

美しい曲線セグメント

吉田典正* 斎藤隆文**

* 日本大学 ** 東京農工大学

E-mail: norimasa@acm.org txsaito@cc.tuat.ac.jp

人工物や自然界における「美しい曲線」の多くは、曲率対数分布図が直線で近似できることが原田らにより指摘されている。三浦は美しい曲線の弧長による一般式を示しているが、曲線を描くためには数値積分を行わなければならない。曲線形状の対話的なコントロールが困難である。本報告では、「美しい曲線」を方向角と弧長のそれぞれで定式化するとともに、曲率対数分布図における直線の傾き α が変化したときの美しい曲線の性質を明らかにし、 α に対するその形状変化の様子を示す。また、曲線形状を対話的にコントロールするために、セグメントの両端点とそこでの接線方向を指定し、美しい曲線セグメントを描画する手法を提案する。

Aesthetic Curve Segment

Norimasa Yoshida* and Takafumi Saito**

* Nihon University ** Tokyo University of Agriculture and Technology

Many of the *aesthetic curves* in artificial objects and the natural world have been shown, by Harada et al., to have such a property that their curvature logarithmic histograms can be approximated by straight lines. General formulas for such curves are presented by Miura, but controlling the shape of the curve is not possible since drawing the curve requires numerical integrations with respect to the arc length. In this paper, we introduce two kinds of formulas for *aesthetic curves*, one formulated by its directional angle and the other by its arc length, and show some characteristics and the shape of the curves depending on the slope of the straight line α in curvature logarithmic histograms. Furthermore, for interactive control of an aesthetic curve, we propose a method for drawing the curve segment by specifying its endpoints and their tangents.

1 はじめに

人工物や自然界における「美しい曲線」の多くは、曲率対数分布図が直線で近似できることが、原田らにより指摘されている [1, 2]。原田はさらに、曲率対数分布図における直線の傾き α が、曲線から得られる印象と強く連関していることを指摘している。以下、本稿では、曲率変化が単調で曲率対数分布図が直線で表されるような平面曲線を、「美しい曲線」と呼び、曲率対数分布の傾きを α で表すこととする。

三浦は、美しい曲線が満たすべき条件をもとに、曲線の一般式を導いている [3]。この一般式は、始点位置、そこでの接線方向と曲率半径、および α の値を与

えることで、曲線上の点の座標を弧長の関数として表すものである。しかし、その関数の計算には、一般に数値積分が必要となる。そのため、曲線弧の終点を直接指定することはできず、曲線がどこに達するかは描いてみないとわからない。美しい曲線を実用に供するには、制御性の向上が不可欠である。

本報告では、2 次の Bezier 曲線と同様に 3 個の制御点を指定することで、 α の値に応じた美しい曲線の弧（美しい曲線セグメント）を描く方法を提案する。まず、美しい曲線の配置とスケールに、ある種の制約条件を付与することによって、弧長や方向角と曲率半径との関係式を導くとともに、曲線上の点を弧長の関数ならびに方向角の関数で表す。そ

これらの式から、美しい曲線の全体像が、 α の値によってどのように変化するかを明らかにする。次に、両端点の位置とそこでの接線方向ならびに α が与えられたときに、それを満たす曲線弧を美しい曲線の形状全体から探索する手法を提案する。本手法により、ユーザは制御点を対話的に操作するだけで、手軽に美しい曲線セグメントを描くことができる。

2 美しい曲線の定式化

本節では、まず、美しい曲線に関する曲率半径 ρ と弧長 s の関係式を導く。この関係を用いて、美しい曲線上の点を方向角 θ と弧長 s のそれぞれの関数として表現する。

