2006－CG－122（2）
2006／2／20

細分割曲面の曲線メッシュ生成と Gregory パッチによる内挿

吉井 ゆかり＊　徳山 喜政＊　今野 晃市＊＊　曽根 順治＊
＊東京工芸大工学部　＊＊岩手大工学部

概要
CGアニメーションでは，人物や動物などのキャラクターの形状モデルが重要である．これらの形状を複数枚の Bezier，B-spline や NURBS などのパラメトリック曲面で表現する場合，曲面同士を滑らかに連続するのは困難であり，複雑な処理を必要とする．この問題を解決するために，近年細分割曲面 (Subdivision Surfaces) がよく利用されている．しかし，効率的でデザイナーの意図するようなモデリングが依然として大きな課題である．一方，曲線メッシュを Gregory パッチで内挿することで滑らかな曲面を生成するモデリング手法はよく知られている．この方法は，曲線メッシュを変形しても曲面同士の G^1 連続性が保たれるという大きなメリットがある．本研究では，ポリゴンメッシュと同一位相をもつ Catmull-Clark 細分割曲面の曲線メッシュを生成し，曲線メッシュを Gregory パッチで内挿するようなモデリング手法を提案する．本手法により生成した曲線メッシュの曲面形状と細分割曲面の形状が非常によく似ている．また，直観性と局所変形性においては曲線メッシュの曲面が細分割曲面より優れているため，自由曲面形状のモデリングにおいては，ポリゴンで大まかな形状を生成したあと，曲線メッシュを変形して最終形状を生成する手法が有用である．

Curve Mesh Generation of Subdivision Surface and Gregory Patch Interpolation

Yukari Yoshii *　Yoshimasa Tokuyama*　Kouichi Konno**　Junji Sone *
*Faculty of Engineering, Tokyo Polytechnic University
**Faculty of Engineering, Iwate University

Abstract
In CG animation, the modeling of CG characters such as humans or animals is important. If these shapes are represented by parameteric surfaces such as Bezier, B-spline or NURBS surface, it is difficult to make adjacent surfaces connected smoothly and it requires a complex procedure. To solve this problem, instead of parametric surfaces, subdivision surfaces are often used for representing shapes. However, it is still a big problem how to fulfill efficient modeling intended by designers. On the other hand, it is the well-known way to generate smooth surfaces by interpolating a curve mesh with Gregory Patches. There is a big merit that the G^1 continuity of adjacent surfaces can be maintained even if the curve mesh is modified. In this paper, we propose a modeling method that is to interpolate a curve mesh with Gregory Patches after generating a curve mesh of a Catmull-Clark subdivision surface. By this method, we can generate a surface that is quite similar to the subdivision surface and superior to the subdivision surface in intuitivity and local modification property.

1. はじめに

CGアニメーションでは，人物や動物などのキャラクターの形状モデルが重要である．従来，これらの形状を複数枚の Bezier，B-spline や NURBS などのパラメトリック曲面で表現されてきたが，曲面同士を滑らかに連続するのは困難であり，複雑な処理を必要とする．また，滑らかに接続するように曲面を生成しても，一部の曲面を変形すると，曲面同士の連続性が崩れてしまうため，再度調整する必要がある．この問題を解決するために，近年細分割曲面 (Subdivision Surfaces) がよく利用されている．細分割曲面とは，ポリゴンに分割と重み付けの操作を繰り返し適用することで，滑らかな曲面形状を生成する手法のことである．Doo ら[1] および Catmull ら[2] によって基礎理論が構築され，Loop[3] が三角メッシュを対象とした手法を提案した．Loop 細分割曲面はすべての面が三角形のポリゴンに適用されるのに対して，Catmull-Clark 細分割曲面ではこのような制限がない．そのため，多くの３次元CGシステムはCatmull-Clark 細分割曲面を採用している．

細分割曲面は，任意の位相をもつポリゴン形状に適用することが可能であるため汎用性が高い．しかし，細分割曲面手法を用いたモデリングの過程において，デザイナーがポリゴンをモデリングし，システム側がそれを細分割曲面に変換し，レンダリング後の滑らかな曲面形状や分割後のメッシュを表示する．デザイナーが表示されたレンダリングイメージや分割後のメッシュを確認しながら，頂点，稜線，面の追加，削除，移動などの操作でポリゴンを試行錯誤的に変形することで最終の曲面形状を生成する．しかし，システム側が任意の位相のメッシュから滑らかな曲面を生成できるが，デザイナーが直接的に最終の曲面形状をモデリングしていないので，直観性

