

曲面多面体のCSGモデリングに関する一考察

水野 慎士* 岡田 稔** 横井 茂樹*** 鳥脇 純一郎*

* 名古屋大学工学部情報工学科
** 名古屋大学情報処理教育センター
*** 名古屋大学情報文化学部

〒464-01 名古屋市千種区不老町
電話 052-789-3310
Fax 052-789-3807

あらまし

本報告では、CSG表現により記述された物体を光線追跡法によって表示する手法について検討している。我々はこれまで、3値論理演算と無限平面によって定義された半空間プリミティブに基づく多面体の記述について研究を行い、その有用性を確認してきた。今回はこの手法を2次曲面で定義されたプリミティブへ拡張することを試み、本手法が曲面多面体のモデリングに有用であることを確認する。

和文キーワード CSGモデリング 光線追跡法 2次曲面 曲面多面体

A Study of CSG Modeling for Curved Surface Polyhedra

Sinji MIZUNO * Minoru OKADA ** Shigeki YOKOI *** Jun-ichiro TORIWAKI *

* *Department of Information Engineering, School of Engineering, Nagoya University*

** *Education Center for Information Processing, Nagoya University*

*** *School of Informatics and Sciences, Nagoya University*

Furocho, Chikusa-ku, Nagoya 464-01 Japan

Phone 052-789-3310

Fax 052-789-3807

E-mail mizuno@toriwaki.nuie.nagoya-u.ac.jp

Abstract

In this paper, We studied a ray-tracing algorithm for shapes defined by the Constructive Solid Geometry (CSG). Polyhedra were defined based on a three-valued operation, and halfspace primitives defined by planes were employed in our former method. We attempted to employ halfspace primitives defined by quadric surfaces, and confirmed that the method proposed here is useful for modeling curved surface polyhedra.

英文 key words CSG Modeling Ray Tracing Quadric Surface Curved Surface Polyhedron

1. まえがき

多くの人々に知られているコンピュータ・グラフィックス(以下、CGと略す)とはコンピュータで描かれた絵のことを言う。CGは、各種シミュレーション、医療、アニメーション、教育、ビジネス、コマーシャル・フォト等多くの分野で力を発揮している。

CGにおける形状記述の方法としては、CSG(Constructive Solid Geometry)やB-rep(Boundary representations)がある(7)。その中で、CSGは基本物体(プリミティブ)の集合演算により複雑な形状を記述するものであり、人間の直感的な形状把握の方法に対応するものである。また、CGにおける画像合成の方法の一つである光線追跡法は、リアリティの高い映像を生成する手段として注目をあびている。

これまで、CSG表現データに対する光線追跡法の計算法については、いくつかの研究が報告されている(3)(4)。しかし、これらの研究では交点判定に2値演算が用いられており、判定法に問題を含んでいた。そこで我々は、先に、無限平面によって定義された半空間をプリミティブとしたCSG表現により多面体を定義し、光線追跡法で表示する方法(1)、及びその会話的変換システム(2)について検討した。ここで提案した方法は、空間の論理演算を従来の2値から、I(内部)、B(境界)、O(外部)を真理値とする3値に拡張したもので、これにより、交点の位置関係に関する誤差が生じにくいという特徴を持つ。しかし、これまでは平面に基づくプリミティブしか扱うことができず、定義できる形状はかなり限られたものだった。

そこで、本報告では、プリミティブの定義に用いる平面を曲面に拡張することについて検討する。本研究では、曲面を2次曲面に限定してプリミティブの定義を行う。そして、このプリミティブを用いた物体形状の記述と、その形状を表示するための光線追跡法アルゴリズムについての検討を行う。そして、以上のことから、3値演算に基づくCSG表現が2次曲面に拡張可能であることを示す。なお、本研究では多面体の各面が、平面でなくて曲面の一部に拡張されたときの多面体を曲面多面体と呼ぶ。