原田らによる「美しい曲線」は、 $\Delta\rho/\rho$ が一定になるように曲線を微小部分に分割したときに、 ρ と Δs との関係が両対数グラフにおいて傾き α の直線になるとしている。従って、美しい曲線は、 c を定数として、次式を満たすものとして、定義できる。

$$\log \frac{\Delta s}{\Delta\rho/\rho} = \alpha \log \rho + c \quad (1)$$

式(1)を変形すると、

$$\frac{\Delta s}{\Delta\rho/\rho} = \rho^\alpha e^c \quad (2)$$

となる。ここで、美しい曲線の中で、 $\rho = 1$ のとき $\Delta s = \Delta\rho$ となるものを考える。ただし、 $\alpha = 1$ のときは任意の ρ において $\frac{\Delta s}{\Delta\rho} = \text{const.}$ であるので、 $K(>0)$ を定数として $\Delta s = K\Delta\rho$ となるものを考える。このとき式(2)は、

$$\frac{\Delta s}{\Delta\rho} = \begin{cases} K & \text{if } \alpha = 1 \\ \rho^{(\alpha-1)} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

となる。 $\rho = 1$ のとき $s = 0$ であるとし、式(3)を ρ で積分ですると

$$s = \int \frac{\Delta s}{\Delta\rho} d\rho = \begin{cases} \log \rho & \text{if } \alpha = 0 \\ K(\rho - 1) & \text{if } \alpha = 1 \\ \frac{1}{\alpha}(\rho^\alpha - 1) & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

となる。これを ρ について解くと、曲率半径 ρ と弧長 s に関する次式の関係を得る。

$$\rho = \begin{cases} e^s & \text{if } \alpha = 0 \\ \frac{s}{K} + 1 & \text{if } \alpha = 1 \\ (as + 1)^{\frac{1}{\alpha}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

2.1 方向角による定式化

式(3)および $\Delta s = \rho\Delta\theta$ の関係を用いると、

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\rho} = \frac{\Delta s}{\rho\Delta\rho} = \begin{cases} \frac{K}{\rho^{\alpha-2}} & \text{if } \alpha = 1 \\ \rho^{\alpha-2} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6)$$

となる。ここで、 $\rho = 1$ のとき $\theta = 0$ として、式(6)を ρ で積分すると、 θ に関する次の式を得る。

$$\theta = \int \frac{\Delta\theta}{\Delta\rho} d\rho = \begin{cases} K \log \rho & \text{if } \alpha = 1 \\ \frac{\rho^{\alpha-1} - 1}{\alpha - 1} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

式(7)を ρ について解くと、 ρ と θ に関する次の関係式を得る。

$$\rho = \begin{cases} (e^\theta)^{1/K} & \text{if } \alpha = 1 \\ ((\alpha - 1)\theta + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

曲線上で方向角が ψ となる点を $(x(\psi), y(\psi))$ 、 $\theta = 0$ で曲線は原点を通るものとしたとき、美しい曲線上の点は、次式によって表される。

$$x(\psi) = \int_0^\psi \rho \cos \theta d\theta = \begin{cases} \int_0^\psi (e^\theta)^{\frac{1}{K}} \cos \theta d\theta & \text{if } \alpha = 1 \\ \int_0^\psi ((\alpha - 1)\theta + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} \cos \theta d\theta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

$$y(\psi) = \int_0^\psi \rho \sin \theta d\theta = \begin{cases} \int_0^\psi (e^\theta)^{\frac{1}{K}} \sin \theta d\theta & \text{if } \alpha = 1 \\ \int_0^\psi ((\alpha - 1)\theta + 1)^{\frac{1}{\alpha-1}} \sin \theta d\theta & \text{otherwise} \end{cases} \quad (10)$$

2.2 弧長による定式化

$\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$ に式(5)を代入し、 $s = 0$ のときに $\theta = 0$ とすると、

$$\theta = \int \frac{\Delta\theta}{\Delta s} ds = \begin{cases} 1 - e^{-s} & \text{if } \alpha = 0 \\ K(\log(s + K) - \log(K)) & \text{if } \alpha = 1 \\ \frac{(\alpha s + 1)^{(\frac{1}{\alpha} - 1)} - 1}{\alpha - 1} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

