グラフィクスとCAD 82－8
(1996. 10. 9)

Eduware と 可視化

品川 嘉久 ・ 日置 尋久
東京大学理学部情報科学科

二次元・三次元の物体の認識の道具として、トポロジーは重要な役割を果たす。例えば、CAD システムで設計された物体が、NC 機械で工作可能な正しい物体になっているか、などのチェックには、トポロジーが必要である。そこで、本研究では、まず、群やトポロジーの可視化を行ない、次に教育用ソフトウェア (eduware) への応用を提案する。ユーザは、本システムを用いて、トポロジーの有用性を実感しながら、抽象的概念を学ぶことができる。

Eduware and Visualization

Yoshihisa Shinagawa and Hirohisa Hioki

Department of Information Science
Faculty of Science
The University of Tokyo

To design industrial products using computers, it is necessary to use topology. For example, we need topology to check whether the designed objects is valid or manufacturable by NC machines. To help the understanding of topology, this paper proposes a new method to visualize groups and homology. The visualization method is then used as the core of educational software (eduware). The learners can interact with our system using the actual data where such abstract mathematics are useful and can obtain the intuitive images of the abstract mathematics.

1　はじめに

コンピュータを使って、製品の形状を設計したり、地形データベース、医学診断システムや、人間の表情を理解するシステムなど、高度なソフトウェアを作る際には、扱っている物体の構造を、コンピュータに自動認識させることが今後重要になってくる。例えば、製品を設計しても、その製品が機械で加工可能な形状であるかを自動的にチェックできなければならないし、医学診断システムでも、医用データの中から、病巣部分を判断して取り出せなければならない。臓器に何個の穴が開いているかなど、その物体の構造は、トポロジーを計算すればわかる。トポロジーは、物体の形を構成する点や面がお互いにどのように関連しあっているかを計算する。コンピュータが扱う物体のトポロジーを計算する事によって、物体の構造を自動的にチェックし、製品・地形・人体臓器や人間の顔面表情などの構造の特徴を抽出できる。

しかしトポロジーは非常に抽象的であり、その本質的な意味をつかむことが困難であった。この問題を解決するために、我々は、*MOVE*(Multimedia Open network and Virtual reality for new Education) というプロジェクトで、トポロジーをアニメーションによって目に見えるように (可視化) し、理解できる教育システム (eduware) を構築している。そこでは、物体の形状データ、地形、医用データなどの実用データを用いており、視覚で理解し、自分でコンピュータを操作して、物体形状、地形、人体臓器などの構造がどう取り出されるかを確かめることにより、抽象的なトポロジーの概念を実感して理解することが可能になる。

まず、基本的な道具である群（特にアーベル群）をアニメーションにして理解させるシステムを作った。次に、トポロジーの中心的概念の一つであるホモロジー理論をアニメーションで理解させるシステムを開発した。ホモロジー理論では、位相構造をホモロジー群と呼ばれるアーベル群で記述する。我々は、単体的複体 (以降では単に複体と表記する) のホモロジー群の計算過程をアニメーションによって可視化するシステムを実現した。

2　群の可視化

ホモロジー群は、群であるので、まず群の可視化を行なって、群に対する理解を深める。群は、次のような演算規則が成り立つような集合 G である。

(1) 演算は結合的、すなわち任意の3つの元について $(xy)z = x(yz)$

(2) 単位元 $e \in G$ が 存在し、任意の元 $x \in G$ に対して $xe = ex = x$

(3) 任意の元 $x \in G$ には逆元 x^{-1} があって $xx^{-1} = x^{-1}x = e$

(これらの概念については、例えば教科書 [1] を参照。)

2.1　可換群の可視化

まず、最も基本的な群である可換群の可視化を行なった。群が可換群 (アーベル群) であるとは、

$$xy = yx$$

が任意の2つの元についてなりたつことである。我々は、ベクトルと、可換群の元が似ていることを利用して可視化を行なった。すなわち、可換群を、六次元までのベクトルとして三次元空間2個の中で表した。群が自由群の場合は、非常に簡単で、群の元をベクトルで表すだけでよい。しかし、そうでない場合は、何倍かすると0になってしまう

