

面と線に基づく細分割の拡張

川原田 寛[†] 杉原 厚 吉[†]

形状設計において、メッシュに対して施す「細分割 (subdivision)」は、任意位相の滑らかな曲面を生成する手法として有名である。また細分割はメッシュ上でのウェーブレット変換と深い係わり合いがあり、これを利用した多重解像度解析はメッシュの編集において非常に有効な手段となっている。我々はこの細分割の双対構造「面に基づく細分割 (dual subdivision)」を見出した。これは通常の細分割に対して射影幾何学における双対原理を適用することで得られたもので、双対性より従来の細分割と同様の性質を持っているだけでなく、細分割では解決できなかった問題を解決できる。

また、line geometry に基づく新たな細分割スキームを提案し、「線に基づく細分割 (line subdivision)」と名づける。この線に基づく細分割は、通常の細分割と面に基づく細分割を含んでおり、両者を統一的な支店で議論することを可能にする。

Expansions of Subdivision Based on Face and Line

HIROSHI KAWAHARADA[†] and KOKICHI SUGIHARA[†]

Subdivision is a well-known method for geometric design and for computer graphics, because the subdivision makes smooth surfaces with arbitrary topology. Moreover, there are many connections between subdivision and wavelet. So, multiresolution analysis derived by subdivision theory is extremely useful on mesh editing.

Here, we found out "dual subdivision" which is a dual structure of subdivision. Dual subdivision born from subdivision and the principle duality in projective geometry, and has similar properties with ordinary subdivision.

Moreover, we propose "line subdivision" based on line geometry. This new subdivision scheme includes ordinary subdivision scheme and dual subdivision scheme. So, we can discuss ordinary and dual subdivisions uniformly by line subdivision.

1. はじめに

1.1 形状表現

コンピュータグラフィクス (Computer Graphics) の分野では表示が高速であることからメッシュによる形状表現が一般に使われており、市販されている PC のビデオカードのほとんどが、メッシュに対応している。それはメッシュの表現の自由度が大きいことにもよるだろう。メッシュとは三角形、四角形、五角形などの、いわゆる多角形 (polygon) を繋ぎ合わせたもので、そのデータ形式は、頂点座標 (x, y, z) のリストと同一面に属す頂点の組のリストである。実際に使われるときには、それにその他の情報 (頂点カラー、重み、材質、テクスチャ座標など) が必要に応じて付加されている。このデータ形式では、表面上は genus

(貫通する穴の個数) や二多様体であるなし、頂点の次数 (その頂点に繋がっている辺の本数) などの情報はわからない。しかし、メッシュに対して施されるアルゴリズムを作る時は、これらのメッシュに関する特徴 (genus, 二多様体, 頂点の次数) を考慮して設計しなければならない。

また、複雑な物体をメッシュで表現しようとすると、多くのポリゴンが必要となるが、数万、数十万のポリゴンで表現された物体を扱うのは非常に困難である。近年レーザースキャンによって物体を非常に精密で膨大なメッシュにサンプリングするシステムが開発され、これらの問題はますます大きくなった。これに対して効果的な解決方法として多重解像度解析 (multiresolution analysis) という手法が存在する。

1.2 メッシュ

規則メッシュ (regular mesh) とは、例えば三角形メッシュ (全ての面が三角形であるメッシュ) でかつ全ての頂点の次数が 6, あるいは四角形メッシュでかつ全ての頂点の次数が 4 であるような規則的な次数

[†] 東京大学大学院情報理工学系研究科
Department of Mathematical Informatics, Graduate
School of Information Science and Technology, University of Tokyo

を持つメッシュである。もちろん次数をこのように固定すると、オイラーの公式（二多面体であるメッシュにおいては、頂点数-辺数+面数=2(1-貫通する穴の個数)となる）より genus が制限されてしまい、物体の表現に致命的な制限が発生する。

