

空間充填曲線と画像処理応用

鎌田 清一郎

早稲田大学大学院情報生産システム研究科

あらまし: G. ペアノ (Peano) は, 1890 年『平面領域内の全ての点を通過するような曲線』を発見し, その存在を明らかにした. 現在, 線分を単位超立方体全体へ移すこのような連続曲線は, 空間充填曲線, あるいはペアノ曲線と呼ばれている. 空間充填曲線の中で, 応用研究の最も多い曲線はヒルベルト曲線である. 例えば, ヒルベルト曲線の応用としては画像圧縮, スペクトル画像分類, データベース情報検索, 計算機ホログラムなど, 様々な分野に及ぶ. 本論文では, 空間充填曲線について定義と 3 つの例を紹介し, 次にヒルベルト曲線を中心とした画像処理への応用研究を幾つか概観する.

Space filling curve and image processing application

Sei-ichiro KAMATA

Graduate School of Information, Production and Systems,
Waseda University

Abstract: In 1890, G. Peano found a curve which passes through all points in a space and proved its existence. So far such a continuous curve which maps a unit interval into a unit hypercube is called a space-filling curve (SFC) or a Peano curve. There are several applications in the area of image processing, computer graphics, database retrieval, etc. Among the SFC's, the most applicable curve is a Hilbert curve. This paper describes the definition and some examples of the SFC, and then overviews image processing applications of the SFC, especially the Hilbert curve.

1 はじめに

素朴的集合論を提唱した G. カントール (Cantor) は『線分上の点と正方形内の点との 1 対 1 対応の存在』を発見し, 数学会を驚かせた. しかし, E. ネット (Netto) は, この写像が必ず不連続となることを証明したのである. その結果, 数学者の関心は, 連続となる全射写像が存在するかという点に移っていった. 一般に, ある区間から平面への連続写像が曲線と呼ばれることから, この問題は『平面領域内の全ての点を通過するような曲線は存在するのか?』ということになる. これに対し, G. ペアノ (Peano) は, 1890 年この曲線を発見し, その存在を明らかにした [15]. 現在, 線分を単位超立方体全体へ移すこのような連続曲線は, 空間充填曲線, あるいはペアノ曲線と呼ばれている.

工学的には, 無数に存在するような平面内の点を考える必要がないので, 有限個の点を辿る曲線を考えればよい. 空間充填曲線の中で, 応用研究の最も多い曲線はヒルベルト曲線である. 例えば, 2 次元の場合のヒルベルト曲線は, 図 1 のように画像の空間 4 分割表現になっている. したがって, この場合, ヒルベルト曲線に沿った画像走査 (ヒルベルト走査) 順の 4 分木表現を用いて画像を表現する. また, ヒルベルト走査により画像の 1 次元データが得られるが, この周波数スペクトルを見ると, ラスタ走査より低域にエネルギーがより集中することがわかる. この近傍保存性の良さから画像圧縮に利用した研究が数多くなされている. 本論文では, まず, 空間充填曲線についての定義とヒルベルト曲線, ペアノ曲線, シェルピンスキー曲線の例を紹介し, 次にその画像処理の応用研究を幾つか概観する.

2 空間充填曲線

2.1 空間充填曲線の定義

本節では空間充填曲線の定義について述べる。まず、順像を定義 1 に示す。

定義 1 f が n 次元ユークリッド空間 (E^n) の部分集合から m 次元ユークリッド空間 (E^m) 内への関数であれば、 $A \subseteq E^n$ における

$$f_*(A) = \{f(x) \in R(f) \mid x \in A \cap D(f)\}$$

を f による A の順像と呼ぶ。ここで、 $D(f)$ 、 $R(f)$ は各々、関数 f の定義域および値域である。

次に、定義 1 を用いて曲線を次のように定義する。

定義 2 $f: I \rightarrow E^n$ が連続であるとき、その像 $f_*(I)$ を曲線と呼ぶ。また、

$$x = f(t), \quad t \in I$$

を曲線 $C = f_*(I)$ の媒介変数表示と呼ぶ。

定義 1 と定義 2 より、空間充填曲線を表す連続写像 f は次のように定義される。

定義 3 $f: I \rightarrow E^n$ ($n \geq 2$) が連続かつ $J_n(f_*(I))$ であれば、 $f_*(I)$ は空間充填曲線と呼ばれる。