となる。 $s = 0$ のとき曲線は原点 $(0, 0)$ を通るとすると、美しい曲線は、 i を虚数として、複素平面上で次

式で表される.

$$C(s) = \begin{cases} \int_0^s e^{i(1-e^{-s})} ds & \text{if } \alpha = 0 \\ \int_0^s e^{i(K(\log(s+K)-\log(K)))} ds & \text{if } \alpha = 1 \\ \int_0^s e^{i\left(\frac{(\alpha s+1)^{\frac{1-1/\alpha}{\alpha}}-1}{\alpha}\right)} ds & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

式 (12) は本質的に三浦 [3] が導出したものと同じ式であるが, 次の 2 つの点で異なっている. まず, $\rho = 1$ のときに $\Delta s = \Delta \rho$ (ただし, $\alpha = 1$ の場合は $\Delta s = K \Delta \rho$) および $\rho = 0$ において $s = 0$ で原点を通るものとするにより, 美しい曲線の配置とスケールに制約条件を付与している. 次に, x^a を x で積分する場合に $a = -1$ のとき $\log x$ になることを考慮し, $\alpha = 1$ の場合の式を示している.

式 (11) を s について解くと, 弧長 s と方向角 θ に関する次式の関係を得る.

$$s = \begin{cases} -\log(1-\theta) & \text{if } \alpha = 0 \\ K(e^{\frac{\theta}{K}} - 1) & \text{if } \alpha = 1 \\ \frac{((1-\alpha)(\frac{1}{1-\alpha}-\theta))^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}-1}{\alpha} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

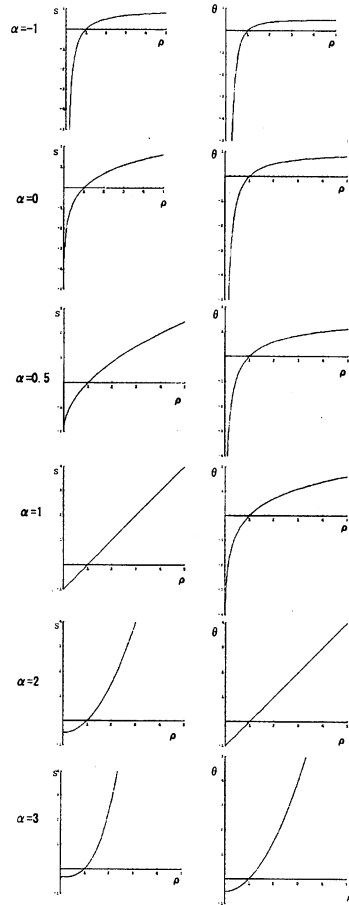
美しい曲線を方向角により定式化した式 (9),(10) と弧長により定式化した式 (12) は, 同じ曲線であり, 方向角 θ と弧長 s は式 (11) または式 (13) によって関係づけられる.

3 美しい曲線の性質とその形状

本節では, α が与えられたときの, θ および s のとりうる範囲, $\rho = 0$ および $\rho = \infty$ における曲線の振る舞いについて考える. これらの分析に基づき, 美しい曲線の全体像が α の値によってどのように変化するかを明らかにする.

図 1 に, $\alpha = -1, 0, 0.5, 1, 2, 3$ の場合の ρ に対する s と θ のグラフを表す. ρ と s の関係は式 (4) に, ρ と θ の関係は式 (7) によるものである. ρ は 0 から ∞ まで変化するので, s と θ には α によって上限または下限が存在する場合がある. これらの上限と下限を表 1 に示す. 上限が存在する場合には $\rho = \infty$ において, 下限が存在する場合には $\rho = 0$ において存在する.

式 (4),(7) および図 1 より, $\rho = 0$ および $\rho = \infty$ において表 2 の関係があることが分かる. $\rho = 0$ および $\rho = \infty$ において弧長および方向角が有限または無限であることの意味するところを, 表 3 に示す.



