

## 同次 Catmull-Clark 細分割曲面生成のための 有理 3 次 B-spline 曲線網の補間

柳瀬 裕介\* 吉田 典正\*\* 山口 富士夫\*\*\*

Catmull-Clark 細分割を 4 次元同次座標で処理することにより, 制御点に付与されるウェイト  $w$  成分を制御し, 特徴線の強弱の設定などより表現能力の高い細分割曲面を生成することができる. しかし  $w$  の変更によって細分割曲面の通過点が大きく変化してしまうため,  $w$  の設定はデザイナーにとって捉え易いものではない. そこで (ユニフォーム) 有理 3 次 B-spline 曲線網を与え, それらを補間するような同次 Catmull-Clark 細分割によって曲面を生成し, 形状モデリングを行うためのアルゴリズムを提案する. 本手法では有理 3 次 B-spline 曲線が形状モデリングの指標となることから,  $w$  成分の効果を曲線網から視覚的に捉えることができ, 細分割曲面の形状の想定, 生成が容易になる.

### Rational Cubic B-spline Curves Interpolation for Homogenized Catmull-Clark Subdivision Surfaces Generation

Yusuke Yanagase\*, Norimasa Yoshida\*\*, and Fujio Yamaguchi\*\*

We propose a surface modeling method with homogenized polyhedral subdivision techniques. The homogenized subdivision technique uses, in the homogeneous vector space, the algorithm that Catmull and Clark proposed in 1978. In our method, we can control the degree of roundness/sharpness of limit surfaces by changing associated weight values. Since it is a bit difficult for designers to predict the shape of limit surfaces of homogenized Catmull-Clark subdivision and it is cumbersome to change weight values, we propose an algorithm that generates homogenized Catmull-Clark subdivision surfaces interpolating uniform rational cubic B-spline curves.

#### 1. はじめに

CAD/CAM による自動車などの工業製品の意匠設計は, 自由曲面を用いたものが多く存在する. 現行の CAD/CAM では NURBS, B-spline 曲面などのパラメトリック曲面による表現が一般的である. 本研究ではこれらパラメトリッ

ク曲面のように有理曲面, すなわち制御点のウェイト  $w$  を扱うことができる細分割曲面を発生する手法として 4 次元同次座標系[1]において処理 (同次処理) する同次 Catmull-Clark 細分割[6]を扱う. 自由曲面形状モデリングにおいて, 頂点あるいは曲線を通して (補間する) ことはデザイナーが自由に工業製品等の意匠設計を行う上で不可欠な要素である.

また, 同次 Catmull-Clark 細分割は細分割曲面の形状を  $w$  の設定によって制御し, 特徴線

---

\*株式会社ニコン NIKON CORPORATION

\*\*日本大学 Nihon University

\*\*\*早稲田大学 Waseda University

の表現など曲面の曲率を制御することができる。しかし得られる曲面の形状は  $w$  を設定する制御点が多くなるほど想定しにくくなる。そこで指標を設けることによって  $w$  設定を支援することが必要となる。

上記2点の解決策として、有理3次 B-spline 曲線を補間する同次 Catmull-Clark 細分割によって形状モデリングを行う手法を構築する。これによって、曲線網を形状モデリングの指標とし、かつ、 $w$  の設定も支援することが可能になる。

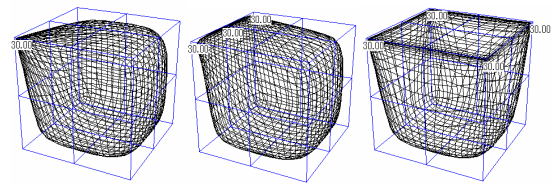
## 2. 同次 Catmull-Clark 細分割

同次 Catmull-Clark 細分割[6]は、3次元射影空間に付随するベクトル空間である4次元同次ベクトル空間で定義される。通常の Catmull-Clark 細分割[2]とは異なり、 $(X, Y, Z, w)$  の4つの成分を用いて細分割が行われ、 $w$  成分の持つ意味は NURBS におけるそれと類似している。同次 Catmull-Clark 細分割は、4次元同次ベクトル空間で細分割を行った後、(表示の際に)3次元ユークリッド空間に射影することによって実行される。

図1に、同次 Catmull-Clark 細分割の例を示す。図中に示す数字は、頂点の  $w$  成分の値である。 $w$  の値が1の場合は通常の Catmull-Clark 細分割に一致し、 $w$  の値を大きくしていくと、極限曲面はその頂点に近づいていく。このような特徴は、DeRose らの手法[5]に似ているが、同次 Catmull-Clark では細分割のマスクの変更を必要としない。従って、同次 Catmull-Clark 細分割は、Catmull-Clark 細分割が持つ本来の性質をそのまま維持するという特徴を持つ。