逆に頂点の次数に仮定を置かないものを不規則メッシュ (irregular mesh) という。メッシュに対するアルゴリズムを設計するとき、形状を取り扱うとすると、不規則メッシュに対して施すことができるアルゴリズムが望ましい。本稿における細分割 (subdivision), dual subdivision, line subdivision はいずれも不規則メッシュに対して施すことができる。

1.3 細分割 (subdivision)

細分割 1)~3) は任意位相の滑らかな曲面を生成するので (この曲面を細分割曲面 subdivision surface と呼ぶ), 形状設計やコンピュータグラフィックスの分野では良く知られた手法である。細分割は細分割行列 (subdivision matrix) とメッシュの次数の変化によって定義される。よって多くの研究者が細分割行列に依存した細分割曲面の滑らかさの条件を研究している 3)~9)。また、細分割理論より導かれる多重解像度解析 (Multiresolution Analysis) 10)~12) はメッシュの編集において非常に有用な手段となっている。

まず、例を見よう。

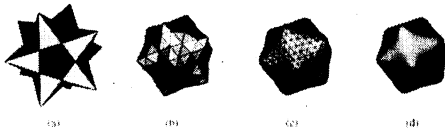


図 1 Loop の細分割 12)
Fig. 1 Loop subdivision 12)

図 1 は、有名な Loop の細分割 1) である。左端の初期メッシュに対して細分割を施すと右隣のメッシュになる。さらにもう一度細分割を施すとその右隣のメッシュになり、無限回施すと右端の曲面が現れる。これを細分割の極限曲面と呼ぶ (単に細分割曲面と呼んだりもする)。無限回施すのは理論上での話であるが、実際は数回施すだけで十分に極限曲面に近いメッシュが得られる。

ここでメッシュの一つの面は、辺に頂点を挿入されることにより 4 つの面に分けられている。これが細分割による次数の変化であり、これは選んだ細分割によって一意に定められるものである。さらに、細分割によって頂点位置が変化していることがわかる、ついで

で挿入した頂点の位置も定めなければならない。これを定めるのが細分割行列である。細分割行列はある頂点に対して定義され、その次数 k に依存する。例えば、図 2 に示す次数 5 の頂点に関して細分割行列 S_5^j が次のように定義される。

$$\begin{pmatrix} v_0^{j+1} \\ v_1^{j+1} \\ \vdots \\ v_5^{j+1} \end{pmatrix} = S_5^j \begin{pmatrix} v_0^j \\ v_1^j \\ \vdots \\ v_5^j \end{pmatrix}$$

ここで細分割行列 S_5^j は正方行列であり、 j は繰り返しの手法である細分割の j 段階目であることを指している (ここで v_0^j の周りの頂点を v_0^j に対する 1-disc の頂点と呼ぶ。細分割行列は 1-disc に対してだけでなく 2-disc, つまり隣の隣の頂点まで用いた場合でも定義できる。一般には任意の disc 内の頂点を用いた場合でも定義できる)。 $S_5^j = S_5$ のように細分割の段階に依らず同じ細分割行列を使うものを定常な細分割 (stationary subdivision) と呼ぶ。このように細分割行列はある頂点に関して書かれ、次の段階の周りの頂点 (その頂点を含む) の位置を決定する。ただし、挿入された頂点は、挿入した辺の両側の頂点に関して細分割行列から導出されるので、その値が同じであることが必要である。むしろ両端の頂点の次数が異なる場合もあるので全ての細分割行列 S_k について、この制約が課されているわけである。

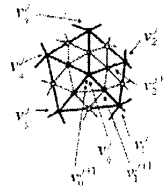


図 2 細分割行列
Fig. 2 subdivision matrix

この Loop の細分割の細分割行列 S_k ($k \geq 3$) は次のようになる：

$$S_k = \begin{pmatrix} 1 - k\beta & \beta & \beta & \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

ただし

$$\beta = \frac{1}{k} \left(\frac{5}{8} - \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} \cos \left(\frac{2\pi}{k} \right) \right)^2 \right)$$