(a) 曲率半径 ρ と弧長 s のグラフ (b) 曲率半径 ρ と方向角 θ のグラフ

図 1 $\alpha = -1, 0, 0.5, 1, 2, 3$ の場合の ρ に対する s と θ のグラフ

表 1 α に対する s と θ の上限と下限

	s			θ	
	上限	下限		上限	下限
$\alpha < 0$	$-\frac{1}{\alpha}$	-	$\alpha < 1$	$\frac{1}{1-\alpha}$	-
$\alpha = 0$	-	-	$\alpha = 1$	-	-
$\alpha > 0 (\alpha \neq 1)$	-	$-\frac{1}{\alpha}$	$\alpha > 1$	-	$\frac{1}{1-\alpha}$
$\alpha = 1$	-	$-K$			

図 2 に, 方向角の式を用いて描いた様々な α に対する美しい曲線の形状を示す. $\alpha = 1, 2, 5$ の場合には, 原点の近傍で拡大した図も示した. 定義より, 原点で $\theta = 0, \rho = 1$ である. 表 1, 表 2 および表 3 とあわせて, 各 α の曲線に対して次のような性質を見いだすことができる.

表2 $\rho = 0$ および $\rho = \infty$ での曲線の振る舞い

	$\rho = 0$ での振る舞い		$\rho = \infty$ での振る舞い	
	弧長	方向角	弧長	方向角
$\alpha < 0$	無限	無限	有限	有限
$\alpha = 0$	無限	無限	無限	有限
$0 < \alpha < 1$	有限	無限	無限	有限
$\alpha = 1$	有限	無限	無限	無限
$\alpha > 1$	有限	有限	無限	無限

表3 $\rho = 0$ または $\rho = 1$ における弧長および方向角が有限または無限の意味

$\rho = 0$ で弧長無限	$\rho = 0$ の点までの弧長が無限大
$\rho = 0$ で弧長有限	$\rho = 0$ の点までの弧長が有限
$\rho = 0$ で方向角無限	$\rho = 0$ の点に無限に渦を巻いて収束
$\rho = 0$ で方向角有限	$\rho = 0$ の点で接線方向が定まる
$\rho = \infty$ で弧長無限	変曲点が存在しない (無限遠に存在)
$\rho = \infty$ で弧長有限	変曲点が有限点に存在
$\rho = \infty$ で方向角無限	$\rho = \infty$ に向けて無限に渦を巻いて発散
$\rho = \infty$ で方向角有限	変曲点が存在または発散する方向が定まる

• $\alpha < 0$ の曲線

θ を負の方向に小さくしていくと、 $\theta = -\infty$ において $\rho = 0$ の点に渦を巻いて収束し、そこまでの弧長は無有限大である。 θ を正の方向に大きくしていくと、 θ は上限 $\frac{1}{1-\alpha}$ を持ち、そこで $\rho = \infty$ となりそこまでの弧長は有限である (変曲点が存在する)。

• $\alpha = 0$ の曲線

θ を小さくしていくと、 $\theta = -\infty$ において $\rho = 0$ の点に渦を巻いて収束し、そこまでの弧長は無有限大である。 θ は上限 $\frac{1}{1-\alpha}$ を持ち、決まった方向に発散する (変曲点が無限遠に存在する)。

• $0 < \alpha < 1$ の曲線

θ を小さくしていくと、 $\theta = -\infty$ において $\rho = 0$ の点に渦を巻いて収束し、そこまでの弧長は有限である。 θ は上限 $\frac{1}{1-\alpha}$ を持ち、決まった方向に発散する (変曲点が無限遠に存在する)。

• $\alpha = 1$ の曲線

θ を小さくしていくと、 $\theta = -\infty$ において $\rho = 0$ の点に渦を巻いて収束し、そこまでの弧長は有限である。 θ を大きくしていくと、 $\rho = \infty$ に向けて無限に渦を巻いて発散し、変曲点は存在しない。