元が存在してしまう。そのような群を表すため、「壁」を用い、元を何倍かして「壁」に触れると0になるようにした (図参照)。

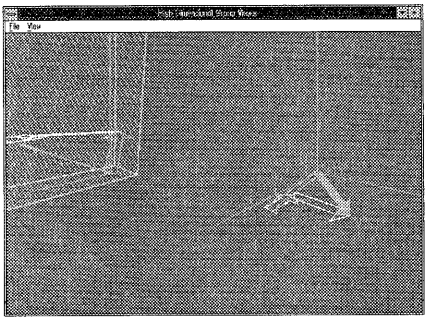

図 1: 壁を用いた、可換群の可視化

2.2 対称群と交代群の可視化

1,2,... の数字の列を考え、その中の要素の順番を入れ換えることを置換と呼ぶ。この置換という操作は、対称群という群をなす。集合 X が n 個の元からなるとき、この対称群を $\mathcal{S}_n$ で表すことにする。例えば、二つの要素 {1,2} の置換は、

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} and \ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

という二つの元からなる $\mathcal{S}_2$ という対称群になる。ここで、ε は単位元である。$\mathcal{S}_2$ の元

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

は、1 と 2 を入れ換えることを意味する。

二つの要素を互いに入れ換えることを互換という。$\mathcal{S}_n$ の元の中で、互換を偶数個用いてあらわされるものは、$\mathcal{S}_n$ の部分群をなし、交代群とよばれ、$\mathcal{A}_n$ で表される。

我々は、対称群と交代群のいくつかを、Platon の立体と呼ばれる正多面体 (正 4 面体、正 8 面体、正 6 面体、正 12 面体、正 20 面体) を用いて可視化した。例えば、正 6 面体の、相対する面の中心を通る軸に関する 90 度回転を a と書くことにする。この場合、$a^4 = e$ という式が成り立つ。このように、各多面体に、回転群を定義できる。例えば正 4 面体に定義される回転群は、正 4 面体群と呼ばれる。正 4 面体群は、$\mathcal{A}_4$ と同じ (同型) であり、正 6 面体および正 8 面体群は $\mathcal{S}_4$ と、正 12 面体および正 20 面体群は $\mathcal{A}_5$ と同じである。正 4 面体群の例を図 2と 図 3 に示す。

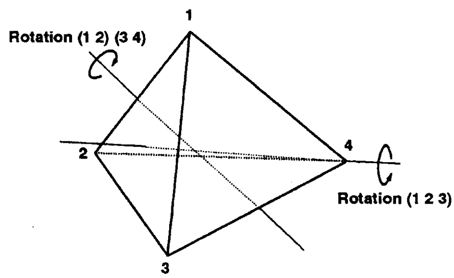

図 2: $\mathcal{A}_4$ と正 4 面体群の関係

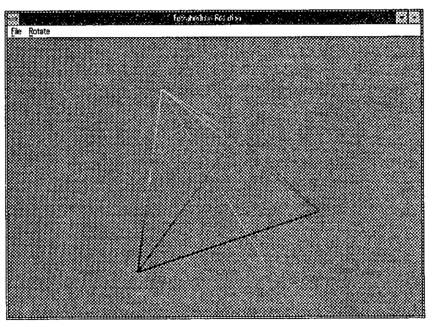

図 3: (1 2 3) の置換操作を行なった 正 4 面体群の可視化

3　ホモロジー群について

ホモロジー理論では、物体の骨組 (位相構造) を、ホモロジー群で記述する。もし 2 つの物体が (位相的に) 同じ形ならばそれらのホモロジー群は同型になる。逆にもし 2 つの物体のホモロジー群が同型でなければ、それらは同じ形ではないということができる。つまり、ホモロジー群が計算できれば、二つの物の形が同じかどうか、自動的に認識する重要な手がかりが得られることになる。

本システムでは物体の形状を単体的複体という形式で入力する。単体とは、簡単に (二次元で) 言うと、三角形のことである。二次元の場合には、単体は、三角形を意味するが、三次元の場合は、三角錐になる。ゼロ次元では点、一次元では、線分というように、一般には、n 次元では、 $n+1$ 個の頂点を持つ。

多角形や多面体などの図形は、三角形の集合に分割できる。この分割を図形の構造としてとらえ、三角形どうしのつながり方をみることによって、図形の位相的構造を計算することができる。この考え方を一般化し、図形を単体で分割した複体において、単体どうしのつながりを群としてとらえ図形の構造を表したのが、単体的複体のホモロジー群である。単体的複体とは、点、線分、三角形などを次元的に一般化した単体をすき間なく貼り合わせたものである。例えば 2 次元曲面ならば、それを三角形分割したものが対応する単体的複体に相当する。図 4は、円筒とその単体的複体による表現及びその間の変形について示したものである。図に示したように位相的には円筒は中空の三角柱と同じ形であり、さらにそれを平面的につぶして、穴の空いた三角形としても位相的な構造は変化しない。図に示した三角形分割による単体的複体は、円筒の単体的複体による表現の一つに過ぎない。全体が三角形によりすき間なく分割されていれば、その分割の仕方は問題にならない。(ホモロジー理論の様々な概念の厳密な定義は [4] を参照。)

