ube, 755      Oshima, 742-21

Abstract      In this paper, we describe a feature extraction method based on the combination of discriminant vectors. First, the method extracts  $n$  discriminant vectors based on the orthonormal discriminant vector method. Next, the method selects the best subset of size  $m$  out of  $n$  discriminant vectors. The character of the method is that it takes account of the combination of discriminant vectors. One way of evaluating the combination is the well-known exhaustive search. From the standpoint of the computational complexity, however, exhaustive search is generally impractical. We propose a method based on the branch and bound algorithm in order to select the best subsets. To demonstrate the usefulness of the proposed method, experimental results are presented.

## 1. まえがき

パターン認識における線形特徴抽出の目的は、一般に高次元であるパターン空間から、できるだけ識別能力を損なわないように、低次元である特徴空間への写像を行うことである。従って、特徴抽出系の設計問題は、特徴空間の基底を求めることに帰着される。特徴抽出系の一設計法として提案された正規直交判別ベクトル法<sup>(1)</sup>は、判別分析に比べ抽出される判別ベクトル(特徴軸)が直交系をなし、クラス数により軸数の制約を受けない。しかし、判別ベクトルを単独で評価し、更に評価関数の最適化が逐次的に行われるため、特徴選択問題で指摘されている問題点を有するものと考えられる。この問題点の一解決法として、準逐次的に評価関数の最適化を行う準逐次形正規直交判別ベクトル法<sup>(2)</sup>が提案され、エラー確率の観点から正規直交判別ベクトル法よりも識別能力の高い系を抽出することが実験的に示された。この手法の特色は、判別ベクトルの組合せによる評価を導入した点にある。

本論文では、準逐次形正規直交判別ベクトル法とは異なる立場から判別ベクトルの組合せに着目した特徴抽出法を提案する。更に、処理効率を改善する手法として、分岐限定法<sup>(3)</sup>を組み込んだ手法を提案し、その有効性を実験的に検討する。

2. で準備を行い、3. で総当り法および分岐限定法を用いた判別ベクトルの組合せ法を提案し、4. で上述の手法の比較を認識性能と処理効率の観点から行う。

## 2. 準備

### 2.1 歴史的背景

特徴選択問題において、Cover<sup>(4)</sup>は単独で最も認識率の高い2個の特徴を組み合わせても2個の特徴からなる系として最適な系が得られない例を示した。更に、CoverとCampenhout<sup>(5)</sup>は逐次形特徴選択法の限界を理論的に明らかにした。これに対し、逐次形特徴抽出法の一つである正規直交判別ベクトル法もまた逐次形特徴選択法と同様に必ずしも最適な系を抽出するとは限らないことが実験的に示された<sup>(2)</sup>。すなわち、正規直交判別ベクトル法による第1軸 $d_1$ 、第2

軸 $d_2$ 、第3軸 $d_3$ がエラー確率に関して、

$$Pe(d_1) < Pe(d_2) < Pe(d_3) \quad (1)$$

となるときでさえ

$$Pe(d_1, d_3) < Pe(d_1, d_2) \quad (2)$$

となることが示された。ここで、正規直交判別ベクトル法が、2個の判別ベクトルとして $d_1$ 、 $d_2$ を採用することに注意されたい。これは、最適化において式(2)のような判別ベクトルの組合せによる評価を行わず、逐次的に判別ベクトルを抽出するためである。

上述の実験結果より、判別ベクトルの組合せによる評価の重要性が明らかになった。

### 2.2 軸生成のための評価関数

$n$ 次元パターン空間を $\Omega_n$ と表す。正規直交判別ベクトル法での軸 $d_r$ の評価関数は次式で定義される。

$$J(d_r) = \frac{d_r^T B d_r}{d_r^T W d_r} \quad (3)$$

ここで、

$d_r$ : パターンが射影される第 $r$ 軸

$N_i$ : クラス $i$ のパターン数

$m$ : クラス数

$N = \sum_{i=1}^m N_i$ : 全パターン数

$p(i) = N_i/N$ : クラス $i$ の事前確率

$x_{ij} = [x_{ij1}, x_{ij2}, \dots, x_{ijn}]^T$   
: クラス $i$ の $j$ 番目のパターンベクトル

$\mu_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} x_{ij}$ : クラス $i$ の平均ベクトル