2. 半空間プリミティブ

ここではプリミティブについて述べる。従来は平面によって定義されたプリミティブのみを扱ってきたが、本研究では2次曲面によって定義されたプリミティブを含むものへと拡張している。曲面を2次曲面に限定したのは、2次曲面と直線との交点が2次方程式の根の公式で簡単に求まることや、複雑な曲面でもその一部は2次曲面で実用精度で近似できることからである。そこで、まず一般の2次曲面の方程式の係数の求め方を述べ、それからその方程式を用いた半空間プリミティブの定義について述べる。

2.1 2次曲面の表現法

3次元ユークリッド空間 R^3 において、2次曲面は一般に次の形の方程式で表すことができる。

$$\begin{aligned} f_2(\mathbf{p}) &= Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx \\ &\quad + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (1) \\ \mathbf{p} &= (x, y, z) \end{aligned}$$

しかし、任意の2次曲面について係数 $A \sim J$ を決定するのは容易でない。

そこで、まず係数 p, q, r (スケーリングファクター)および、係数 k, l, m, n, v (2次曲面の種類)を用いて

$$\tilde{f}_2(\mathbf{p}) = k \frac{x^2}{p^2} + l \frac{y^2}{q^2} + m \frac{z^2}{r^2} + nx - v = 0 \quad (2)$$

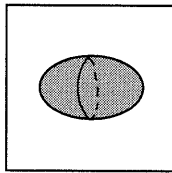
という方程式を与える。このとき、 k, l, m, n, v の値によって2次曲面が表1のように分類される(6)。但し、表1では k, l, m, n, v を例えば $v \geq 0$ などの条件で正規化している。そして、この方程式に対して回転移動と平行移動からなるアフィン変換を行うことにより任意の2次曲面を表すことができる。

ここで、(1)式の係数 $A \sim J$ を求める手順を具体的に示す。まず、(2)式の係数 p, q, r および、係数 k, l, m, n, v の値を与える。また、求めたい2次曲面の回転移動成分($\theta_x, \theta_y, \theta_z$)

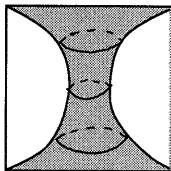
表1 k, l, m, n, v の値による2次曲面の分類

| | k | l | m | n | v |
|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 楕円面 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 一葉双曲面 | 1 | 1 | -1 | 0 | 1 |
| 二葉双曲面 | -1 | -1 | 1 | 0 | 1 |
| 楕円錐面 | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 |
| 楕円柱面 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 楕円放物面 | 1 | 1 | 0 | -2 | 0 |
| 双曲放物面 | 1 | -1 | 0 | -2 | 0 |
| 双曲柱面 | 1 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| 相交2平面 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
| 放物柱面 | 1 | 0 | 0 | -2 | 0 |
| 平行2平面 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1平面 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1直線 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1点 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 虚楕円面 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 |
| 虚楕円柱面 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 |
| 虚2平面 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