単体 :$\boldsymbol{R}^n$ 内の $m+1$ 個 $(m \leq n)$ の点が独立であるとき、これらの点を含む最小の凸集合を、 m 単体という。 m 単体 σ の頂点の部分集合を頂点とする k 単体を、 σ の k 次元面 $(k \leq m)$ という。

複体: $\boldsymbol{R}^n$ 内の単体の有限集合 K が次の条件を満たすとき、 K を複体という。

(1)　$\sigma \in K,\ \tau \subset \sigma \Rightarrow \tau \in K$

(2)　$\sigma, \tau \in K \Rightarrow \sigma \cap \tau \in K$

K に含まれる最大次元の単体の次元を複体の次元という。 K の部分集合 L が条件 (1) を満たすとき、 L を K の部分複体という。また (K, L) を複体の対という。

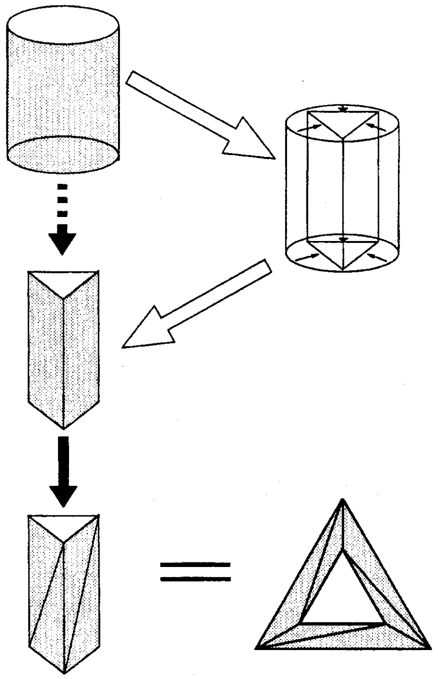

図 4: 円筒とその単体的複体による表現

4 単体的複体のホモロジー群の概観

ホモロジー群は各次元ごとに定義される。直観的には n 次元ホモロジー群とは、物体の中の n 次元の穴の数を表すものであるといえる。例えば0次元ホモロジー群は物体の連結成分の数を表し、1次元ホモロジー群は丸い穴の数を表し、2次元ホモロジー群は空洞(厳密には閉空間)の数を表していると考えることができる。ここで、ホモロジー群について簡単に説明する。

以下では1次元の場合を例として、単体的複体のホモロジー群の定義と計算法についてごく大雑把に述べる。物体(単体的複体)K の中の線分を順番にたどっていって得られる閉じた道を、「1次元のループ」と呼ぶことにする。直観的には、1次元ホモロジー群は、

- ある穴の周りを回るループ l を変更して、いくつか余計に別の三角形の周りを回るループ l' にしたとにしても、結局元と同じ穴の周りを回っていることになるので、ループ l、l' は同じ穴の周りを回るという意味で同じである

という観点で全てのループを分類する。そして、分類の代表として、一つのループを選ぶ。代表としては、穴の縁を回るループを選ぶことにする。言い換えれば、1次元ホモロジー群は単体的複体 K の中の穴の数を表すものということができることが分かる。

これを数学で記述するための道具が、商群である。まず、K 上の1次元の全てのループから成る群を輪体群と呼び、$Z_1(K)$ で表す。そして、K 上の1次元の全ての中身のつまったループ(このようなループは三角形の集合の境界になっている)からなる群を境界輪体群と呼び、$B_1(K)$ で表す。K の1次元ホモロジー群 $H_1(K)$ は、商群

$$H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K)$$

として表される。これは、$Z_1(K)$ の元のうち、$B_1(K)$ の違いは無視するという意味である。つまり、様々なループのうち、中身のつまったループを付け足すか付け足さないか、という違いを無視する。例えば、あるループに、中身のつまったループを付け足して、別のループを作ったとしても、それらは「同じもの」として区別しない。

先ほどの例を少し厳密に書くと、以下のようになる。

- $l' = l + b \quad l, l' \in Z_1(K),\ b \in B_1(K)$ とするとき、$B_1(K)$ の元は $H_1(K)$ では無視されるので、l, l' に対応する $H_1(K)$ の元 $[l], [l']$ は、$[l'] = [l+b] = [l] + [b] = [l] + [0] = [l]$ のように等しくなる。

4.1 可視化及びアニメーション手法

ここでは、先ほどのホモロジーなどの概念をアニメーションにより可視化する手法について述べる [2]。ホモロジー群の計算過程のアニメーションでは、輪体群 Z と境界輪体群 B からどのよう