$W_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} (x_{ij} - \mu_i)(x_{ij} - \mu_i)^T$   
: クラス $i$ の共分散行列

$W = \sum_{i=1}^m p(i) W_i$ : クラス内共分散行列

$B = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m p(i)p(j)(\mu_i - \mu_j)(\mu_i - \mu_j)^T$   
: クラス間共分散行列

### 2.3 準逐次形正規直交判別ベクトル法

準逐次形正規直交判別ベクトル法は、 $n$ 次元

パターン空間  $\Omega_n$  に対して、以下のように判別ベクトルを抽出する。いま、 $r$  ( $1 \leq r \leq n-e$ ) 個の軸が抽出されているとする。このとき、正規直交判別ベクトル法によって一つずつ  $e$  個の軸を抽出し、 $r+e$  個の軸からなる判別ベクトル候補群を作成する。ここで、候補群より削除すべき軸の数を  $f$  とすると、抽出される軸数は  $(r+e)-f$  個となる。まず、候補群から  $(r+e)-f$  個の軸からなる系を構成し、それぞれの系について認識性能の評価を行う。次に、認識性能の点で最適な系を構成している軸を判別ベクトルとして選択し、 $(r+e)-f$  次元特徴空間を形成する。ところで空間  $\Omega_n$  に対して、

$e$  の範囲:  $1 \leq e \leq n-r$

$f$  の範囲:  $0 \leq f \leq n-1$

となる。特に、 $e=1, f=0$  とした本手法は、正規直交判別ベクトル法そのものとなる。このパラメータ  $e, f$  は、本手法において重要な役割を果たすが、一般に最適なパラメータ  $e, f$  の設定は困難である。

$e=2, f=1$  とした準逐次形正規直交判別ベクトル法のアルゴリズムを以下に示す。

1 軸抽出処理の場合、正規直交判別ベクトル法に基づいて行列  $W^{-1}B$  の最大固有値に対応する固有ベクトル  $d_1$  を求める。

$$W^{-1}B d c = \lambda c d c, \lambda_1 > \dots > \lambda_n \quad (4)$$

1 軸で処理を終了する場合は、 $d_1$  を第一判別ベクトル(特徴軸)  $\tau_1$  とする。

( $s$  軸抽出処理) ( $2 \leq s \leq n-1$ )

手順 1: 既に求められている  $r$  個の候補軸  $\nu^1, \nu^2, \dots, \nu^r$  ( $1 \leq r \leq n-2$ ) に正規直交判別ベクトル法に基づいて新たに抽出した候補軸  $\nu^{r+1}, \nu^{r+2}$  を付加し、判別ベクトル候補群を構成する。

手順 2: 候補群の中から取りだした  $r+1$  個の軸からなる系を構成し、それぞれについて認識率に基づく評価を行う。すなわち、 $r+2C_{r+1}$  個の系を評価する。認識率の推定は、識別系として最近傍則を、推定法として Leave-one-out 法を用いて行う<sup>(6)</sup>。

手順 3: 認識率の最も良い系を構成する  $r+1$  軸の組合せを選択し、 $r+1=s$  のとき第 1 判別ベクトルから第  $s$  判別ベクトル ( $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ ) として採用し、処理を終了する。 $r+1 < s$  の

場合は  $r \leftarrow r+1$  として手順 1 に戻る。

特徴空間の次元数  $s$  が大きくなると計算量が膨大になり、この手法は、非実用的になる。これは、手順 2 において候補軸の組合せの数が大きくなるからである。

### 3. 判別ベクトルの組合せ法

本手法は、候補軸を正規直交判別ベクトル法により一括して求め、準逐次形法と同様に軸の組合せの評価を認識率により行い、最適な系を選択する。以下に、 $n$  次元のパターン空間  $\Omega_n$  に対する判別ベクトルの抽出アルゴリズムを示す。1 軸抽出処理は、正規直交判別ベクトル法の第 1 軸  $d_1$  を第 1 判別ベクトル  $\tau_1$  とする。

( $s$  軸抽出処理) ( $2 \leq s \leq n$ )

