レベルセット法を用いた複雑境界をもつ流体 CG

杜 小軍† 蔡 東生‡

概要

近年、CG による映像表現技術は映画等によく使われている。特に物理法則に従う自然現象 CG は具体的に数値シミュレーションを行うことで再現することが多い。シミュレーションにおいて伝統的な陽的関数による境界表現（Spline Method）は、複雑な表面運動の時間発展を表現するのが難しい。例えば、水滴が水面から飛び出す運動を表示する方程式では陽的に境界面を追跡するの困難であるといわれている。

本研究で使われたレベルセット法(Implicit Method)は、陰関数定理－レベルセット関数を使い、陰的境界面を追跡する方法である。陽的に境界面を追跡することではなく、各時刻にレベル関数がゼロである点を探す。だから、境界面の幾何の複雑さと関係なく、水滴が水面から飛び出す現象、境界面が自己交差にする現象が陰的に表現できる。

Fluid CG with Complex Surface using Level-Set Methods

Xiao-Jun Du † Dong-Sheng Cai ‡

Abstract

A system is described for animating the motion of incompressible fluid in a computer graphics context. Borrowing techniques from [3, 4], a technique is described for simulating fluid motion and tracking the surface boundary. An approximate solution to the Navier-Stokes equations for the motion of incompressible fluids is computed over a finite grid of coupled velocities and pressures. The surface motion is tracked using the level set of a signed distance function defined over a uniform grid overlapping the simulation grid.

1．はじめに

近年、CG による映像表現技術は映画等によく使われている。特に物理法則に従う自然現象 CG は具体的に数値シミュレーションを行うことで再現することが多い。

シミュレーションにおいては伝統的な陽的関数による境界表現（Spline Method）は、複雑な表面運動の時間発展を表現するのが難しい。例えば、水滴が水面から飛び出す運動を表示する方程式では陽的に境界面を追跡するの困難である。

本研究で使われたレベルセット法(Implicit Method)は、陰関数定理を用いてレベルセット関数を使い、陰的境界面の時間発展を追跡する方法である。陽的に境界面を追跡することではなく、各時刻にレベル関数がゼロである点を探す。だから、境界面の幾何の複雑さと関係なく、水滴が水面から飛び出す現象、境界面が自己交差にする現象が陰関数的に表現できる。

2．非圧縮流体の物理

非圧縮低周波流体の Navier-Stokes（N－S）方程式を以下に記述する。一つは非圧縮性の連続方程式：

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

もう一つは運動量保存則：

$$\vec{u}_t = \nu \nabla \cdot (\nabla \vec{u}) - (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{f} \quad (2)$$

ここで、$\vec{u}$ は速度ベクトル、ν は動粘性係数、ρ は密度、p は圧力、$\vec{f}$ は外力からの加速度とそれぞ

† Xiao-Jun DU(dxj@aoi3.is.tsukuba.ac.jp) , Master's Program in Science and Engineering at University of Tsukuba

‡ Dong-Sheng CAI, Institute of Information Sciences and Electronics at University of Tsukuba

れ表示される。各部分の意味は以下の表で示す：

$\nabla \cdot \vec{u} = 0$	質量保存則 (mass conservation)
$\nu\nabla \cdot (\nabla \vec{u})$	粘性項 (viscosity)
$(\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u}$	移流項 (advect)
$\dfrac{1}{\rho}\nabla p$	圧力項 (pressure)
$\bar{f}$	外部力項

表 1　Navier-Stokes 方程式各項

3．MAC(Maker-And-Cell)法 [1]

N-S 方程式（1、2）に対する差分法として最も広く用いられる方法は、Harlow と Welch により提案された MAC 法である。

MAC 法は、流れ場中に質量のないマーカー粒子が導入し、このマーカー粒子が速度場に従って移動するので、速度場が動的に表現されできる。計算には、対象になる領域を間隔 $\Delta x, \Delta y$ の格子（セル）に分割する。ここで、注意すべき点は、圧力は格子体積の中心にあるが、速度成分は格子表面の中心で扱うことである。

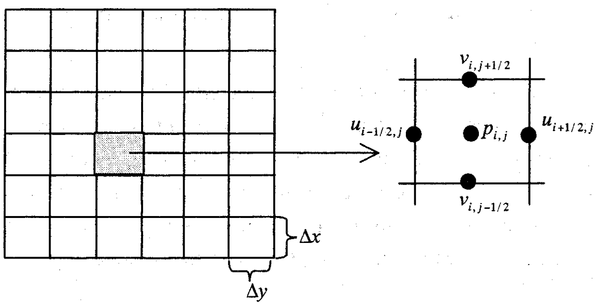

図 1　MAC格子(セル)

4．レベルセット法(Level-Set Method)

レベルセット法[2]は、1988 年に Stanley Osher と James A.Sethian により提案された陰的境界面追跡法である。

従来の CFD(Computational Fluid Dynamic)手法は、新しい時刻 n+1 の状態を時刻 n の状態から陽的に方程式を反復計算する方法である。そこで、流れの界面を小さなセグメント(segment)に分割し、そして速度場中に各セグメントの運動軌跡を追跡する。ところで、セグメント数によって画面が滑らかになったり、粗くなったりすることもある。複数の界面の融合、分離或いは自己交差など複雑な表面運動を表現するのは難しい。