複体のホモロジー群: m 次元複体 K に含まれる全ての r 単体 ($r \leq m$) を生成元とする自由アーベル群を K の r 次元鎖群といい $C_r(K)$ で表す。r 単体 σ に対して、σ の境界を

$$\partial_r(\sigma) = \sum_{i=0}^{r} (-1)^i (p_0 p_1 \ldots \hat{p_i} \ldots p_r) \in C_{r-1}(K)$$

で定義する。r 鎖 $c = \sum_i n_i \sigma_i$ に対しては、線形的に $\partial_r(c) = \sum_i \partial_r(\sigma_i)$ と定義する。ここで r 次元輪体群、r 次元境界輪体群がそれぞれ、$Z_r(K) = \mathrm{Ker}\ \partial_r$, $B_r(K) = \mathrm{Im}\ \partial_{r+1}$ と定義される。商群 $H_r(K) = Z_r(K)/B_r(K)$ を K の r 次元ホモロジー群といい、r 次元サイクル $c \in Z_r(K)$ を代表元とする $H_r(K)$ の元 $[c]$ を c のホモロジー類という。

にして、ホモロジー群 $H = Z/B$ が得られるかということを前述の可視化手法を用いて表現する。アニメーションの基本的なアイディアは、輪体群 Z に属するあるループ c (以下ではサイクルと呼ぶ) から、境界輪体群 B に属する中身の詰まったループ (以下では境界サイクルと呼ぶ) を取り除くことにより、c をそれが囲んでいる穴の縁を回るサイクル $[c]$(以下では代表サイクルと呼ぶ) に変形できることを示すというものである (これらの代表サイクルの集合の全体がホモロジー群の要素集合となる)。この方法によって、Z に属すそれぞれのサイクルがどの穴の周りを回っているかということを見ることができ、単体的複体の中の穴の数をどのようにカウントするかということを理解することができる。

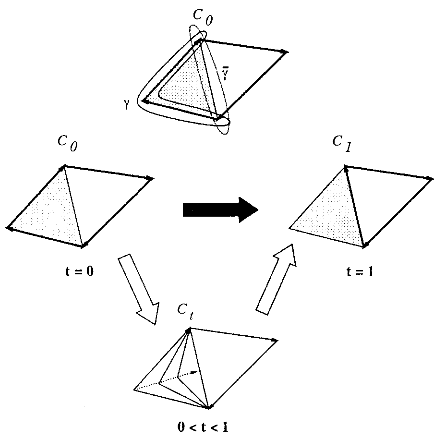

図 5: 境界サイクルの収縮

アニメーションでは、図 5のように、あるサイクルがその中に含まれる境界サイクルを次々に収縮させていくことにより、対応する代表サイクルにスムーズに変形される様子を見ることができる。

図 6と図 8には、このアニメーションの一連の動きの例を挙げてある。これらの例では三角形分割された物体上のあるサイクル c がそれに対応する代表サイクル $[c]$ に変形していく様子を順番に図示してある。サイクル c との共通部分を持つ三角形の部分が一つずつ収縮されていき、最終的には中央の穴を回るサイクル $[c]$ に変形される。