手順 1: 正規直交判別ベクトル法によって抽出された  $n$  個の軸 ( $d_1, d_2, \dots, d_n$ ) を判別ベクトル候補群とする。

手順 2: 候補群から  $s$  個の軸の組合せによる系を構成し、それぞれについて認識率に基づく評価を行う。その系は  $nC_s$  通り存在する。

手順 3: 認識率の最も良い系を構成する  $s$  個の軸を第 1 判別ベクトルから第  $s$  判別ベクトル ( $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_s$ ) として選択し、処理を終了する。

本手法は、正規直交判別ベクトル法により抽出された軸に対して組合せの評価を行うため、正規直交判別ベクトル法より認識性能の良い系を抽出することが予想される。結局、 $n$  個の軸から  $s$  個の軸を選択する特徴選択問題を解くことになる。文献(5)で指摘されているように、総当り法は最適な選択法であるが、計算量が大きくなるという問題がある。たとえば、8 次元パターン空間に対して組合せ法を行う場合、2 軸抽出処理において候補軸の組合せは  $28 (= {}_8C_2)$  通りとなり、2 次元空間における認識率の推定を 28 回行うことになる。また、4 軸抽出処理の場合は、4 次元空間における認識率の推定を  $70 (= {}_8C_4)$  回行わなければならない。そこで、処理効率を改善するため、総当り法の代わりに分岐限定法を用いた組合せ法を提案する。

分岐限定法は、単調性と包含性という制約条件を満たす評価関数を用いる場合、総当り法に比べ計算量の点で優れているとされている。と

ころが、上述の2条件を一般に満たさない認識率を評価関数として用いた場合についても、分岐限定法の有用性が示された<sup>(7)</sup>。そこで、候補軸の組合せの評価を分岐限定法により行い、処理効率の向上を図る。

以下、分岐限定法の概要を示す。全特徴数を  $n$  とし、選択される特徴数を  $s$  とする。そのとき、削除される特徴数は、 $k (= n - s)$  である。 $\{Z_1, \dots, Z_k\}$  は削除される特徴の集合で、変数  $Z_i$  は  $\{1, 2, \dots, n\}$  の中のいずれかの値をとる。

特徴の評価関数は、 $Z_1, \dots, Z_k$  を削除することによって得られる  $s$  個の特徴の関数  $J_k(Z_1, \dots, Z_k)$  で定義され、特徴選択問題は、

$$J_k(Z_1^*, \dots, Z_k^*) = \max J_k(Z_1, \dots, Z_k) \quad (5)$$

なる部分集合  $Z_1^*, \dots, Z_k^*$  を見つけるものとなる。

評価関数  $J$  が変数  $Z_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) に対して単調性および包含性を満たすものとする。すなわち、

$$J_1(Z_1) \geq J_2(Z_1, Z_2) \geq \dots \geq J_k(Z_1, \dots, Z_k) \quad (6)$$

ここで、 $B \leq J_k(Z_1^*, \dots, Z_k^*)$  なるとき、

$$J_t(Z_1, \dots, Z_t) < B \quad (t < k) \quad (7)$$

であれば、仮定よりすべての  $\{Z_{t+1}, \dots, Z_k\}$  に対して、

$$J_k(Z_1, \dots, Z_t, Z_{t+1}, \dots, Z_k) \leq B \quad (8)$$

が成立する。従って、式(7)が成立する特徴の組合せに対しては、認識率を評価する必要がない。このように、下限値  $B$  を設定することによって、評価すべき特徴の組合せの数を削減することができる。

前述のアルゴリズムの手順2は分岐限定法を用いて以下のように変更される。

手順2: 候補群の中から取りだした  $s$  軸の組合せ ( $nC_s$  通り) による系を構成する。それぞれの系に対して分岐限定法を用いた、認識率による系の評価を行う。

#### 4. 計算機シミュレーション

実験には、MarillとGreen<sup>(8)</sup>により収集された共分散行列 ( $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ )、平均ベクトル ( $M_1, M_2, M_3, M_4$ ) を基に、各クラスごとに発生させたサンプルをデータとして用いた。以下、実験の種類と内容を示す。