である。

この時、7)の定理 2.1 より、定常な細分割の任意の極限曲面 $f: |K| \rightarrow \mathbf{R}^3$ は次のようなパラメトリック曲面となる：

$$f[p](y) = \sum_i v_i \phi_i(y),$$

$v_i \in \mathbf{R}^3$, $p = (v_0, v_1, \dots)$, $\phi_i(y) \in \mathbf{R}$, $y \in |K|$.
ここで K はメッシュを表す複体で、 $|K|$ は複体を位相空間としてみたもの、すなわちメッシュである。 i は頂点番号で、 v_i はその位置とする。 $\phi_i(y)$ は重み関数であり、各頂点にひとつずつ関数が付随していることを示している。ここで細分割行列の行和が 1 である (アフィン結合) であるならば、明らかに

$$\forall y \in |K|, \sum_i \phi_i(y) = 1$$

である。すなわち極限曲面も頂点のアフィン結合である。また重み関数は頂点位置に依存せず細分割行列によってのみ定まる。ここで関数 ϕ を $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots)$ とすると、 ϕ によって表現できる曲面の集合が定まり、その全体がなす空間を ϕ が張っていることから、関数 $\phi_i(y)$ を基底関数と呼ぶ。このとき極限曲面は、基底関数 ϕ が張る関数空間の一点である。この考え方は多重解像度解析 (multiresolution analysis) において中心的な役割を果たす。

1.4 研究の動機

最も有名な細分割として Catmull-Clark subdivision と Loop subdivision 1) が挙げられる。これらの細分割は不規則な四角形および三角形メッシュに対してデザインされている。ほとんどの細分割スキームは同じく四角形および三角形メッシュに対してであり、その他のタイプのメッシュに対してはごく少数の細分割スキームしか存在しない。六角形メッシュに対する細分割スキームの例としては Claes の細分割 13) や Farin 14) で紹介されているスキームが挙げられるが、それらの細分割スキームが生成するメッシュの面は平ら (“flat”) にはなっていない。

よって、我々は新たな細分割スキームのクラスを導入する 15)。それは射影幾何学の双対原理に基づく細分割の双対構造 (dual subdivision) であり、dual subdivision で生成されるメッシュは non-triangular で “flat” な面を持つ。

通常の dual subdivision では、古い頂点位置と細分割行列によって新たな頂点位置を計算していた。一方

dual subdivision では、古い面の方程式と細分割行列によって新たな面の方程式を計算する。つまり subdivision は頂点に基づく細分割であり、dual subdivision は面に基づく細分割である。さらに、我々は次の自然な問いを得る：メッシュの三要素の内の残り一つ、辺に基づく細分割は構成できるのか？

本稿では、この問いに肯定的な回答を与える。すなわち新たな細分割スキームのクラス、line subdivision と名づけるが、を導入するのである。Line subdivision は line geometry に基づいて定義され、細分割と似た性質を持つ。特に line subdivision は通常の subdivision と dual subdivision を含む。これにより通常の subdivision と dual subdivision の統一的な議論が可能になった 16)。

2. Dual Subdivision

2.1 点と面の双対

この節では良く知られた点と面の双対を説明する。

d 次元空間における超平面の方程式は、 $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d + a_{d+1} = 0$ と表される。 d 次元空間の 2 次曲面の方程式は、 $(d+1) \times (d+1)$ 対称行列 A および $d+1$ 次元変数ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d, 1)$ を用いて、 $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T = 0$ と書ける。

点 $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ に対して、方程式 $\mathbf{x}A(p, 1)^T = 0$ を満たす超平面 $D(p)$ を対応させる $((p, 1) = (p_1, p_2, \dots, p_d, 1))$ 。逆に、定数ベクトル $p = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ を用いて $\mathbf{x}A(p, 1)^T = 0$ と書ける超平面 h に対して、点 $D(h) = p$ を対応させる。すると明らかに、 $D(D(p)) = p$, $D(D(h)) = h$ である。これをもって変換 D を 2 次曲面 $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T = 0$ に関する双対変換と呼ぶ。点 p と超平面 $D(p)$ (点 $D(h)$ と超平面 h) は、2 次曲面 $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T = 0$ に関する極と極面になる。よってこの変換を極変換とも呼ぶ。通常、2 次曲面 $\mathbf{x}A\mathbf{x}^T = 0$ には円や放物線、球が用いられる。