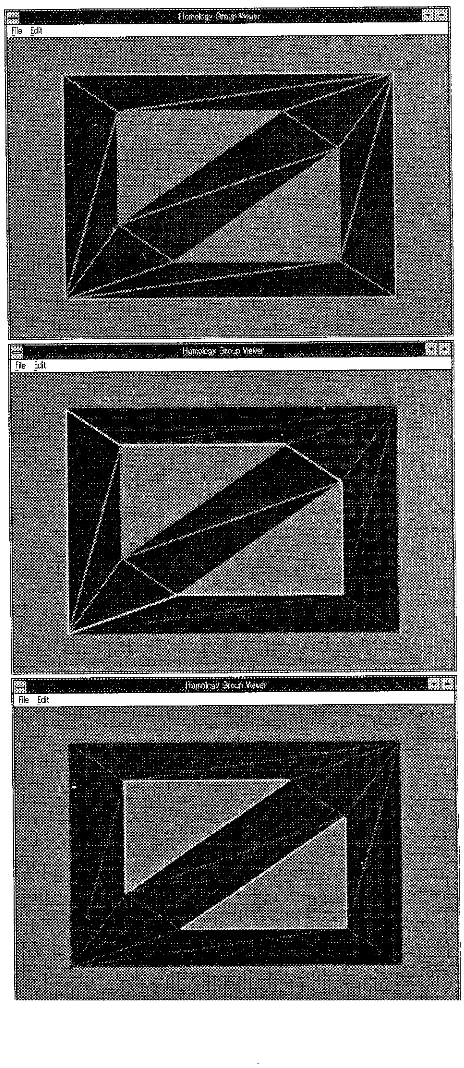

図 6: ホモロジー群の可視化アニメーションの例 1

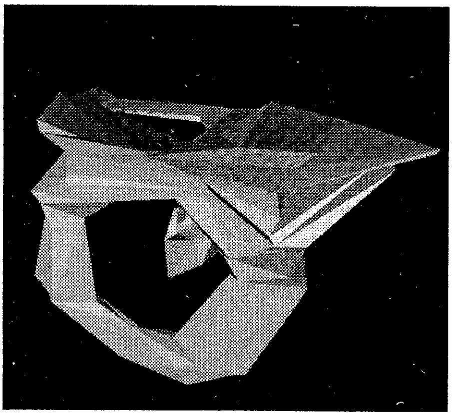

図 7: 三半器官を単体的複体で表した例

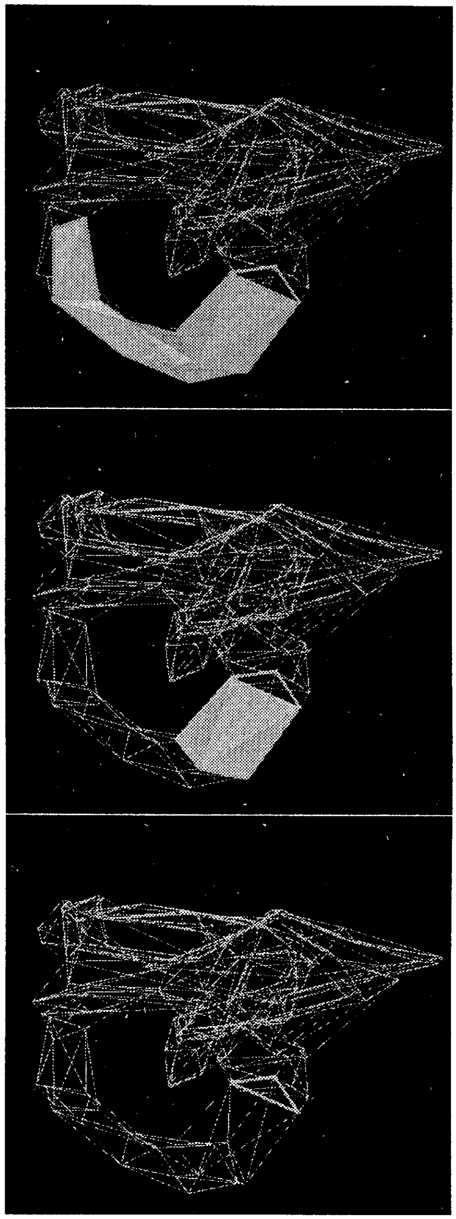

図 8: ホモロジー群の可視化アニメーションの例 2

5 おわりに

本研究においては、群と、代数的位相幾何学の中心的な概念であるホモロジー理論に関する可視化を行なった。物体を単体的複体で表現し、輪体群 Z と境界輪体群 B から商群であるホモロジー群 $H = Z/B$ を計算した。ここでは、ホモロジー群に対する直観的な理解を高めるために、Z と B からホモロジー群が計算される過程をアニメーションを用いて可視化した。特に今回のシステムにおいては、直観の働きやすい低次元ホモロジー群を対象として、単体的複体の上で直接にサイクル同士の関係を表すアニメーションを実現した。ハイパーテキストなどを用いて、これらの可視化プログラムを、統合し、教育用ソフトウェアとしての完成度を高めるのが、今後の課題である。最後に、この研究を支えて下さっている MOVE プロジェクトメンバーに感謝したい。

参考文献

[1] M. A. Armstrong. *Basic Topology.* Springer, New York Berlin Heidelberg Tokyo, 1983.

[2] T. L. Kunii, H. Hioki, and Y. Shinagawa. Visualizing highly abstract mathematical concepts: a case study in animation of homology groups. In *Mulitimedia Modeling (Proc. First International Conference on Multi-Media Modeling)*, pages 3–30. World Scientific, Singapore New Jersey London Hong Kong, 1993.

[3] Yoshihisa Shinagawa, Tosiyasu L. Kunii, Shinsuke Kishimoto and Hirohisa Hioki. Visualization of groups for eduware. In Shi-Ning Yang and Daniel Thalmann, editors, *Proc. Pacific Graphics '96*, pages 1–11, 1996.

[4] W. S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology.* Springer Verlag, 1991.