に欠けている．また，ポリゴン上の１個の頂点を動かすだけて，広範囲にわたって形状が変更されるので，局所変形性にも欠けている．さらに，既存の CAD/CG システムが認識可能な自由曲面を保持していないという問題もある．

一方，複雑な自由曲面形状を設計するための手法として，曲面の境界曲線を入力して曲面メッシュを生成し，境界で囲まれた領域を内挿する手法がある．設計者は内挿された曲面を評価し，メッシュに曲線を追加したり，変形，削除をしながら，形状を作りこんでいく．このような手法は，曲面形状を直接入力，変形しながら形状を設計していく手法に比べて，設計者の負担が少ないという利点がある [4]．Chiyokura らは， 不規則な曲線メッシュを滑らかに内挿すための曲面表現として Gregory パッチ [5]，有理境界 Gregory パッチ [6] を提案した．Gregory パッチや有理境界 Gregory パッチは，曲面の境界導関数を u，v 各パラメータ方向で独立に定義できる特徴をもつ．この特徴により， 輪郭曲線列さえ確定すれば，曲面間を G^1 連続に内挿できる．

脇田ら [7] は，初期のポリゴンメッシュから同一位相をもつ曲線メッシュを生成し，曲線メッシュから Gregory パッチを生成する手法を提案している．しかし，曲線の生成方法は丸め変形操作を用いた独特なものであり，生成した形状は Catmull-Clark の細分割曲面形状と比較しにくい．Peters [8] は，初期メッシュの各 N 角形に対応する細分割極限 B-spline 曲面の生成方法を提案している．この方法では，初期メッシュの頂点を曲面の制御点と見なして，ノット挿入および正則でない特異点での連続性修正より細分割極限 B-spline 曲面の制御点を生成している．しかし，この方法で B-spline 曲面を生成したとしても，一部の曲面を変形すると，曲面同士の連続性が崩れてしまうという問題は依然として存在する．

本研究では，Catmull-Clark 細分割曲面と Gregory パッチ両方の特徴を生かすために，ポリゴンメッシュから同一位相をもつ曲線メッシュを Catmull-Clark 細分割法則に基づいて生成し，曲線メッシュを Gregory パッチで内挿するようなモデリング手法を提案する．本手法により，曲線メッシュを Gregory パッチで内挿することで得られた曲面形状と細分割曲面の形状が非常によく似ている．また，直観性と局所変形性においては前者が細分割曲面より優れている．

2. Catmull-Clark の細分割曲面

Catmull-Clark の細分割曲面手法は，任意のポリゴンを初期メッシュとし，分割を繰り返すことで，滑らかな曲面を生成する．分割により生成される新しいメッシュの頂点は，分割前のメッシュの頂点，辺，面に対応付けられる．図1において，点線で示されるメッシュは分割前のメッシュであり，実線で示されるメッシュは分割後のメッシュである．

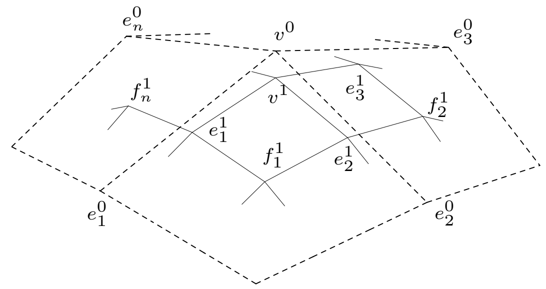

図１ 価数 n の頂点 v^0 の周り
Fig. 1 The situation around a vertex v^0 of valence n

頂点 v^0 に接続している稜線の本数 (価数と呼ぶ) を n とすると，分割後のメッシュの面上点 $(f_1^1, f_2^1, ..., f_n^1)$ は分割前の各面の重心位置に生成される．また，式 (1) に示すように，辺上点 $(e_1^1, e_2^1, ..., e_n^1)$ はその辺の両側の面上点と，両端の頂点の平均とする．式 (2) に示すように，新たにできる頂点 (v^1) は，偶頂点 (分割前にあった頂点) の座標，偶頂点につながっている稜線のもう一方の頂点，偶頂点の周りの面の面上点の座標の重み付き平均とする．

$$e_j^{i+1} = \frac{v^i + e_j^i + f_{j-1}^{i+1} + f_j^{i+1}}{4} \tag{1}$$

$$v^{i+1} = \frac{n-2}{n} v^i + \frac{1}{n^2} \sum_j e_j^i + \frac{1}{n^2} \sum_j f_j^{i+1} \tag{2}$$