この論文では三次元の球について双対変換を行う。具体的には、

$$(a, b, c, 1) \leftrightarrow ax + by + cz - 1 = 0$$

を使う。これは射影幾何学の双対原理の特殊ケースになっている。

この変換では次の事実が成り立つ。

- 点 p が超平面 h 上にあるとき、およびそのときのみ、点 $D(h)$ は超平面 $D(p)$ 上にある。
- 点 p が超平面 h を境界とする上半空間 (下半空間) に存在するとき、点 $D(h)$ が超平面 $D(p)$ を境界とする上半空間 (下半空間) に存在する。ここで上半空間とは原点を含まない半空間のことを

いうものとする。逆に下半空間とは原点を含む半空間のことをいうことにする。

2.2 Dual Subdivision の定義

ここで細分割行列の行和が 1 である場合のみを考える (行和が一定の場合は同様に考えられる)。細分割によって頂点を並べた列ベクトルが

$$p^{j+1} = Sp^j$$

と書かれるのは前述のとおりである。今 p^j は

$$p^j = \begin{pmatrix} p_{0x}^j & p_{0y}^j & p_{0z}^j \\ p_{1x}^j & p_{1y}^j & p_{1z}^j \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

であるから、

$$f^j = \begin{pmatrix} p_{0x}^j & p_{0y}^j & p_{0z}^j & -1 \\ p_{1x}^j & p_{1y}^j & p_{1z}^j & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

とすれば、

$$f^{j+1} = Sf^j$$

もまた成り立つのである。ここで f^j の各行は平面の方程式 $p_{ix}^j x + p_{iy}^j y + p_{iz}^j z - 1 = 0$ という方程式の要素を並べたものであり、すなわち平面の方程式が細分割されているということが見て取れるのである。この平面の式はすなわち、点 $(p_{ix}^j, p_{iy}^j, p_{iz}^j)$ が前節の双対変換を受けたもので、その意味でこの細分割は従来の細分割の双対構造になっている。

今、主空間に irregular な三角形メッシュが存在しているとする。このとき、点と面の双対をとることによって双対空間に双対メッシュを得ることができる。頂点は平面に、平面は頂点に移される。主空間でのメッシュ M_{primal} の頂点 v の次数を k とする。このとき v は k 個の面 $f_i, i = 1, 2, \dots, k$ に共有されている。よって双対変換の性質より双対空間での双対メッシュ M_{dual} の面 $D(v)$ 上に k 個の点 $D(f_i), i = 1, 2, \dots, k$ が乗っているのである。つまり次の命題が成り立つ。

Proposition 2.1 (双対メッシュ)

メッシュを双対変換した双対メッシュにおいては、元のメッシュの次数 k の頂点に対して k 角形の面が表れる。

例えば、規則メッシュ (次数が全て 6 である三角形メッシュ) の双対は全ての頂点の次数が 3 であるような規則的な六角形メッシュである。また、主空間でメッシュの表現する形状と双対空間で双対メッシュの表現する形状は異なる。

Dual subdivision を理解する上で最も重要なことは

次のことである。

Proposition 2.2 (dual subdivision)

主空間でメッシュに subdivision を施すことは、双対空間で双対メッシュに dual subdivision を施すことに等しい。

これを示したのが次の図 3 である。これを dual subdivision の定義と思って差し支えない。Dual subdivision における次数の変化は、まさにこのように定義するのである。