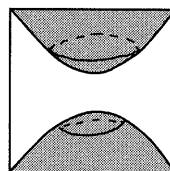
不可視



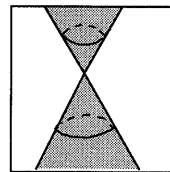
楕円面



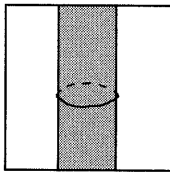
一葉双曲面



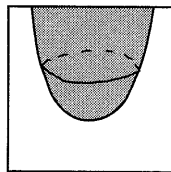
二葉双曲面



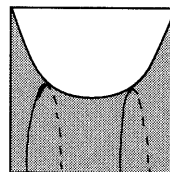
楕円錐面



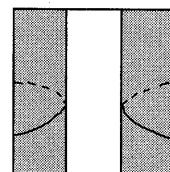
楕円柱面



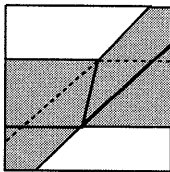
楕円放物面



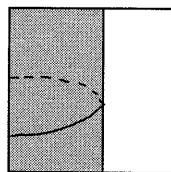
双曲放物面



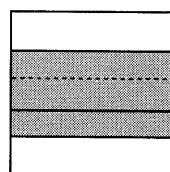
双曲柱面



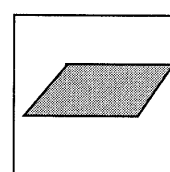
相交2平面



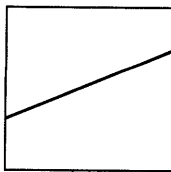
放物柱面



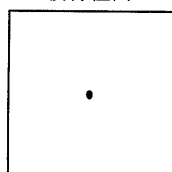
平行2平面



1平面



1直線



1点

、平行移動成分 (p_x, p_y, p_z) を与える。そのとき、 x 軸、 y 軸、 z 軸回りの回転移動、及び平行移動を表す4次アフィン変換行列は

$$R_x(\theta_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x & 0 \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & -\sin \theta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & \sin \theta_z & 0 & 0 \\ -\sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$P(p_x, p_y, p_z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ p_x & p_y & p_z & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

と表すことができる。これらを用いて、 $f_2(\mathbf{p}) = 0$ を $f_2(\mathbf{p}) = 0$ に変換するアフィン行列 $T = \{t_{ij}\}$ ($i, j = \{0, 1, 2, 3\}$) を、次の式

$$T = (R_z(\theta_z) R_x(\theta_x) R_y(\theta_y) P(p_x, p_y, p_z))^{-1} \\ = P(-p_x, -p_y, -p_z) R_y(-\theta_y) R_x(-\theta_x) R_z(-\theta_z)$$

によって求める。このとき $f_2(\mathbf{p})$ の係数は、それぞれ

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{00} & t_{01} & t_{02} \\ t_{10} & t_{11} & t_{12} \\ t_{20} & t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k}{p^2} \\ \frac{m}{r^2} \\ \frac{l}{q^2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} D \\ E \\ F \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} t_{00} & t_{10} & t_{01} & t_{11} & t_{02} & t_{12} \\ t_{10} & t_{20} & t_{11} & t_{21} & t_{12} & t_{22} \\ t_{20} & t_{00} & t_{21} & t_{01} & t_{22} & t_{02} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k}{p^2} \\ \frac{m}{r^2} \\ \frac{l}{q^2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} G \\ H \\ I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t_{00} & t_{30} & 2t_{01} & t_{31} & 2t_{02} & t_{32} & t_{02} \\ 2t_{10} & t_{30} & 2t_{11} & t_{31} & 2t_{12} & t_{32} & t_{12} \\ 2t_{20} & t_{30} & 2t_{21} & t_{31} & 2t_{22} & t_{32} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{k}{p^2} \\ \frac{m}{r^2} \\ \frac{l}{q^2} \\ n \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$J = \frac{k}{p^2} t_{30}^2 + \frac{l}{q^2} t_{31}^2 + \frac{m}{r^2} t_{32}^2 - v \quad (10)$$

と表せる。

2.2 プリミティブの定義

プリミティブとしては全空間 Ω を平面または2次曲面で分けたときの片側半空間を用いる。プリミティブ R を次のように定義する。

$$R = \{ \mathbf{p} \mid f_i(\mathbf{p}) \leq 0 \} \\ \mathbf{p} = (x, y, z), \quad i \in \{1, 2\} \quad (11)$$

但し、

$$\text{平面: } f_1(\mathbf{p}) = ax + by + cz + d \quad (12)$$

$$\text{2次曲面: } f_2(\mathbf{p}) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fzx \\ + Gx + Hy + Iz + J \quad (13)$$

特に2次曲面は今回拡張したものである。

また、プリミティブ R の内部、境界、外部を以下のように定義する (図1)。

$$\text{内部: } R^I = \{ \mathbf{p} \mid f_i(\mathbf{p}) < 0 \} \\ \text{境界: } R^B = \{ \mathbf{p} \mid f_i(\mathbf{p}) = 0 \} \\ \text{外部: } R^O = \{ \mathbf{p} \mid f_i(\mathbf{p}) > 0 \} \\ i \in \{1, 2\}$$