## 3. 有理3次 B-spline 曲線の補間

Nasri ら[3]は polygonal complex (多角形複体) を用いて、ユニフォームな3次 B-Spline 曲線を



(a) 頂点強調 (b) 稜線強調 (c) 面分強調

図1 同次 Catmull-Clark 細分割

断面曲線として与えると、その曲線に収束する Catmull-Clark 細分割を提案している。図2に示す正則な制御メッシュにおいて  $V_0, V_1, \dots, V_n$  を制御点とする3次 B-spline 曲線を補間するような曲面を生成するためには、次式によって、 $V_i (0 \leq i \leq n)$  を  $V'_i$  に移動させた制御メッシュを用いて細分割を行えばよい。ただし、 $V_{iup}$  及び  $V_{idown}$  は、 $V_i$  に隣接する制御点であり、任意の座標値を持つ。

$$\begin{aligned} & [V'_0 \ V'_1 \ \dots \ V'_n] \\ &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{0up} & V_{1up} & \dots & V_{nup} \\ V_0 & V_1 & \dots & V_n \\ V_{0down} & V_{1down} & \dots & V_{ndown} \end{bmatrix} \quad (1) \end{aligned}$$

本研究では、この手法を同次座標において処理する。すなわち同次 Catmull-Clark 細分割に適用することによって、ユニフォームな有理3次 B-spline 曲線を補間させることができる。

図3は  $w$  の値を変化させた有理3次 B-spline 曲線を補間する細分割曲面を示している。

## 4. 形状モデリングの手順

本研究における形状モデリングの手順を示す。

### (1) ソリッドモデラによる骨組み作成

ソリッドモデラを用いて形状モデリング対象物の骨組みを作成する。(図4(a)参照)

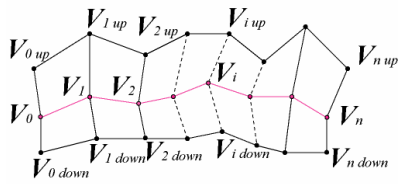


図2 水平方向3列の正則な制御メッシュ

(2) 補間曲線の割り当て

骨組みの稜線の両端点を補間曲線セグメントの制御点の端点とし、有理3次 B-spline 曲線を割り当てる。このとき骨組みの1稜線に対して1セグメントの有理3次 B-spline 曲線が対応する。(図4(b)参照)

(3) 補間曲線網を含む制御メッシュの面分割

構築される制御メッシュの面分が全て4辺形であり、新たに生成される制御点が正則頂点になるように有理3次 B-spline 曲線網を割り当て、制御メッシュの面分を格子状に分割する。(図4(c)参照)

(4) 制御点の座標値決定

細分割曲面が割り当てた有理3次 B-spline 曲線に収束するように制御点の座標値を決定する。有理3次 B-spline 曲線補間を行うべき制御点に対しては有理3次 B-spline 曲線補間アルゴリズムを適用し、骨組みの端点、どちらにも属さない制御点についても座標値を決定する。これらの座標値は一括決定する。(図4(d)参照)

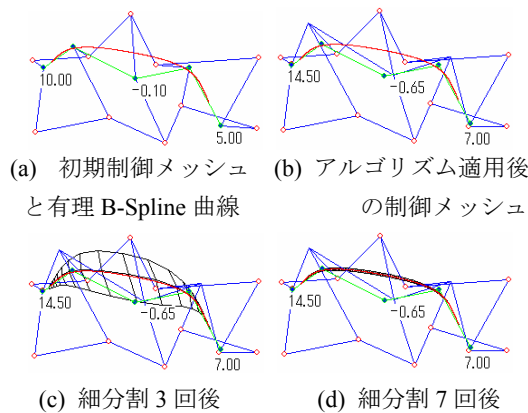
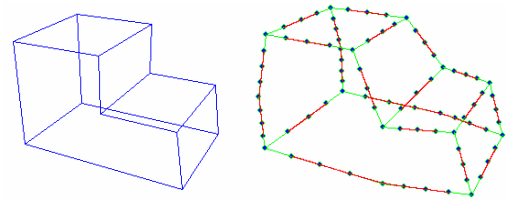
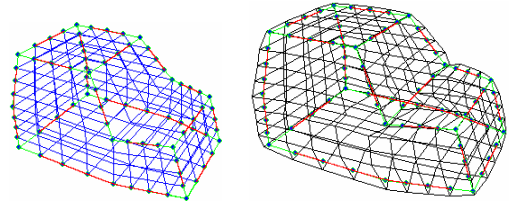