[実験1] 8次元2クラス問題

(クラス1)

サンプル数: 150

正規分布:  $N(M_1, \Sigma_1)$

(クラス2)

サンプル数: 150

正規分布:  $N(M_2, \Sigma_2)$

[実験2] 8次元2クラス問題

(クラス1)

サンプル数: 150

正規分布:  $N(M_1, \Sigma_1)$

(クラス2)

サンプル数: 150

正規分布:  $N(M_3, \Sigma_3)$

[実験3] 8次元2クラス問題

(クラス1)

サンプル数: 150

正規分布:  $N(M_1, \Sigma_1)$

(クラス2)

サンプル数: 150

正規分布:  $N(M_2, \Sigma_1)$

計算機シミュレーションにより、各実験データに対して認識率と処理時間を求めた。この結果を基に、認識性能と処理効率の観点から総当たり法と分岐限定法の比較を行う。計算機は、NEC PC-9801VX (数値データプロセッサ PC-9801-63) を使用した。言語は、MS-FORTRANを用いた。

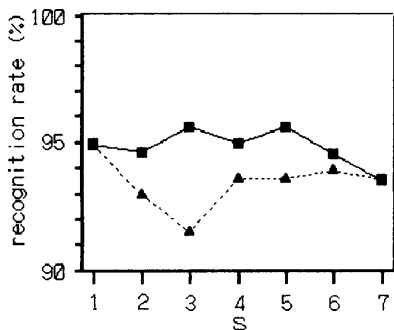
##### 4.1 認識性能の比較

総当たり法を用いた組合せ法と、分岐限定法を用いた組合せ法の認識性能を比較する。処理は第1軸抽出から第7軸抽出までに行い、抽出された判別ベクトルで生成される特徴空間の認識率を比較した。表1に、実験1の結果を示し、図1~3にグラフを示す。また、実験1に対して

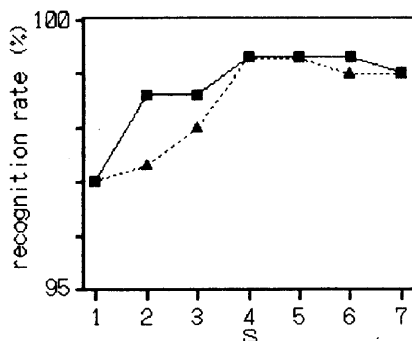
行った準逐次形正規直交判別ベクトル法(準逐次形法)の結果を表2に示す。ここで、既に抽出されている軸数がsであるとき、パラメータe, fの値を、 $e = n + 1 - s$ ,  $f = n - s$ とした。

表1 認識率の比較(実験1)

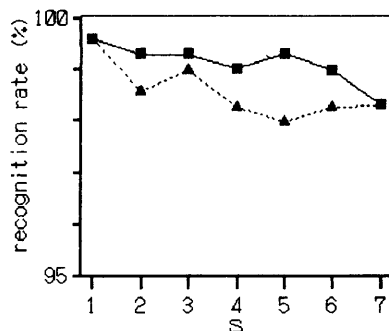
軸数	認識率	
	総当り法 (%)	分岐限定法 (%)
1	95.000	95.000
2	94.667	93.000
3	95.667	91.667
4	95.000	93.667
5	95.667	93.667
6	94.667	94.000
7	93.667	93.667



■: 総当り法, ▲: 分岐限定法  
図1 認識性能の比較(実験1)



■: 総当り法, ▲: 分岐限定法  
図2 認識性能の比較(実験2)



■: 総当り法, ▲: 分岐限定法  
図3 認識性能の比較(実験3)

表2 準逐次形法による結果(実験1)

軸数	認識率 (%)	e	f
1	95.000	0	0
2	94.667	7	6
3	95.667	6	5
4	95.000	5	4
5	95.667	4	3
6	94.667	3	2
7	93.667	2	1