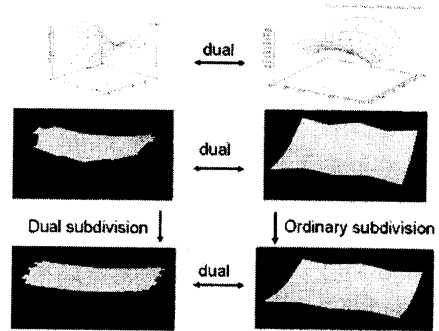


図 3 双対空間における dual subdivision と主空間における subdivision の双対性。左上図は鞍点をもつ曲面である。右上図はその双対曲面。右上図において曲面上に点をプロットして作った三角形メッシュが中右図である。その双対メッシュが中左図。中右図に subdivision を施せば下右図となり、中左図に dual subdivision を施せば下左図となる。ここで下右図と下左図のメッシュは双対の関係にあるのである (そのように dual subdivision は定義されている)。このように dual subdivision でも鞍点を持つ図形を近似できる。

ここで次のことが見て取れるだろう。主空間で、ある形状を subdivision されたメッシュが良く近似すれば、双対空間でその双対形状を dual subdivision された双対メッシュが良く近似する。これは三角形や四角形でない平らな多角形によって形状を近似できるという非常に便利な特性を dual subdivision が持っていることを示している。

また、dual subdivision が生成する曲面も滑らかになる。15) では、その条件を言及している。

3. Line Geometry

この章では、line geometry の基礎を紹介する 17)。

P^n を n 次元実射影空間とする。 P^3 の点 p に対し、その同次座標を (p_0, p_1, p_2, p_3) とする。 $p_0 \neq 0$ ならば $(\frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \frac{p_3}{p_0})$ として \mathbf{R}^3 の点と対応させることがで

きる. $p_0 = 0$ なる点を ideal point (無限遠点) と呼ぶ. P^3 の異なる点 p, q に対し, それを通過する直線を楔積 (wedge product) を使って

$$L = p \wedge q$$

として特徴付けることにする. ここで $p \wedge q = (l_{01}, l_{02}, l_{03}, l_{23}, l_{31}, l_{12})$ であり, $l_{ij} = p_i q_j - p_j q_i$ である. L の要素は Plücker 座標と呼ばれ, 直線の同次座標となっている. 実際, $p' = \alpha_0 p + \beta_0 q, q' = \alpha_1 p + \beta_1 q$ とすると (ここで $\alpha_i, \beta_i \in \mathbf{R}$ である),

$$L' = p' \wedge q' = \det \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \beta_0 & \beta_1 \end{pmatrix} L.$$

よって, 同じ直線は p, q の選び方に依らず P^5 において同じ点で表される.

また直線の自由度は 4 である (方向で 2 自由度, 平行移動で 2 自由度). ゆえに L は P^5 の点ではあるが, さらに一つ制約が付いている. つまり l_{ij} は次の式を恒等的に満たす (この式を Plücker identity と呼ぶ):

$$l_{01} l_{23} + l_{02} l_{31} + l_{03} l_{12} = 0.$$

ここで $l = (l_{01}, l_{02}, l_{03}), \bar{l} = (l_{23}, l_{31}, l_{12})$ とすると, $L = (l, \bar{l})$. そのとき Plücker identity は $l \cdot \bar{l} = 0$ となる. 今 L とは異なる直線 $\hat{L} = (\hat{l}, \hat{\bar{l}})$ を考える. 二直線 L, \hat{L} が交わることと $\langle L, \hat{L} \rangle = l \cdot \hat{\bar{l}} + \bar{l} \cdot \hat{l} = 0$ であることは同値である. なぜなら $\langle L, \hat{L} \rangle$ は $[p^T, q^T, \hat{p}^T, \hat{q}^T]$ の行列式だからである (ここで \hat{p} と \hat{q} は \hat{L} を張る点である). ゆえに Plücker identity はこの式の特例であることがわかる, つまり $\frac{1}{2} \langle L, L \rangle = 0$.

3.1 Direction and Moment vector

L が無限遠直線でないならば, 一般性を失うことなく, $q = (0, q_1, q_2, q_3), p = (1, p_1, p_2, p_3)$ とすることができる. そのとき, $L = (q_1, q_2, q_3, (q_1, q_2, q_3) \times (p_1, p_2, p_3))$ となる. ここで $l = (q_1, q_2, q_3)$ は L の direction vector と呼ばれ, $\bar{l} = (q_1, q_2, q_3) \times (p_1, p_2, p_3)$ は L の moment vector (あるいは momentum vector) と呼ばれる. Plücker identity は l と \bar{l} の直交性を表している.