図3 同次 Catmull-Clark 細分割における有理3次 B-spline 曲線補間



(a) 骨組み作成

(b) B-spline 曲線の割り当て



(c) 面分の分割

(d) 制御点の座標値決定

図4 形状モデリングの手順

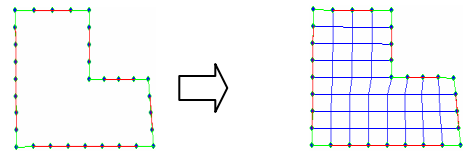


図5 面分の格子状分割

5. 骨組み作成から面分割

有理3次 B-spline 曲線網を割り当てた制御メッシュ(4節の手順(1), (2))に対して、補間曲線で囲まれる多面体の各面分を格子状に分割する。分割によって新たに生成される制御点の価数は全て4となる(図5)。

従って、次に示すように面分の分割後に、新たに生成される制御点に特異点が含まれるような位相を持つ面分は、本手法が扱える位相からは除外する。この理由は後述の制御点の座標値決定アルゴリズムによるものである。

(a) 向かい合う補間曲線の制御点数が対応していない場合(図6(a))

(b) 面分は4辺形に分割できるが、特異点が生じられる場合(図6(b))

(c) 有理3次 B-spline 曲線の制御点群は4辺形で囲まれるが、4辺形でない面分が生成される場合(図6(c))

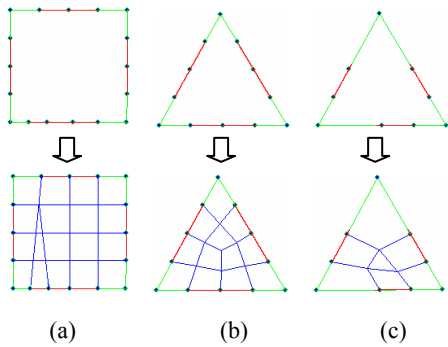


図6 本手法の対象外となる位相

## 6. 制御点の座標値決定

面分割後の制御メッシュの制御点は3種類に分類し、次の方法によって座標値を決定する。

- (1) 補間曲線制御点の端点を除く制御点 (図7の三角の点. 図を分かりやすくするために、前方を向いている面上の点にのみしるしを付けた.)
- (2) 補間曲線の制御点の端点 (図7の四角の点)
- (3) (1), (2)以外の制御点 (図7の三角または四角以外の点)

以下、細分割曲面の制御点で添え字のないものは初期制御点、ダッシュは座標値決定後の制御点を指すものとする。

### (1) 補間曲線制御点の端点を除く制御点

補間曲線の制御点の端点を除く制御点の座標値決定方法は2章に示した有理3次 B-spline 曲線補間アルゴリズムを用いる。制御点群  $V_i$  ( $i$  は制御点番号) を補間曲線の制御点とし、式(2)によって決定する。

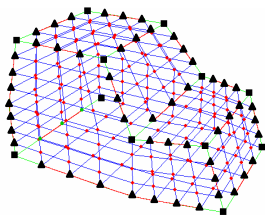


図7 制御点の分類

$$V_i' = \frac{1}{4}(-V_{i_{up}}' + 6V_i - V_{i_{down}}') \quad (2)$$

### (2) 補間曲線の制御点の端点

補間曲線の制御点の端点では何本もの補間曲線を接続する必要がある。従って、補間曲線の制御点の端点は一般的に特異点になる。特異点では、単純に有理3次 B-spline 曲線補間アルゴリズムを適用することはできない。

図8に  $V_0$  で示す補間曲線が接続する価数  $n$  の制御点では、 $n$ 本の曲線を補間するため、式(2)をそれぞれの曲線に対して適用し、その平均として求める。一般的に  $n$ 本の補間曲線が接続する端点では、

$$V_j' = \frac{3}{2}V_j - \frac{1}{4n} \left( \sum_{j=1}^n V_{up_j}' + \sum_{j=1}^n V_{down_j}' \right) \quad (3)$$

となる。

### (3) (1), (2)以外の制御点

(1), (2)以外の制御点は補間曲線の制御点でないものを指す。これらの制御点は補間曲線の制御点のように目標となる点が存在しない。そこで  $w$  成分については初期値を1とし、自由に設定することができるものとする。また、 $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  成分についてはユークリッド空間における補間曲線の制御点4点の線形結合によって決定する。図9において、外郭の稜線は補間曲