• $\alpha > 1$ の曲線

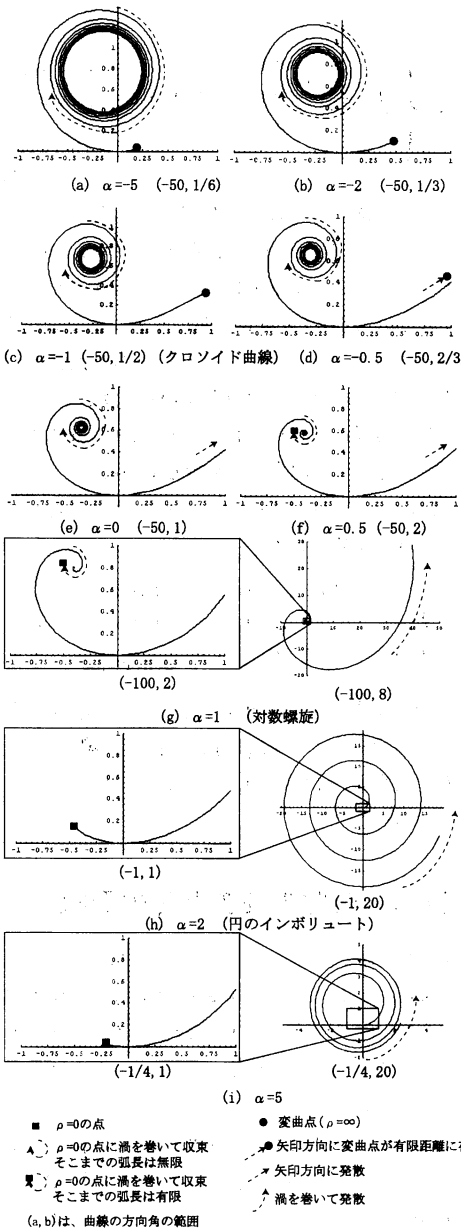


図2 α を変化させたときの美しい曲線

θ を小さくしていくと、 $\theta = \frac{1}{1-\alpha}$ において $\rho = 0$ となり、そこまでの弧長は有限で接線方向が定まる。 θ を大きくしていくと、 $\rho = \infty$ に向けて無限に渦を巻いて発散し、変曲点は存在しない。

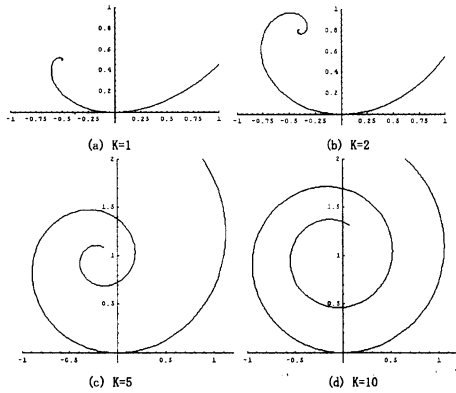


図3 K を変化させたときの $\alpha = 1$ の曲線 (対数螺旋)

$\alpha = 1$ の対数螺旋は、 $\Delta s = K\Delta\rho$ とした。 K の値を変化させたときの曲線の形状の変化を図3に示す。

4 美しい曲線セグメント

本節では、2次のBezier曲線と同様に3個の制御点を指定することで、 α の値に応じた美しい曲線セグメントを描く手法について述べる。ここでは、方向角による曲線式(9),(10)を対象とするが、弧長による曲線式を用いる場合も、弧長と方向角相互のパラメータ変換を行えば同様である。