一つの計算領域中で各域（例えば、液相と気相）を区別して、境界面形状を表現するレベルセット法は、時間と空間を統合し、新しいレベルセット関数 $\varphi(\vec{x},t)$ を宣言する。レベルセット関数 $\varphi(\vec{x},t)$ は以下の特徴がある：

$$\varphi(\vec{x},t) > 0 \quad \text{for} \quad \vec{x} \in \Omega$$

$$\varphi(\vec{x},t) < 0 \quad \text{for} \quad \vec{x} \notin \Omega$$

$$\varphi(\vec{x},t) = 0 \quad \text{for} \quad \vec{x} \in \partial\Omega = \Gamma(t)$$

ここでは、Ω は流れ領域であり、$\Gamma(t)$ は境界面(zero level set)の時間関数である。この方法で、

Sussman ら[5]が提案するレベルセット関数$\varphi(\bar{x},t)$の具体的な表現は、初期値$\varphi(\bar{x},0)$における流体境界面からの符号付き距離で定義するものである。これらの計算領域内の各点がφの正負と対応して各域と意味付けされ、$\varphi=0$の等値面が両域境界面位置であると陰的に表現される。

各点のレベルセット関数$\varphi(\bar{x},t)$の絶対値は、その点から最も近い境界面までの距離であるので、距離関数(distance function) としての等高線のような性質が備わっている。

$$|\nabla\varphi|=1 \quad (4)$$

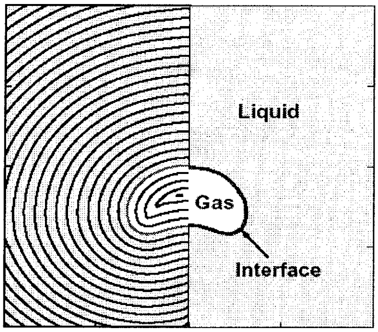

図2 等高線のようなレベルセット関数値(左)、境界面(右)

連続性からレベルセット関数$\varphi(\bar{x},t)$は以下の方程式を満たす。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\bar{u}\cdot\nabla\varphi=0 \qquad (3)$$

5．流体 CG

Foster と Metraxas[4]が MAC 法に基づいて、3 次元で Navier-Stokes 方程式を解決する手法を提案した。質量ない粒子を使用して、流体運動を追跡する粒子法が現実的な複雑運動も厳密的に再現することができる。しかし、陽的関数（Spline Method）によって、流体境界面である粒子から滑らかな且つ複雑な表面に変換することが大変に困難である。

本研究では、レベルセット法を用いて綺麗な流体画像を目的として改善を行う。Navier-Stokes 方程式からの速度値を利用して、式(3)によって新しい時刻のゼロレベルを流体の境界面として見つける。

レベルセット法がユークリッド手法であるので、質量を損失する可能性がある。特に流体について飛沫のところで損失がよく発生することを分かっている。実際に質量保存のためにはいくつかの工夫を施す必要がある。一方粒子法がラグランジュ手法であり、質量保存則に満たす。本研究では、粒子法とレベルセット法を同時に使用する修正策が以下のように述べる。

1. 曲率kがある閾値k_0より大きい時に、レベルセット関数$\varphi(\bar{x},t)$が少し小さくなる。
   $\varphi'=\varphi-o(k) \quad (5)$
2. ゼロレベル境界面に一定の距離で離れる個別粒子を中心として新しいレベルセットを自動的に生成する。

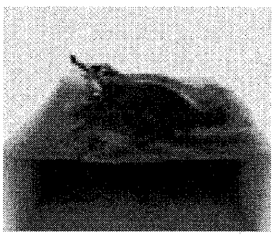

図3　3次元流体 CG

6．終わり

実験結果を見ると、レベルセット法を用いてゼロレベルを追跡した。幾何の複雑さと関係なく、滑らかな境界面を可視化することができる。複雑な境界条件と測定条件を導入し、より実際的な流れCG も実現できる。

今後、レベルセット法を用いて、複雑境界を持つ他の自然現象を可視化することも予定している。

参考文献：

[1] Harlow, F.H., and E. Welch, "Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluids with Free Surface," Phys. Fluids, Vol. 8, p. 2182, 1965.

[2] Stanley Osher , James A. Sethian, "Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations", Journal of Computational Physics, v.79 n.1, p.12-49, Nov. 1988

[3] Foster,N., Fedkiw,R. 2001. "Practicle Animation of Liquids". In Proceeding of SIGGRAPH 2001, ACM Press / ACM SIGGRAPH, Computer Graphics Proceedingd, Annual Conference Series, ACM, 23-30

[4] Foster, N. and Metaxas, D., "Realistic animation of Liquids", Graphical Models and Image Processing 58, 471-483(1996)

[5] M. Sussman, P. Smereka and S. Osher, A Levelset Approach for computing solutions to incompressible two-phase flow, J. Comp. Phys., vol. 114, (1994), pp. 146-159.