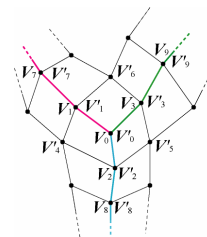


図8 価数3の特異点を含む制御メッシュ

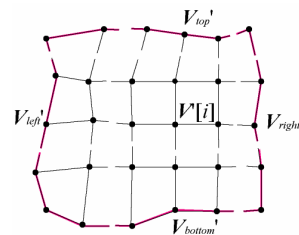


図9 補間曲線に囲まれた制御メッシュ

線の制御点である。(1), (2)以外の制御点 $V[i]$ に接続する4本の稜線を水平方向の左右に辿る。補間曲線の制御点に辿り着いたら、それまでに通過した制御点数の比によって2点の内分点を求め、垂直方向のそれと1:1で混ぜ合わせる。

$$v'[i] = \frac{1}{2} \left( \frac{n_{right} v'_{left} + n_{left} v'_{right}}{n_{left} + n_{right}} + \frac{n_{bottom} v'_{top} + n_{top} v'_{bottom}}{n_{top} + n_{bottom}} \right) \quad (4)$$

ただし、 $n_{right}, n_{left}, n_{top}, n_{bottom}$  は内分比を表す。ここで、4節手順(3)で定めた、補間曲線で囲まれる内部の制御点が全て正則であるという仮定では、補間曲線が囲む面分の形状は正方形・長方形である必要はなく、骨組みが凹な面分を持つ形状にも対応する。

以上3種類の最終的な制御点の座標値を決定するために、式(5)に示す連立方程式を立てる。制御メッシュ $M$ の制御点数を $l$ とし、補間曲線を割り当てた各制御点を

$$V[s] (V[s][0]=X_s, V[s][1]=Y_s, V[s][2]=Z_s, V[s][3]=w_s)$$

とする。ただし $0 \leq s \leq l-1$ であり、 $X_s, Y_s, Z_s, w_s$  は、上に述べた方法で決めた座標値である。式(5)において、 $\mathbf{A}$  は $l \times l$ 行列、 $\mathbf{V}$  は補間曲線の制御点を格納する $l \times 4$ の行列、 $\mathbf{V}'$  は座標値決定後の制御点で $l \times 4$ の行列で同次座標による表現である。

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{V}' \quad (5)$$

式(5)を解いて $\mathbf{V}'$ を求めるために $\mathbf{V}$ 及び $\mathbf{A}$ を設定する。以下に制御点の分類ごとに設定方法を示す。

(1) 補間曲線制御点の端点を除く制御点

$$\mathbf{A}[s][t] = \begin{cases} 4/6 & \text{if}(s=t) \\ 1/6 & \text{if}(\mathbf{V}[t] \text{が} \mathbf{V}[s] \text{の} up \\ & \text{または} down \text{の関係}) \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

$$V[s][0]=X_s, V[s][1]=Y_s, V[s][2]=Z_s, V[s][3]=w_s \quad (6)$$

(2) 補間曲線の制御点の端点

$$\mathbf{A}[s][t] = \begin{cases} 2/3 & \text{if}(s=t) \\ 1/3n & \text{if}(\text{edge}(\mathbf{V}[s], \mathbf{V}[t]) \in M, \mathbf{V}[t] \\ & \text{が} \text{補間曲線の} up \text{か} down) \\ 1/6n & \text{if}(\text{edge}(\mathbf{V}[s], \mathbf{V}[t]) \in M, \mathbf{V}[t] \\ & \text{が} \text{補間曲線の} up \text{または} down) \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

$$V[s][0]=X_s, V[s][1]=Y_s, V[s][2]=Z_s, V[s][3]=w_s$$

(3) (1), (2)以外の制御点

次式は $w$ を決定するものであり、

$$\mathbf{A}[s][t] = \begin{cases} 1 & \text{if}(s=t) \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

$$V[s][3]=w_s$$

となる。次式は、 $X, Y, Z$ 座標を決定し、

$$\mathbf{A}[s][t] = \begin{cases} -1/w'_s & \text{if}(s=t) \\ n_{right}/2(n_{left} + n_{right})w'_t & \text{if}(\mathbf{V}'[t] \text{の} V_{left}' = \mathbf{V}'[t]) \\ n_{left}/2(n_{left} + n_{right})w'_t & \text{if}(\mathbf{V}'[t] \text{の} V_{right}' = \mathbf{V}'[t]) \\ n_{bottom}/2(n_{top} + n_{bottom})w'_t & \text{if}(\mathbf{V}'[t] \text{の} V_{top}' = \mathbf{V}'[t]) \\ n_{top}/2(n_{top} + n_{bottom})w'_t & \text{if}(\mathbf{V}'[t] \text{の} V_{bottom}' = \mathbf{V}'[t]) \\ 0 & \text{(otherwise)} \end{cases}$$

$$V[s][0]=0, V[s][1]=0, V[s][2]=0$$

である。以上によって設定した $\mathbf{V}$ 及び $\mathbf{A}$ を用いて式(5)を解くことにより、 $\mathbf{V}'$ 全ての座標値を決定する。