3. 曲線メッシュの生成方法

本研究における細分割曲面の曲線メッシュ生成方法は次に示す複数のステップにより構成される．

(１) 初期メッシュの分割
(２) 極限点をフィティングする曲線の生成
(３) フィティング曲線の制御点修正

ここで，図2 の初期メッシュ(半径 300，高さ 300 の５角柱) を例にしてそれぞれのステップについて説明する．

3.1 初期メッシュの分割

初期メッシュを式 (1) と式 (2) を用いて細分割を行う．１回目の分割によってすべての面は四辺形になる．１回分割したとき，初期メッシュの各稜線は，分割後の 2 本の稜線と対応をとる．同時に，2 本の稜線の 3 つの頂点は，もとの稜線と対応させる．また，2回分割したときには，初期メッシュの各稜線は，分割後の 4 本の稜線と対応をとる．同時に，4 本の稜線の 5 つの頂点は，もとの稜線と対応させる．また，初期メッシュの各面についても，構成する稜線列，分割後の対応した稜線列を境界とする面集合，面集合に含まれる頂点などの情報を保存し，後にこれらの情報を利用して Gregory パッチで内挿した曲面の形状を評価する．

3.2 極限点をフィティングする曲線の生成

本研究では，上記で得られた 5 つの頂点情報から１本の 3 次の Bezier 曲線を生成する． Bezier 曲線の生成手順は以下に示す．

(１) 初期メッシュの稜線ごとに得られた 5 つの頂点情報の極限点を計算する．細分割曲面の極限点 v^* の

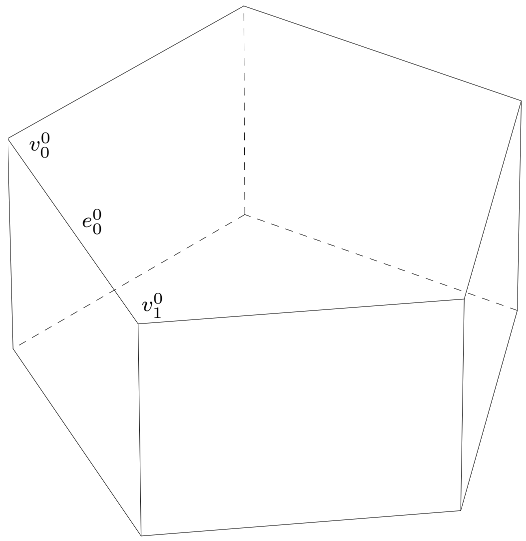

図2　初期メッシュ
Fig. 2　Initial control mesh

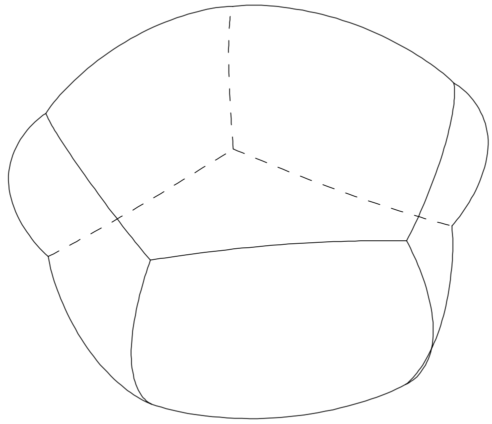

図4　生成後の曲線メッシュ
Fig. 4　The generated curve mesh

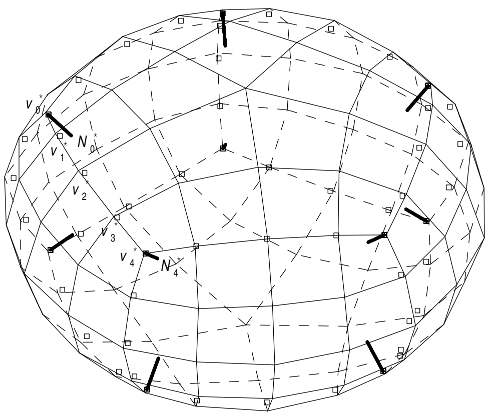

図3　細分割曲面における極限点と法線ベクトルの方向
Fig. 3　The limit point and the direction of normal vector in a subdivision surface