ただし、 f が空間充填曲線を生成するならば、前節で述べたように、これは全射写像ではあるが、全単射写像ではない。つまり、空間充填曲線は重複点 (媒介変数の相異なる値に対応する同一の点) が無数にあることも許されるとして作った曲線である。従って、重複点を含まないジョルダン曲線 (単純閉曲線) は空間充填曲線になりえないことが分かる。

2 次元の場合を例にとれば、空間充填曲線とはユークリッド平面 E^2 上の連続曲線、すなわち線分 $I = [0, 1]$ から E^2 への連続写像 f による像 $f(I)$ で、正方形全体をうめつくすものである。これは、像 $f(I)$ が正のジョルダン測度 (2 次元であれば面積、3 次元であれば体積に相当する量) をもつ連続写像 f と言い替えることができる。

2.2 空間充填曲線の例

G. ペアノは演算子

$$\kappa t_j = 2 - t_j \quad (t_j = 0, 1, 2)$$

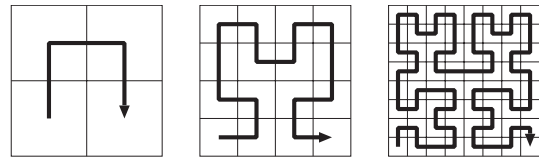


図 1: ヒルベルト曲線の例

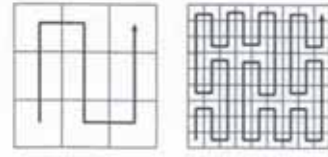


図 2: ペアノの空間充填曲線

を使い、 $I = [0, 1]$ から $Q = [0, 1]^2$ への写像 f_p を以下のように定義し、これが連続な全射写像であることを示した。

$$f_p(0_3 t_1 t_2 t_3 \dots) = \begin{pmatrix} 0_3 t_1 (\kappa^{t_2} t_3) (\kappa^{t_2+t_4} t_5) \dots \\ 0_3 (\kappa^{t_1} t_2) (\kappa^{t_1+t_3} t_4) \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 κ^m は、 κ を m 回繰り返し適用することを意味する。これが G. ペアノが発見した空間充填曲線である。

しかし、1890 年の G. ペアノの論文では、この解析的な表現に対する幾何学的な解釈は与えていなかった。E.H. ムーア (Moore) の言葉を借りると、「曲面充填曲線の現象を幾何的なイメージとして明らかにしたのはヒルベルトであった」。D. ヒルベルトは初めて空間充填曲線をつくり出す幾何的な生成手順を示したのである [4]。彼によって示された空間充填曲線を図 1 に示す。この曲線が、ヒルベルト曲線と呼ばれる空間充填曲線である。さらに、彼は、式 (1) に示されるペアノの空間充填曲線に対する幾何的解釈を与えている。その曲線は図 2 に示されるものである。この他にも図 3 に示されるようなシェルピンスキーにより示された空間充填曲線がある。

これまでに、3 つの空間充填曲線の例を示したが、共通する性質として、次の性質があげられる。

性質 上述の三つの曲線の座標関数はいずれもいたるところ微分不可能である。

ここで、D. ヒルベルトの言葉を借りれば、これらの写像は「いたるところ連続で、同時に、いたるところ微分不可能な写像の簡単な例」である。これ以外

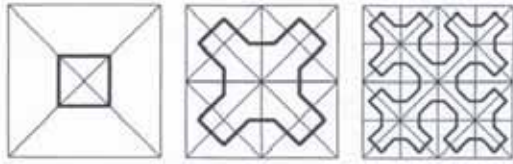


図 3: シェルピンスキーの空間充填曲線

にもいくつかの空間充填曲線が存在するが、ここでは、省略する (参考文献 [14]).