3.2 Klein 写像

L の Plücker 座標とは P^5 における点 (l, \bar{l}) であり, (l, \bar{l}) は超二次曲面 $M_2^4 \subset P^5$ に含まれている. ここで M_2^4 とは Plücker identity によって定まる超曲面である (これを Klein quadric と呼ぶ). 逆に M_2^4 内の点は P^3 の直線に対応する. つまりこの P^3 の直線を M_2^4 の点に移す写像を γ とするならば, γ は全単射である. γ は Klein 写像 (Klein mapping) と呼ばれ, M_2^4 の点は P^3 の直線の Klein image と呼ばれる.

3.3 線織面 (Ruled Surface)

P^3 の直線の族 $R(u)$ の Klein image $R\gamma(u) = \gamma(R(u))$ が M_2^4 内の曲線になる時, $R(u)$ を ruled surface と呼ぶ. $R(u) = a(u) \wedge b(u)$ とする. ここで $a(u), b(u)$ は P^3 の点の族である. 図 4 は ruled surface の例を表している.

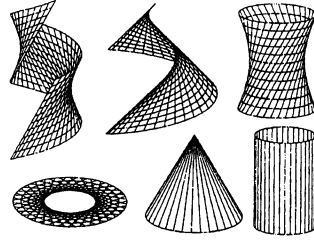


図 4 線織面 17)
Fig. 4 Ruled surfaces 17)

4. Line Subdivision

P^3 における局所二パラメータの直線の族を line congruence と呼ぶ. Line congruence の Klein image は M_2^4 における二多様体となる.

振り返ると, ruled surface は 1 パラメータの直線の和集合として定義されていた. しかし, 同時に, ruled surface は 1 パラメータの直線の包絡面とも定義できる. 同様に, 我々は line congruence に対する包絡面を考えることができる. $E(K)$ を line congruence K に対する包絡面であるとする.

4.1 Line Subdivision Surface

これ以降我々は定常な細分割を考える. $|K\gamma|$ を P^5 におけるメッシュ, p_i^0 を $|K\gamma|$ の頂点とし, p_i^0 は M_2^4 に含まれるとする. $p_i^j = (p_{i0}^j, p_{i1}^j, p_{i2}^j, p_{i3}^j, p_{i4}^j, p_{i5}^j)$ とし, p^j を p_i^j を各行に持つ行列であるとする. また \bar{p}^j を $(p_{i1}^j, p_{i2}^j, p_{i3}^j, p_{i4}^j, p_{i5}^j)$ を各行に持つ行列であるとし, S を大域的な細分割行列であるとする.

このとき, 細分割の一ステップを

$$\bar{p}^{j+1} = S\bar{p}^j,$$

$p_{i0}^{j+1} = -(p_{i1}^{j+1} p_{i4}^{j+1} + p_{i2}^{j+1} p_{i5}^{j+1}) / p_{i3}^{j+1}$ として定義する. よって p_i^{j+1} は常に M_2^4 に含まれる. よって, この細分割スキームの極限曲面も M_2^4 に含まれる.

ここで, その極限曲面を $f[p]\gamma(y)$ とする. 特殊な条件下では次のように書かれる:

$$f[p]\gamma(y) = \sum_i p_i^0 \phi_i(y),$$

$$\phi_i(y) \in \mathbf{R}, y \in |K\gamma|, p = (p_0^0, p_1^0, \dots).$$

ここで y は局所二パラメータ (局所的に, $y =$

(y_1, y_2) . $f[p]\gamma(y)$ に対応する line congruence を $f[p](y)$ をする. ここで $E(f[p](y))$ を line subdivision surface と定義する.

4.2 細分割の構造

このとき, これらの細分割の間には次の関係がある (16) 参照).