計算は式(3)を利用する[9]．

$$v^* = \frac{n^2 v^1 + 4\sum_j e_j^1 + \sum_j f_j^1}{n(n+5)} \qquad (3)$$

図3において，マーカーで示される点が極限点である．この図に示す半径 300，高さ 300 の5角柱の場合，2回分割後の頂点と極限点との最大距離が 0.835 で，最も長い稜線の長さ 35.2 に対する比率が 2.37 %なので，非常に近いことがわかる．

(2) 初期メッシュの稜線ごとに得られた 5 つの極限点を $v_k^*(k = 0, \cdots, 4,)$ とし，また，それぞれのパラメータを (0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0) とし，最小2乗法により1本の 3 次 Bezier 曲線を生成する[10]．ただし，v_0，v_4 が Bezier 曲線の両端点になるような拘束条件を課す．

3.3　フィッティング曲線の制御点修正

Catmull-Clark 細分割曲面は，ポリゴンが正則(すべての頂点の価数が 4 である)のときには，3 次の B-spline 曲面に収束することが知られており，価数が 4 のところにおいて C^2 連続で，それ以外のところでは C^1 連続となる．一方，3.2節で述べたステップにおいて，初期メッシュの頂点に対応する極限点周りの Bezier 曲線の接線ベクトルが同一平面上に乗っているとは限らない．そこで，初期メッシュの頂点に対応する極限点での単位法線ベクトルと極限点の位置から平面を定義する．なお，細分割曲面における極限点での法線ベクトルは次の式により計算できる[9]．

$$N^* = c_2 \times c_3 \qquad (4)$$

ここで

$$c_2 = \sum_j A_n cos(\frac{2\pi j}{n}) e_j^1 + (cos(\frac{2\pi j}{n}) + cos(\frac{2\pi(j+1)}{n})) f_j^1 \qquad (5)$$

$$A_n = 1 + cos(\frac{2\pi}{n}) + cos(\frac{\pi}{n})\sqrt{2(9+cos(\frac{2\pi}{n}))} \qquad (6)$$

c_3 は式(5)の e_j^1 を e_{j+1}^1 で，f_j^1 を f_{j+1}^1 で置き換えることで計算できる．図3の太い線分は初期メッシュの頂点に対応する極限点での法線ベクトルの方向であり，N_0^* と N_4^* はそれぞれ v_0^* と v_4^* での法線ベクトルの方向である．曲線の接線ベクトルが定義した平面にのらない場合には，各曲線における頂点の極限点に近い制御点を平面へ射影する．ただし，射影後の曲線が元の曲線から大きく変わる可能性があるので，Hoschek の方法を利用して再フィッティングを行う[11]．再フィッティング曲線は次の式で表現されるとする．

$$\mathbf{C}(t) = \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t)\mathbf{P}_i \tag{7}$$

ここで，$B_i^3(t)$ は Bernstein 基底関数である．$\mathbf{P}_i$ は制御点である．再フィティング曲線の始点，終点での単位接線ベクトルは射影後の曲線の始点，終点での単位接線ベクトル $(\mathbf{T}_1,\ \mathbf{T}_2)$ とすれば，再フィティング曲線 $\mathbf{C}(t)$ の制御点は次のように表現できる．

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= v_0, \\ \mathbf{P}_1 &= v_0 + \alpha_1\mathbf{T}_1, \\ \mathbf{P}_2 &= v_4 - \alpha_2\mathbf{T}_2, \\ \mathbf{P}_3 &= v_4 \end{aligned} \tag{8}$$

ここで，v_0，v_4 は両端の極限点であり，α_1，α_2 はスカラーである．残り 3 個の極限点 v_k と $\mathbf{C}(t)$ との関係は次のようになる．

$$v_k = \sum_{k=1}^{3} B_j^3(t_k)\mathbf{P}_i + e_k \tag{9}$$

e_k は各極限点と $\mathbf{C}(t)$ 上の対応点との残差ベクトルである．ここで，この残差ベクトルを誤差ベクトルと呼ぶ．すべての極限点の誤差ベクトルの長さの和 (ε) は次の式で表現できる．