3 画像処理応用

画像処理への応用研究は、1985 年以降急速に多くなっており、様々な分野に及ぶ。ヒルベルト曲線を例にとると、画像圧縮、スペクトル画像分類、データベース情報検索、計算機ホログラムなどへの応用がある [7, 8, 9].

3.1 画像走査

空間充填曲線の計算方法は、応用数学の分野で主として研究されてきた。本節では、画像を空間充填曲線に沿って走査することを考え、画像走査としてのヒルベルト走査と一般化ヒルベルト走査を紹介する。

3.1.1 ヒルベルト走査

N 次元のヒルベルト曲線を生成するアルゴリズムは、Butz の方法 [3] と Quinqueton の方法 [16] の 2 種類のみがあった。しかし、Kamata et al. [10] はグレイコードの概念を用いた新たなアルゴリズムを見出した。これは、従来の 2 種類の方法よりも高速計算が可能である。本項では、2 次元正方形領域を対象とし、2 種類のルックアップテーブル (ターミナルテーブル、インダクションテーブル) を利用した非再帰的なヒルベルト走査 [5, 6] について簡単に述べる。

サイズ $2^M \times 2^M$ の正方形領域に対し、図 4 に示すようなアドレス割当を行なう。図 4(a) では 4 分割後の領域に対して左下 00, 左上 01, 右下 10, 右上 11 のアドレスを割り当てる。2 回目の 4 分割後のアドレス割当は同図 (b) のように下位 2 ビットが付加される。従って、 M 回の分割操作後の 1×1 の画素のアドレスは $2M$ ビットの 2 進数表現によって表すことができる。また、分割後の走査パターンとしては図 5 に示す 4 種類を考える。ここで γ は曲線番

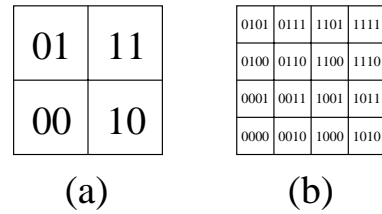


図 4: 4 分割領域のアドレス割当

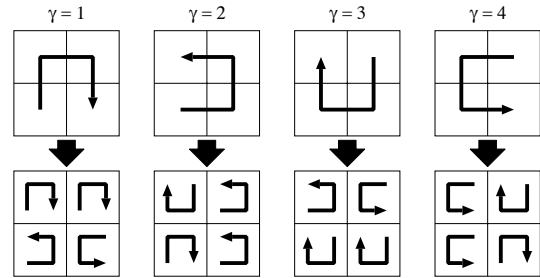


図 5: 分割領域の走査パターン

号である。各分割領域でのアドレスと曲線番号は、分割前の領域の走査パターン (分割後の 4 領域の接続情報) と分割領域での走査の順番 (何番目に走査する画素かを示す順序情報) から決定できる。そこで、この 2 つの情報 (アドレスと走査順序) を予めテーブル化しておき、必要な情報を逐次参照し、再帰的な計算を除去するのがルックアップテーブル参照による計算法の基本的な考え方である。 γ_j を j 回分割時の曲線番号、 i_j を j 回分割時の走査の順番とすると、アドレス参照用のターミナルテーブル $T_{trm}[\gamma_j][i_j]$ は

$$\begin{aligned} T_{trm}[1] &= [00, 01, 11, 10], \\ T_{trm}[2] &= [00, 10, 11, 01], \\ T_{trm}[3] &= [11, 10, 00, 01], \\ T_{trm}[4] &= [11, 01, 00, 10], \end{aligned}$$

となり、曲線番号参照用のインダクションテーブル $T_{ind}[\gamma_j][i_j]$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} T_{ind}[1] &= [2, 1, 1, 4], \\ T_{ind}[2] &= [1, 2, 2, 3], \\ T_{ind}[3] &= [4, 3, 3, 2], \\ T_{ind}[4] &= [3, 4, 4, 1]. \end{aligned}$$