但し、表1の虚楕円面、虚楕円柱面、虚2平面は、 (x, y, z) 実数空間では存在しないため、プリミティブとして用いることができない。

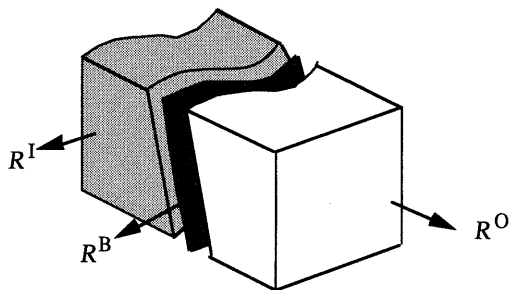


図1 3つの領域
Fig.1 Three subsets

3. 形状記述と交点計算

ここでは上で定義したプリミティブを用いて具体的に曲面多面体の形状を記述する方法と、それを光線追跡法で表示するための交点計算について述べる。そして、そのために従来の2値を拡張した3値論理演算を示す。これは従来、平面のみを扱ってきたとき(1)と基本部分は同じである。

3.1 集合演算の定義

曲面多面体の形状は、2.2で定めたプリミティブの集合演算によって記述できる。その集合演算は、和集合、積集合と、補集合の定義を少し修正した準補集合を用いる。すなわち、準補集合は一般の補集合の概念から境界面を含んだ領域に拡張したものである。

この集合演算と形状を表すときの記述法を表2に示す。ここで、準補集合の記述は物体の境界上の点の所属を明確に表すという意味を持つ。

3.2 形状表現の方法

物体の形状を表す集合演算を具体的に記述するためにLispで用いられるS式の記述を用いる。この記述法は集合演算の表現方式をそのままデータの情報として用いており、少量で分かりやすいデータ構造といえる。BNF(Backus-Nour Form)による、本記述法で用いるS式のシンタックスを以下に示す。

```
<CSG expr.> ::= '(' <operator> <list> ')'  
<list> ::= <region-symbol> | <CSG expr.> [<list>]  
<operator> ::= 'and' | 'or' | 'not'  
<region-symbol> ::= <プリミティブ名>
```

3.3 3値演算の定義と性質

プリミティブの集合演算で定義された曲面多面体を光線追跡法で表示する場合、光線と曲面多面体との交点を求めることが重要である。これは全ての平面、2次曲面との全ての交点を求め、各交点が曲面多面体の表面を構成する面上にあるか否かを判定する必要がある。そこで、以下に示す3値演算が定義されている。

まず、プリミティブ R に対する点 p の包含関

表2 3値論理演算の定義と表現法

| | 定 義 | 表現方法 |
|------|--------------------------------------|--------------------|
| 和集合 | $(R_1 \cup R_2)$ | (or R_1 R_2) |
| 積集合 | $(R_1 \cap R_2)$ | (and R_1 R_2) |
| 準補集合 | $(R_1)^{SC}$ $= (R_1) \cup (R_1)$ | (not R_1) |

係を表す命題 $F(p; R)$ を定義する。

$$\begin{aligned}
 F(p; R) = I : p \text{ は } R \text{ の内部。} & f_i(p) < 0 \\
 B : p \text{ は } R \text{ の境界。} & f_i(p) = 0 \\
 O : p \text{ は } R \text{ の外部。} & f_i(p) > 0 \\
 & i \in \{1, 2\}
 \end{aligned}$$

このとき、 $F(p; R_1 \cup R_2)$ 、 $F(p; R_1 \cap R_2)$ 、 $F(p; R_1^{SC})$ の値は表3のように定義される。ただし、境界面が重複するときなどに起きる B と B との演算では、正しくない結果を得ることがあることが文献(1)で指摘されているので、この条件を避けるようにする。

3.3 交点計算

光線と曲面多面体との交点を求めるため以下のような交点計算を行う。

1) 曲面多面体を構成する全ての平面、ならびに2次曲面と光線との交点を求める。2次曲面と光線との交点数は2、または0となる(重解のときは2とする)。

2) 1) で求めた交点を視点から近い順に並べる。

3) 並び順に、その交点 p が、曲面多面体 R の境界上にある点 $\{p \mid F(p; R) = B\}$ であるかどうかを判定する。そして、最初の境界上の点(つまり、もっとも視点に近い曲面多面体の交点)を可視交点とする。