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{3}(e_k)^2 = \sum_{k=1}^{3}(v_k - \sum_{i=0}^{3} B_i^3(t_k)\mathbf{P}_i)^2 \tag{10}$$

ここで，ε が最小になるように近似を行う．ε を最小にするためには，次の式を満たす必要がある．

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_i} = 0, \qquad i = 0, 1 \tag{11}$$

式 (11) より，2 個の方程式が得られるので，α_i が解ける．そして，式 (8) より，再フィティング曲線の制御点が得られる．図4 は生成後の曲線メッシュを示す．曲線メッシュの位相と初期のポリゴンメッシュの位相とは一致する．この例においては，極限点とフィティング曲線との最大距離が 0.108 で，近似誤差が非常に小さいことがわかる．

4. Gregory パッチによる内挿

曲線メッシュは細分割曲面の境界を表すものであり，各領域は 3 次 Bezier 曲線により囲まれている．この領域に Chiyokura らの手法を用いて双３次の Gregory パッチでメッシュを内挿する [5]，双３次の Gregory パッチは，図5に示すように２０個の制御点 $\mathbf{P}_{ijk}(i = 0,\cdots,3; j = 0,\cdots,3; k = 0,1)$ で表現される．双３次の Gregory パッチの曲面式は次のようになる．

$$\mathbf{S}(u,v) = \sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} B_i^3(u)B_j^3(v)\mathbf{Q}_{ij}(u,v) \tag{12}$$

ただし，$B_i^3(u)$ と $B_j^3(v)$ はBernstein 基底関数である．

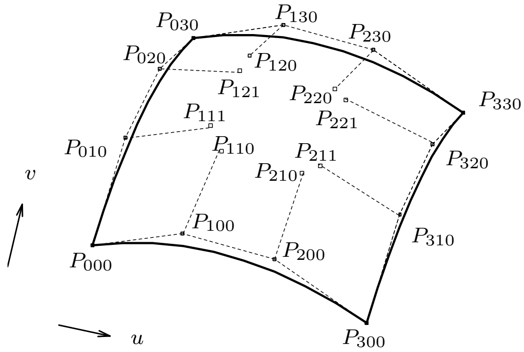

図5　Gregory パッチ
Fig. 5　Gregory Patch

また，パッチの制御点 $\mathbf{P}_{ijk}$ と $\mathbf{Q}_{ij}(u,v)$ には，次のような関係がある．

- $i \neq 1,2$ または $j \neq 1,2$ のとき
  $\mathbf{Q}_{ij}(u,v) = \mathbf{P}_{ij0}$
- $i = 1,2$ かつ $j = 1,2$ のとき

$$\mathbf{Q}_{11}(u,v) = \frac{u\mathbf{P}_{110} + v\mathbf{P}_{111}}{u+v}$$
$$\mathbf{Q}_{12}(u,v) = \frac{u\mathbf{P}_{120} + (1-v)\mathbf{P}_{121}}{u+(1-v)}$$
$$\mathbf{Q}_{21}(u,v) = \frac{(1-u)\mathbf{P}_{210} + v\mathbf{P}_{211}}{(1-u)+v}$$
$$\mathbf{Q}_{22}(u,v) = \frac{(1-u)\mathbf{P}_{220} + (1-v)\mathbf{P}_{221}}{(1-u)+(1-v)}$$

境界曲線は 3 次 Bezier 曲線によって定義され，双 3 次Bezier 曲面の内部制御点を二重にした構造をもっている．流れベクトル関数(Cross Boundary Derivative) を u, v のパラメータごとに独立に定義できるため，曲面間が G^1 連続を保つように曲面を内挿することができる．Gregory パッチの内挿により，ポリゴンメッシュと位相的に等しい自由曲面形状を生成することができる．