ルックアップテーブル参照によるヒルベルト曲線生成の具体的なアルゴリズムは次のようになる。

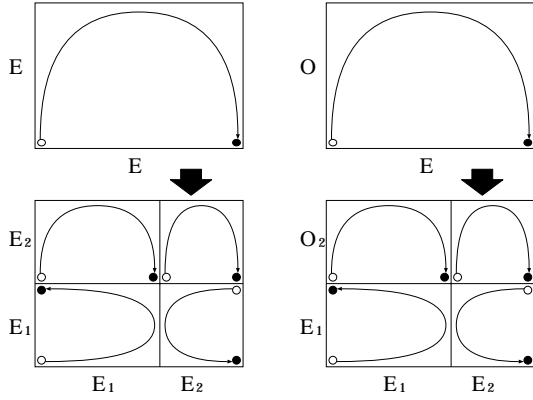


図 6: 長方形領域の分割規則

Hilbert-address-order(γ_M, M)
for $i_M = 1, 2, 3, 4$
{ $z_M = T_{trm}[\gamma_M][i_M]; \quad \gamma_{(M-1)} = T_{ind}[\gamma_M][i_M];$
for $i_{(M-1)} = 1, 2, 3, 4$
{ $z_{(M-1)} = T_{trm}[\gamma_{(M-1)}][i_{(M-1)}];$
 $\gamma_{(M-2)} = T_{ind}[\gamma_{(M-1)}][i_{(M-1)}];$
:
for $i_3 = 1, 2, 3, 4$
{ $z_3 = T_{trm}[\gamma_3][i_3]; \quad \gamma_2 = T_{ind}[\gamma_3][i_3];$
for $i_2 = 1, 2, 3, 4$
{ $z_2 = T_{trm}[\gamma_2][i_2]; \quad \gamma_1 = T_{ind}[\gamma_2][i_2];$
for $i_1 = 1, 2, 3, 4$
{ $z_1 = T_{trm}[\gamma_1][i_1];$
output $\langle z_M z_{M-1} \cdots z_3 z_2 z_1 \rangle;$
}}}} \cdots \}

N 次元空間における具体的なアルゴリズムは文献 [10] を参照されたい。

3.1.2 一般化ヒルベルト走査

本項では、ヒルベルト曲線の走査領域を超立方体領域から超直方体領域に拡張した一般化ヒルベルト走査 [2] について紹介する。ただし、 N 次元の場合は説明が複雑になるので、2次元の場合について簡単に説明する。

長方形領域へ拡張した擬似ヒルベルト走査は、分割及びその後の連結が図 6 (E, O は各辺における画素数が各々偶数及び奇数個であることを表す) に示す形式に従うものとする。これは次のような分割規則である。

- 偶数長 E の辺：分割点が中点に最も近くなる

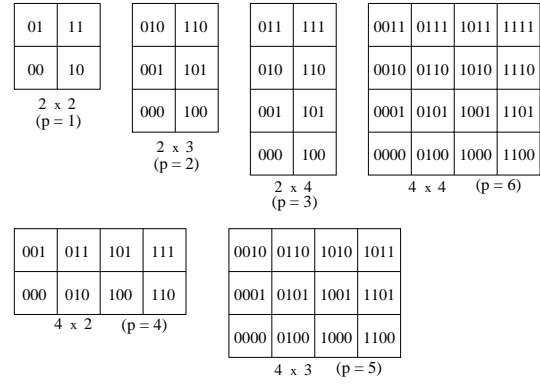


図 7: 6 種類の長方形プレート

ように偶数長と偶数長の辺で分割 ($E_2 \leq E_1$)

- 奇数長 O の辺：分割点が中点に最も近くなるように奇数長を偶数長の辺で分割 ($E_1 < O_2$)

辺長 $a \cdot 2^M$ の線分は、 M 回の 2 分割により辺長 a の 2^M 個の線分に分割される。このことから、線分長 l が

$$2 \times 2^M \leq l < 4 \times 2^M$$

であれば、 M 回の 2 分割の結果、 l は線分長 2, 3, 4 の組合せから成る 2^M 個の線分に分割される。縦横の線分長において、

$$\begin{aligned} 2 \times 2^M &\leq l_v < 4 \times 2^M, \\ 2 \times 2^M &\leq l_h < 4 \times 2^M, \end{aligned} \quad (2)$$