## 7. 実験結果

4節に示した手順に従って、自動車のボディを例として形状モデリングを行った結果を図10に示す。

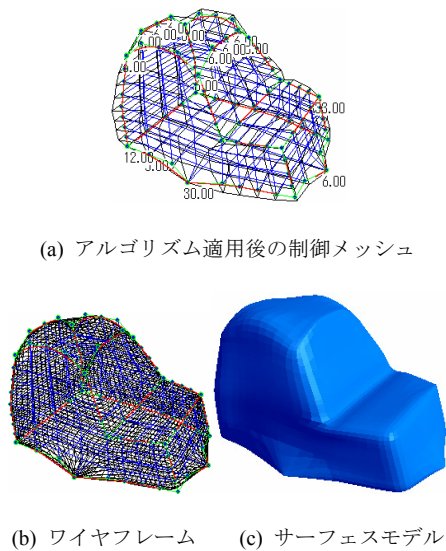


図 10 生成された制御メッシュと細分割曲面

図 10 より、有理 3 次 B-spline 曲線網を補間する細分割曲面を生成することができた。ただし、6 節で述べたように補間曲線の制御点の端点では有理 3 次 B-spline 曲線補間アルゴリズムを適用できないため、その付近では補間曲線と細分割曲面は完全には一致しない。

また、同次 Catmull-Clark 細分割では  $w$  の値を大きく設定した箇所ほど、特徴線として強く表現される。図 11 (a) は、三角で示した頂点の  $w$  を 10 に設定した場合（その他は  $w=1$ ）であり、細分割曲面に現われる特徴線の強さに違いが生じる。

## 8. おわりに

有理 3 次 B-spline 曲線を補間する同次 Catmull-Clark 細分割を提案した。これにより曲線網を形状モデリングの指標とすることができた。さらに、 $w$  の設定に関して、その効果を曲線の形状として捉えることができ、細分割曲面の形状の想定、及び、意図した形状の生成が容易になった。

今後の展望としては座標値決定方法を拡張

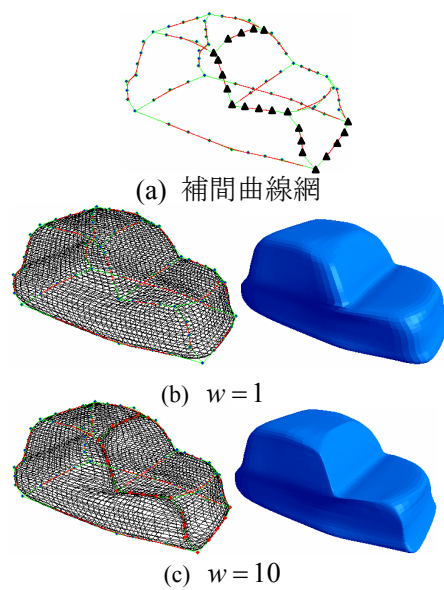


図 11  $w$  の値による細分割曲面の相違

して、扱うことのできる位相を拡張することなどが挙げられる。

## 参考文献

- [1] 山口富士夫: 4 次元理論による図形・形状処理工学, 日刊工業新聞社, (1996).
- [2] E.Catmull, J.Clark: Recursively generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes, Computer Aided Design, 10, 6, (1978) 350.
- [3] Ahmad Nasri, A. Abbas: Lofted Catmull-Clark Subdivision Surfaces, Proceedings of Geometric Modeling and Processing International 2002, pp. 83-93, Japan, (2002).
- [4] Joe Kuragano, Hiromasa Suzuki, Fumihiko Kimura: Generation of nc tool path for subdivision surface, In Proc.CAD/Graphics'2001, (2001)
- [5] Tony DeRose, Michael Kass, and Tien Truong, Subdivision surfaces in character animation, Computer Graphics(Proc. SIGGRAPH), 85-94, (1998).
- [6] 柳瀬祐介, 丹治和幸, 山口富士夫, 同次化 3 次 Catmull-Clark 細分割および同次化 Hybrid-Subdivision の形状制御性, 2003 年度精密工学会秋季大会.