5. 結果と考察

図6は犬のCGキャラクタの初期メッシュ(横 65，高さ 100，奥行き 50)を示す．図7は本研究の手法を用いて生成した同一位相をもつ曲線メッシュを示す．初期メッシュの直線稜線ごとに細分割曲面上の Bezier 曲線が生成されている．しかし，この曲線メッシュを Gregory パッチで内挿すると，耳付近の三角形の内挿形状は中心周りにあまり綺麗ではなかった．これは，非四辺形を内挿するときに，面の中心と各辺の中点との間に曲線を生成するが，面の中心位置が面を構成する曲線の制御点の座標値の平均値で計算されているため，面の中心位置によって内挿面が凹凸になりやすいからと考えられる．そこで，初期

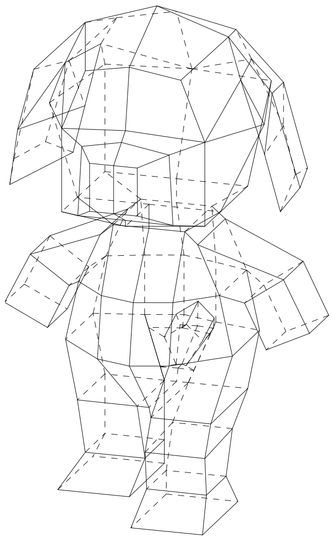

図6　犬キャラクタの初期メッシュ
Fig. 6　The initial control mesh of a dog character

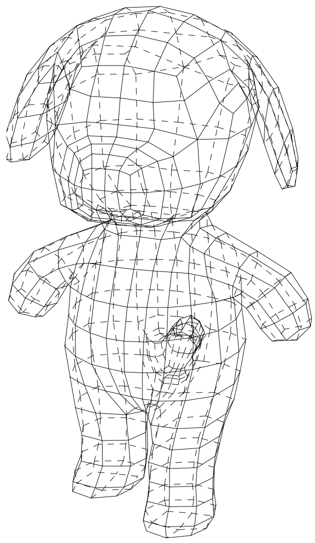

図8　１回細分割後のメッシュ
Fig. 8　The mesh after one subdivision

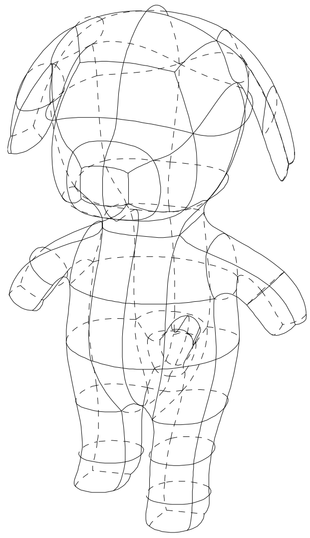

図7　初期メッシュに対応する曲線メッシュ
Fig. 7　The curve mesh after subdivision

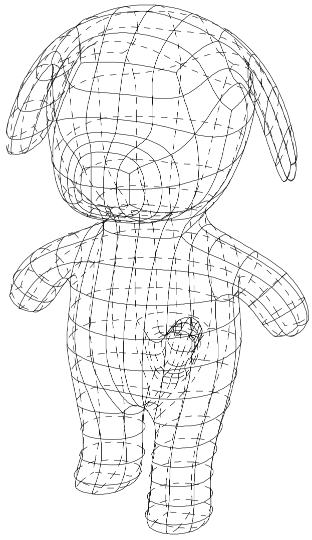

図9　１回細分割後のメッシュに対応する曲線メッシュ
Fig. 9　The curve mesh after one subdivision

メッシュを１回分割することですべての面を四辺形にしてから曲線メッシュを生成することにした．図8は初期メッシュを１回細分割後のメッシュを示す．図9は１回細分割後のメッシュに対応する曲線メッシュを示す．図10はGregoryパッチによる内挿後のシェーディング表示である．極限点とBezier曲線の最大距離は0.09である．ポリゴンメッシュの各四辺形面に属する分割後の９個の内部頂点の極限点と各面に対応するGregoryパッチとの最大距離が0.16である．なお，初期メッシュを3回細分割したときの形状が極限細分割曲面の形状に非常に近いので，ここで，3回細分割したときのイメージを図11に示す．図10と図11を比べれば，曲線メッシュをGregoryパッチで内挿したときの形状とCatmull-Clark細分割曲面の形状が非常によく似ていることがわかる．図12は曲線メッシュにおける口付近の１個の頂点を動かした後のシェーディング表示である．その頂点につながっている４つの曲面パッチしか変形されていないのが特徴である．一方，細分割曲面のメッシュ上の１個の頂点を動かすと，その頂点のまわりの形状のみではなく，広範囲にわたって形状が変更されるので，直観性や局所変形性の点においては，曲線メッシュをGregoryパッチで内挿することで得られた曲面の方が優れていると言える．