を満たす長方形領域では、 M 回の 4 分割の結果、2, 3, 4 の線分長をもつ 6 種類の長方形プレート (図 7 参照) が生成されることが分かる。そこで、図 7 に示すアドレス割当を行ない、各アドレスをプレート毎のターミナルテーブル $PT_{trm}[p][\gamma][i]$ に格納する。例えば、 $PT_{trm}[1][1][1] = 00$, $PT_{trm}[3][1][8] = 100$ のように参照する。ここで、 p は長方形プレート番号である。したがって、正方形の場合と同様の 4 分割操作を M 回行った後に、プレート毎のターミナルテーブルによるアドレス割当を加えることで、長方形領域に対応したアドレス割当が可能となる。

3.2 画像圧縮応用

国際標準化された JPEG2000 や MPEG4 などに代表される画像圧縮技術には、DCT あるいはウェーブレット変換などの変換符号化が主流である。空間充填曲線の画像圧縮への応用研究は 1980 年代後半から論文発表が多くなり、空間充填曲線をその要素

技術へ適用するための試みがいくつかなされていた。本節では、可逆圧縮と非可逆圧縮に分けて説明する。

3.2.1 可逆圧縮手法

静止画像の可逆圧縮では、Lempel and Ziv [12] が最初にヒルベルト曲線の応用を理論的に検討したのである。また、Memon et al. [13] は予測符号化に空間充填曲線を適用した場合の圧縮効率について理論的に検討した。近年、小林他 [11] は、走査方法に着目し、予めテンプレートとして与えられた複数の走査法を利用して予測符号化を改良した新たな可逆圧縮手法を提案した。これは、人工画像を含む静止画像を対象とし、図8のように、画像を複数の領域(例えば、正方形領域)に分割し、各領域において画像の性質に見合った走査方法を適応的に見つけて効率的な画像圧縮を行うものである。国際標準化方式 JPEG, JPEG-LS, JPEG2000 の可逆圧縮方式と比較し、実時間処理でこれらの圧縮性能を上回る結果を得た。

3.2.2 非可逆圧縮手法

静止画像の非可逆圧縮では、Stevens et al. [18] が3次元ヒルベルト曲線を用いてカラー画像圧縮への適用を検討した。ヒルベルト走査等により画像の1次元データが得られるが、その周波数スペクトルを見ると、ラスタ走査より低域にエネルギーがより集中することがわかる。この近傍保存性の良さから非可逆圧縮への応用研究が盛んになったのである [1, 8]。このような立場からの論文発表が数多くあるのでここでは省略する。

動画の非可逆圧縮では、Schuster et al. [17] が可変ブロックサイズのブロックマッチングによる動き推定にヒルベルト走査に基づく4分木表現を利用した。また、Wang et al. [19] は、動き推定におけるブロックマッチングをヒルベルト走査後の1次元系列に対して行う方式を検討したが、いずれも動き補償の計算量削減が目的である。

4 まとめ

本論文では空間充填曲線について定義とペアノ、ヒルベルト、シェルピンスキーらによる空間充填曲線の例を紹介し、次にその画像処理への応用研究を幾つか概観した。空間充填曲線はフラクタルと同じように扱われるが、数学的には全く異なった概念で

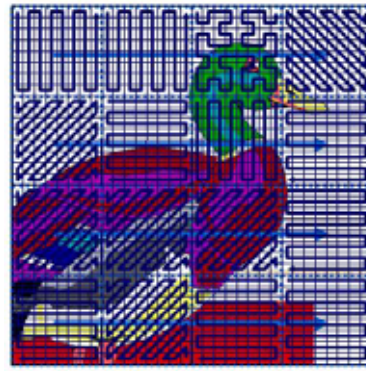


図 8: 走査方法に着目した画像圧縮

ある。近年、コンピュータグラフィックスへの応用研究が多くなっており、これらについても今後研究報告としてまとめる予定である。

5 謝辞

本論で紹介した研究の一部は、財団法人北九州産業学術推進機構 (FAIS) のヒューマンテクノクラスター推進センターの研究プロジェクトの援助を受けた。ここに感謝の意を表す。