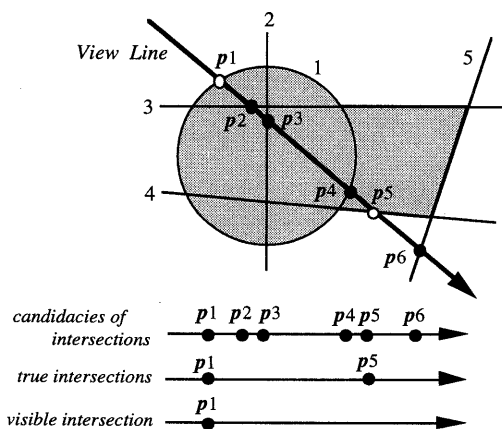
3)における交点の判定は、曲面多面体を定義するS式の全ての<region-symbol>にそのプリミティブに対する交点の状態値 {I, B, O} を代入した後、3.2で述べた3値演算の定義に従ってこ

表3 3値論理演算の真理値表

| | | | |
|---|---|---|---|
| | I | B | O |
| I | I | I | I |
| B | I | B | B |
| O | I | B | O |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | I | B | O |
| I | I | B | O |
| B | B | B | O |
| O | O | O | O |

| | |
|---|---|
| I | O |
| B | B |
| O | I |



● Origin

$$\begin{aligned}
 & F(p_1; R_1) = B, \quad F(p_1; R_2) = O, \quad F(p_1; R_3) = O, \\
 & F(p_1; R_4) = I, \quad F(p_1; R_5) = O \\
 & \text{(or } R_1 \text{ (and } R_2 \ R_3 \ R_4 \text{ (not } R_5))) \\
 & = \text{(or } B \text{ (and } O \ O \ I \ \text{(not } O))) \\
 & = \text{(or } B \ \text{(and } O \ O \ I \ I \)) \\
 & = \text{(or } B \ O \) \\
 & = B
 \end{aligned}$$

図2 S式の評価の例

Fig.2 An Example of estimating an S expression

れを評価することで簡単にできる。

従来の2値から境界を加えた3値演算への拡張により、点 p の論理評価には数値計算が必要なく、交点の位置関係の誤差が生じにくくなっている。図2に交点計算の例を示す。

4. 表示例

今回の手法に基づいて作成した曲面多面体を定義するS式と、その光線追跡法による表示例を図4に示す。使用したプリミティブは、それぞれ(a)は2次曲面が20個、(b)は平面が1個、2次曲面が16個、(c)は平面が10個、2次曲面が553個となっている。

なお、現在の処理アルゴリズムではプリミティブの数 n に対する計算コストは、最悪で $O(n^2)$ となっているため、プリミティブの数が増加すると画像合成に要する時間も急激に増大する。計算時間は(a)で約30秒である。使用計算機はSun Sparc Station 10で、256×256で計算している。

5. まとめ

本論文では曲面多面体の幾何モデリングの一手法を提案した。これは、従来、多面体で行われていた平面に基づいて定義された半空間プリミティブと3値演算の手法を拡張し、2次曲面に基づいて定義された半空間プリミティブに基づくCSG表現を実現したものである。これにより、従来の方法では定義できなかった曲面を持つ形状など、今までよりはるかに自由な形状が定義できるようになった。但し、より高次の曲面への拡張は、本手法に基づいてプリミティブを定義した場合の形状や、交点計算の方法など検討すべき問題が多い。

今後の課題としては、曲面多面体の形状が複雑な場合、それを直ちにS式で表現したり、プリミティブを定義する方程式を求めることが困難であるため、それらを支援するシステムの開発が挙げられる。この一部はすでに検討されて