式(9),(10)による美しい曲線上において、ある曲線セグメントの始点の方向角を θ_a 、終点の方向角を θ_c とする。方向角 θ_a の曲線上の点 P_a からその点の接線方向に伸ばした直線と、 P_c からその点の接線方向に伸ばした直線の交点を P_b とすると、方向角 θ_a の点から θ_c の点までの曲線セグメントの制御点 P_a, P_b, P_c が定まる(図4(a))。美しい曲線セグメントは、美しい曲線の形状全体の中から、ユーザが指定した制御点 P_0, P_1, P_2 による制御ポリゴンと P_a, P_b, P_c による制御ポリゴンが相似形になるものを探索し、美しい曲線セグメント上の点に対して P_a, P_b, P_c が P_0, P_1, P_2 に移るようなアフィン変換を施すことによって描画する。ここで、相似形とは、ある制御ポリゴンに回転、平行移動、および各軸方向に等倍のスケーリング変換を施すことによって別の制御ポリゴンに重ねることができることを意味する。

図4(b)は、3個の制御点 P_0, P_1, P_2 を与え、 $\alpha = 2$ の曲線セグメントを描いた例である。ここで、

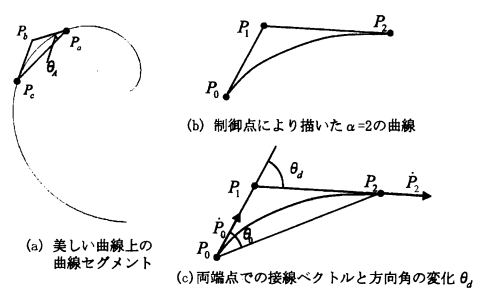


図4 制御点と曲線セグメント

$|\overrightarrow{P_0P_1}| < |\overrightarrow{P_1P_2}|$ と仮定する。この条件が満たされない場合は、 P_0 と P_1 の位置を交換すればよい。 P_0 での単位接線ベクトルは $\vec{P}_0 = \overrightarrow{P_0P_1} / |\overrightarrow{P_0P_1}|$ 、 P_2 での単位接線ベクトルは $\vec{P}_2 = \overrightarrow{P_1P_2} / |\overrightarrow{P_1P_2}|$ となる。曲線セグメントの方向角の変化は \vec{P}_0 と \vec{P}_2 の角度変化に等しいので、曲線セグメントの方向角の変化は θ_d となる。また、 $\overrightarrow{P_0P_1}$ と $\overrightarrow{P_0P_2}$ のなす角を θ_0 とする。図4(c)を参照。

図4(a)に示す美しい曲線上で、曲線セグメントの方向角の変化は θ_d であるので、 $\theta_c = \theta_a + \theta_d$ である。また、 $\overrightarrow{P_aP_b}$ と $\overrightarrow{P_bP_c}$ のなす角を θ_A とする。開始点の方向角 θ_a と方向角の変化 θ_d が与えられると、 P_a, P_b, P_c, θ_A をすべて求めることができる。

$\alpha \neq 1$ の場合に、 P_0, P_1, P_2 による制御ポリゴンと相似形になる P_a, P_b, P_c による制御ポリゴンは、美しい曲線形状の全体から $\theta_A = \theta_0$ となるような θ_a を二分法によって求めることによって探索することができる。方向角には上限または下限またはその両方が存在しない場合があるので、 $\theta_A = \theta_0$ となるような θ_a は、 α の値によって上限または下限が存在しないように修正した二分法によって求めることができる。 θ_a が求まったら、式(9),(10)によって求めた $\theta_a \leq \theta \leq \theta_c$ の範囲の美しい曲線上の点にアフィン変換を施せばよい。アフィン変換の行列は、 P_a, P_b, P_c と P_0, P_1, P_2 の対応から一意に求めることができる。 $\alpha = 1$ の場合は、 θ_a の値を(例えば0に)固定し、 $\theta_A = \theta_0$ となるような $K(> 0)$ を上記と同様な修正した二分法によって求めればよい。