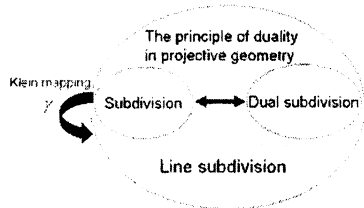


図 5 Subdivision の構造. Line subdivision は通常の subdivision と dual subdivision を含む.

5. 結 論

本稿では射影幾何学の双対原理を細分割に適用することで得られる「面に基づく細分割」である dual subdivision を提案した. Dual subdivision は細分割と同様に滑らかな曲面を生成できるほか, non-triangular で “flat” な面を持つメッシュによって物体を近似することを可能にする. また, 多重解像度解析を用いれば, 接平面を操作することで得られたメッシュの階層構造を得ることができる.

また line geometry に基づく新たな細分割スキームである line subdivision を提案した. この新しいスキームは line space に於いて動作し, Klein quadric M_2^4 に含まれる二多様体を生成する. M_2^4 内の二多様体は line congruence (P^3 における局所二パラメータの直線の族) の Klein image である. ここで我々は, そのようにして得られた line congruence の包絡面を line subdivision surface と定義した. このとき, line subdivision は通常の subdivision と dual subdivision を含む.

参 考 文 献

- 1) Loop, C. T.: Smooth Subdivision Surfaces Based on Triangles, Master's thesis, University of Utah, Department of Mathematics (1987).
- 2) DeRose, T., Kass, M. and Truong, T.: Subdivision Surfaces in Character Animation, *SIGGRAPH '98 Proceedings*, ACM, pp. 85–94 (1998).
- 3) Warren, J. and Weimer, H.: *Subdivision Meth-*

- ods for Geometric Design: A Constructive Approach*, Morgan Kaufmann Publishers (1995).
- 4) Zorin, D.: Smoothness of Stationary Subdivision on Irregular Meshes, *Constructive Approximation*, Vol. 16, No. 3, pp. 359–397 (2000).
- 5) Reif, U.: A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary points, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, pp. 153–174 (1995).
- 6) Prautzsch, H.: Analysis of C^k -subdivision surfaces at extraordinary points, *Preprint. Presented at Oberwolfach* (1995).
- 7) Cavaretta, A. S., Dahmen, W. and Micchelli, C. A.: Stationary Subdivision, *Memoirs Amer. Math. Soc.*, Vol. 93(453) (1991).
- 8) Zorin, D.: *Subdivision and Multiresolution Surface Representations*, PhD Thesis, University of California Institute of Technology (1997).
- 9) Doo, D. and Sabin, M. A.: Behaviour of recursive subdivision surfaces near extraordinary points, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 10, pp. 356–360 (1978).
- 10) Lounsbery, M., DeRose, T. and Warren, J.: Multiresolution Analysis for Surfaces of Arbitrary Topological Type, *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 16, No. 1, pp. 34–73 (1997).
- 11) Eck, M., DeRose, T. and Duchamp, T.: Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes, *SIGGRAPH '95 Proceedings*, ACM, pp. 173–182 (1995).
- 12) Stollnitz, E. J., DeRose, T. D. and Salesin, D. H.: *Wavelets for Computer Graphics: Theory and Applications*, Morgan Kaufmann Publishers (1996).
- 13) Claes, J., Beets, K. and Reeth, F. V.: A Corner-Cutting Scheme for Hexagonal Subdivision Surfaces, *Proceedings of Sape Modeling International 2002*, IEEE, pp. 13–24 (2002).
- 14) Farin, G., Hoschek, J. and Kim, M.: *Handbook of Computer Aided Geometric Design*, Elsevier Science Publishers (2002).
- 15) Kawaharada, H. and Sugihara, K.: Dual subdivision a new class of subdivision schemes using projective duality. METR 2005-01, The University of Tokyo (2005).
- 16) Kawaharada, H. and Sugihara, K.: Line Subdivision, *the Eleventh IMA International Conference on the Mathematics of Surfaces*, Loughborough (2005).
- 17) Pottman, H. and Wallner, J.: *Computational Line Geometry*, Springer (2001).