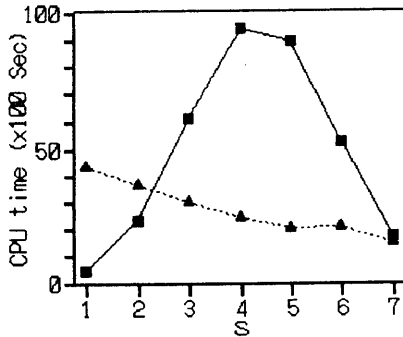
準逐次形正規直交判別ベクトル法と総当り法を用いた組合せ法の認識率は、完全に一致していた。分岐限定法の認識率は、総当り法の認識率より全体的にわずかながら低くなっている。

#### 4.2 処理効率の比較

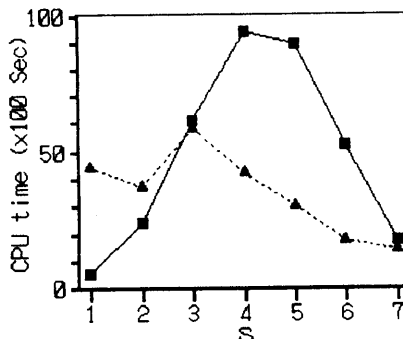
総当り法を用いた組合せ法と、分岐限定法を用いた組合せ法を前述の実験1, 2について行い処理時間を求めた。それを基にして処理効率の比較を行う。4.1と同様に、表3に実験1の結果を、図4, 5にグラフを示す。

表3 処理時間の比較(実験1)

軸数	処理時間	
	総当り法(秒)	分岐限定法(秒)
1	481	4378
2	2348	3694
3	6111	3066
4	9410	2517
5	8950	2069
6	5189	2093
7	1691	1575



■: 総当り法, ▲: 分岐限定法  
図4 処理効率の比較(実験1)



■: 総当り法, ▲: 分岐限定法  
図5 処理効率の比較(実験2)

2軸抽出までは、総当り法は分岐限定法より処理時間が短い。ところが、3軸抽出以降になると、分岐限定法の処理時間が減少しているのに対して、総当り法の処理時間は急激に増加している。特に、4軸抽出において、総当り法は分岐限定法の約3倍の時間を要する。この結果より、抽出される軸数に応じて総当り法と分岐限定法を使い分けることが必要である。

### 5. むすび

本論文では、準逐次形正規直交判別ベクトル法とは異なる立場から判別ベクトル(軸)の組合

せを考慮にいたれた特徴抽出法を提案し、その有効性を実験的に検討した。認識性能について準逐次形正規直交判別ベクトル法と比較を行い、シミュレーション結果より本手法は準逐次形正規直交判別ベクトル法と同等の認識性能を与えることが示された。また、抽出される軸数に応じて総当り法と分岐限定法を使い分ければ、認識性能はやや低下するが、処理効率の点では改善された処理が可能であることが示された。

今後の課題として、本手法と準逐次形正規直交判別ベクトル法との関係を検討することがある。

謝辞 本研究を行うに際し、多大な御助力を頂いた本学 渡辺政典技官、学部生の田中裕一氏、並びに情報処理センターの宗近孝吉技官に謝意を表す。

### 文 献

- (1)岡田、富田: "正規直交判別ベクトル法による特徴抽出論", 信学論(A), J65-A, 8, PP.767-771(昭57-08).
- (2)浜本、松浦、金岡、富田: "非逐次形正規直交判別ベクトル法に関する実験的検討", 信学技報, PRU88-144(1989).
- (3)P.M. Narendra and K. Fukunaga: "A Branch and Bound Algorithm for Feature Subset Selection", IEEE Trans. C-26, No.9, PP.917-922(Sept.1977).
- (4)T.M. Cover: "The best two independent measurements are not the two best", IEEE Trans. Syst. Man. & Cybern., SMC-4, 1, PP.116-117(1974).
- (5)T.M. Cover and J.M. Van Campenhout: "On the possible orderings in the measurement selection problem", IEEE Trans. Syst. Man. & Cybern., SMC-7, 9, PP.657-661(1977).
- (6)K. Fukunaga: "Introduction to statistical pattern recognition", Academic Press(1972).
- (7)浜本、内村、松浦、金岡、富田: "特徴選択のための分岐限定法の実験的評価", 平元年中国運大.
- (8)T. Marill and D.M. Green: "On the effectiveness of receptors in recognition systems", IEEE Trans. IT-9, PP.11-27(1963).