図5に様々な α の美しい曲線セグメントを示す。 α が1に近い場合は制御点の配置の制約は緩いが、 α が1から離れると、曲率半径の変化に対する強い拘

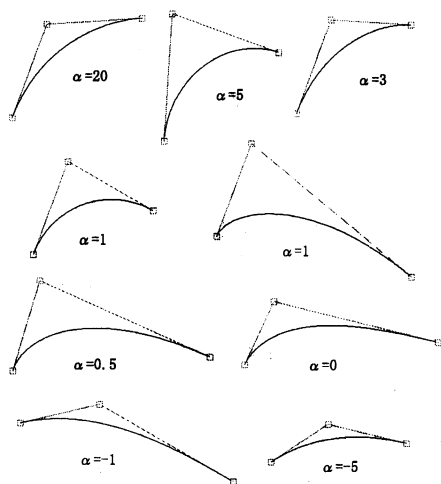


図5 様々な α の美しい曲線

束から曲線を描くことができる制御点の配置に制約が生じる。本研究で試験的に作成したプログラムでは、指定された α と制御点の配置に対応する曲線セグメントが得られない場合には、 $|\theta_A - \theta_0|$ がもっとも小さくなるような曲線を表示し、制御点または α を変更するためのガイドとしている。

図6に、制御点を同じ位置に配置した $\alpha = -2, 0, 2$ の曲線とその縮閉線（曲率中心をプロットした曲線）を示す。 α が（負の方向に）小さくなるほど曲線は制御ポリゴンに近くなり、（正の方向に）大きくしていくと制御ポリゴンから離れていく。図6では α の変化に対する曲線の形状の違いはあまり明確ではないが、スクリーン上で異なる曲線がほぼ同じように見える場合でも、プロッタなどを用いてフルスケールで印刷をすると形状の大きな違いを認識できる場合があることが知られている[4]。このような場合には、縮閉線を表示することによって、スクリーン上で曲線形状を分析することができる。 α を変化させたときの曲線形状の変化はスクリーン（紙面）上ではあまり大きくない場合が多いが、その縮閉線は図6に示すように大きく変化している。

5 まとめ

本報告では、原田ら[1, 2]の主張する人工物や自然界における「美しい曲線」の多くは曲率対数分布図に

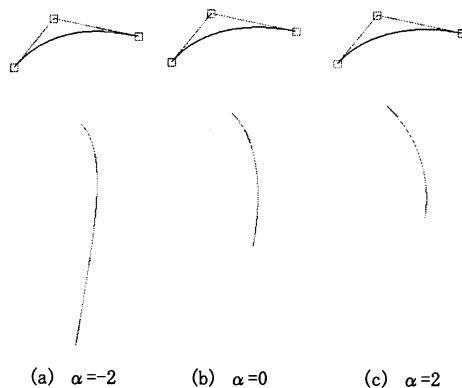


図6 $\alpha = -2, 0, 2$ の曲線とその縮閉線

おいて傾き α の直線で近似できるという考察に基づき、「美しい曲線」を方向角と弧長で定式化した。また、これらの式に基づき、美しい曲線の全体像が α の値によってどのように変化するかを明らかにした。さらに、美しい曲線の形状のコントロールを可能とするために、2次のBezier曲線と同様に3個の制御点を指定することによって美しい曲線セグメントを描く手法を提案した。これにより、デザイナーは、 α の値と3つの制御点を指定することによって美しい曲線セグメントを描くことができ、 α の値や制御点の位置を変更することによって対話的な曲線形状のコントロールが可能となる。

今後の課題として、計算の高速化と高精度化、複数セグメントの接続、曲面への拡張などがあげられる。

参考文献

- [1] 原田利宣, 森典彦, 杉山和夫, 曲線の物理的性質と自己アフィン性, デザイン学研究, Vol. 42, No.2, pp.33-40, 1995.
- [2] 原田利宣, 吉本富士市, 森山真光, 魅力的な曲線とその創成アルゴリズム, 形の科学会誌, Vol. 13, No.3, pp.149-158, 1998.
- [3] 三浦憲二郎, 美しい曲線の一般式, Visual Computing グラフィクスとCAD 合同シンポジウム, pp.227-232, 2005.
- [4] G. Farin, Curves and Surface for CAGD 4th Edition, Academic Press, 1997.