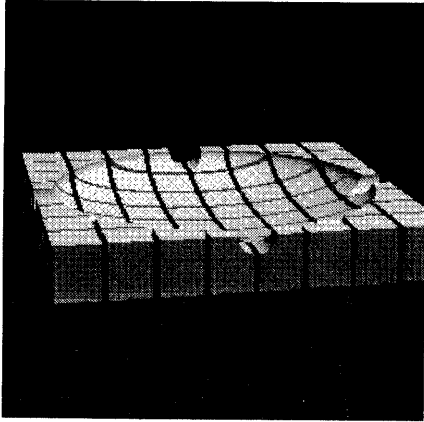
いるが(2)、より使いやすく、曲面多面体に対応したシステムの開発を行いたい。また、文献(1)で指摘された、境界面が重複した際に生じる相反問題の検討が挙げられる。さらには、S式の評価法の効率化による画像合成の高速化も図りたい。

謝辞

日頃熱心に御指導御討論を頂く鳥脇研究室の皆様へ感謝する。なお、本研究の一部は文部省科研費による。

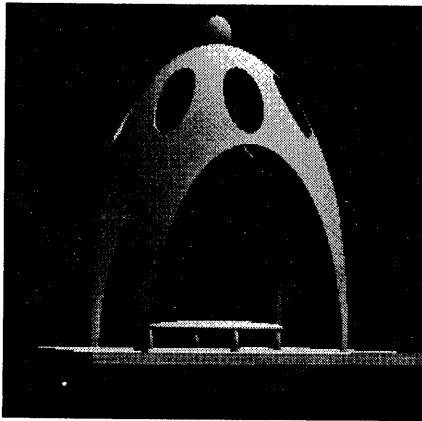
参考文献

- (1)金環環,岡田稔,横井茂樹,鳥脇純一郎,"半空間集合のCSG表現形状に対する光線追跡アルゴリズムの検討",信学技報,PRU88-129(1989.2)
- (2)久保寺玄一郎,岡田稔,横井茂樹,鳥脇純一郎,"半空間プリミティブによる対話的CSGモデラ",情処研報,グラフィクスとCAD55-2(1992)
- (3)S.D.Roth:"Ray Casting For Modeling Solids",Computer Graphics and Image Processing Vol.18,pp.109-144(1982)
- (4)村上公一,松本均:"CSG表現からの画像生成法",情処全大,pp.1533-1534(1983)
- (5)千葉則茂,村岡一信,"CによるCGレイトレーシング",サイエンス社,1991
- (6)日本数学会編,"数学事典第3版",岩波書店,1985
- (7)日本図学会編,"CGハンドブック",森北出版,1989



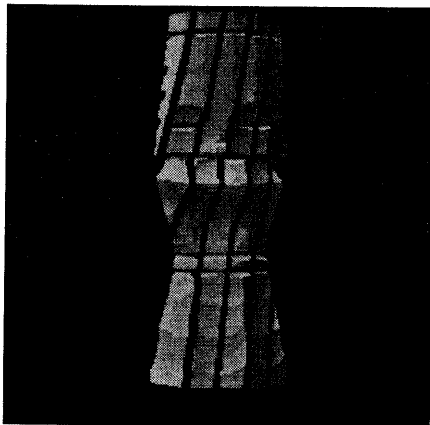
(a)

$R = (\text{and } s1 \ s2 \ s3 \ (\text{not } s4) \ (\text{not } s5) \ (\text{not } s6) \ (\text{not } s7)$
 $(\text{not } s9) \ (\text{not } s10) \ (\text{not } s11) \ (\text{not } s12) \ (\text{not } s13)$
 $(\text{not } s14) \ (\text{not } s15) \ (\text{not } s16) \ (\text{not } s18) \ (\text{not } s19)$
 $(\text{not } s20))$



(b)

$R = (\text{or } (\text{and } s1 \ s2 \ (\text{not } s3) \ (\text{not } s4) \ (\text{not } s5)$
 $(\text{not } s6) \ (\text{not } s7) \ (\text{not } s8))$
 $s9 \ s10 \ s11 \ s12 \ s13 \ s14$
 $(\text{and } s15 \ s16 \ s17))$



(c)

$R = (\text{and } s1 \ s2 \ s3 \ s4 \ s5 \ s6 \ s7 \ s8 \ s9 \ s10$
 $(\text{not } (\text{or } s11 \ s12 \ s13 \ \dots$
 $\dots \ s561 \ s562 \ s563)))$

图3 表示例

Fig.3 Examples of Images