参考文献

- [1] 坂東幸浩, 西修功, 鎌田清一郎, “ヒルベルト走査を用いた時空間領域分割による高速動画圧縮法,” 映像情報メディア学会誌, vol. 53, no. 4, pp. 559–564, 1999.
- [2] 坂東幸浩, 鎌田清一郎, “ N 次元空間における一般化ヒルベルト走査の一計算法”, 電子情報通信学会論文誌 (A), Vol. J83-A, No. 12, pp. 1368–1381, 2000.
- [3] A.R. Butz, “Convergence with Hilbert’s space filling curve,” *Journal of Computer and System Science*, vol. 3, pp. 128–146, 1969.
- [4] D. Hilbert, “Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück,” *Math. Ann.*, vol. 38, pp. 459–460, 1891.
- [5] 鎌田清一郎, ペレス・アーノルフォ, 河口英二, “2, 3次元空間におけるヒルベルト曲線の一計算法”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol. J74-DII, no. 9, pp. 1217–1226, 1991.
- [6] S. Kamata, R.O. Eason and E. Kawaguchi, “An implementation of Hilbert scanning algorithm and its application to data compression,”

- sion,” *IEICE Trans. Information and Systems*, vol. **E76-D**, no. 4, pp. 420–428, 1993.
- [7] 鎌田清一郎, 新見道治, 河口英二: “ヒルベルト曲線を利用した多次元画像の対話型解析法”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol. **J77-D-II**, no. 7, pp. 1255–1264, 1994.
- [8] 鎌田清一郎, “ヒルベルト走査を利用した濃淡画像の情報圧縮に関する考察”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), vol. **J80-D-II**, no. 2, pp. 426–433, 1997.
- [9] S. Kamata, N. Nishi, Y. Bandoh, “Color image compression using a Hilbert scan,” *Proc. of the 14th International Conference on Pattern Recognition*, pp. 1575–1578, 1998.
- [10] S. Kamata, R. Eason, and Y. Bandou, “A new algorithm for N -dimensional Hilbert scanning,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. **IP-8**, no. 7, pp. 964–973, 1999.
- [11] 小林 正明, 鎌田清一郎, “複数走査を用いた自然画像の可逆圧縮方法”, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), Vol. **J87-D-II**, No. 8, pp. 1603–1612, 2004.
- [12] A. Lempel and J. Ziv, “Compression of two-dimensional data,” *IEEE Trans. Information Theory*, vol. **IT-32**, no. 1, pp. 2–8, 1986.
- [13] N. Memon, D. Neuhoff, S. Shende, “On scanning techniques for lossless image coding with limited context supports,” *Proc. of IEEE Int. Conf. on Image Processing*, 1998.
- [14] H. Sagan, “Space filling curve”, *Springer Verlag*, NY, 1994, (鎌田清一郎 訳, “空間充填曲線とフラクタル”, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1998).
- [15] G. Peano, “Sur une courbe qui remplit toute une aire plane,” *Math. Ann.*, vol. **36**, 1890.
- [16] J. Quinqueton and M. Berthod: “A locally adaptive Peano scanning algorithm,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. **3**, no. 4, pp. 403–412, 1981.
- [17] Schuster, G.M., Katsaggelos, A.K. ” A video compression scheme with optimal bit allocation among segmentation, motion, and residual error,” *IEEE Trans. Image Processing*, vol. 6, no. 11, pp. 1487–1502, 1997.
- [18] R.J. Stevens, A.F. Lehar and F.H. Preston, “Manipulation and presentation of multi-dimensional image data using the peano scan,” *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. **PAMI-5**, no. 9, pp. 520–526, 1983.
- [19] Wang, Y., Wang, Y., Kuroda, H. ” A novel block matching algorithm for motion estimation,” *IEICE Trans. Communications*, vol. **E81-B**, no. 3, pp. 575–585, 1998.