6. まとめ

細分割曲面は，ポリゴンのもつ柔軟なモデリング性質を備えるため，多くのCGシステムに採用されている．しかし，効率的でデザイナーの意図するようなモデリングが依然として大きな課題である．一方，曲線メッシュ

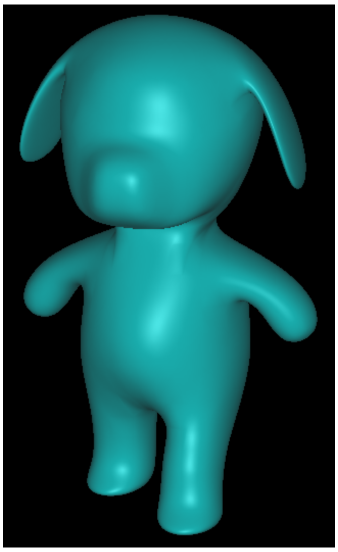

図10　シェーディング表示
Fig. 10　The shading image of the curve mesh

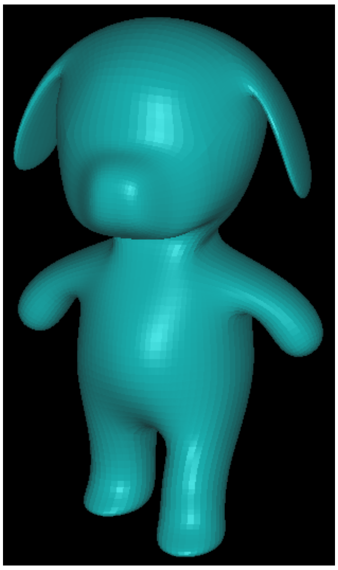

図11　シェーディング表示
Fig. 11　The shading image of the subdivision surface

から滑らかな曲面を生成する手法として，Gregory パッチを利用した内挿方法がよく知られている．本研究では，ポリゴンメッシュと同一位相をもつ極限細分割曲面の曲線メッシュを生成し，曲線メッシュを Gregory パッチで内挿するようなモデリング手法を提案した．曲線メッシュの曲面形状と細分割曲面の形状が非常によく似ていることと，直観性や局所変形性においては曲線メッシュの曲面が細分割曲面より優れていることがわかった．従って，自由曲面形状のモデリングにおいては，ポリゴンで大まかな形状を生成したあと，曲線メッシュを変形して最終形状を生成するような手法が有用である．今後の課題としては，より少ない曲線メッシュで細分割曲面形状と類似な形状を生成することがあげられる．

謝辞　本研究の一部は文部科学ハイテク・リサーチセンター整備事業(平成17年度 ― 平成22年度)の研究助成金による．

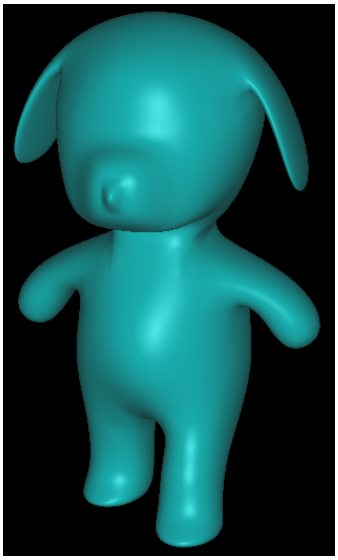

図12　シェーディング表示
Fig. 12　The shading image of the modified curve mesh

参 考 文 献

1) D. Doo and M. Sabin, Analysis of the behaviour of recursive division surface near extraordinary points, Computer aided Design, Vol.10, No.6, pp.356-360, 1978.
2) E. Catmull and J. Clark, Recursiverly generated B-spline surfaces on arbitrary topological meshes, Computer aided Design, Vol.10, No.6, pp.350-355, 1978.
3) C. T. Loop, Smooth subdivision surfaces based on triangles, Master's thesis Department of Mathmatics, University of Utash, August 1987.
4) 今野 晃市, 曲線メッシュモデリングのための自由曲面間の接続法に関する研究, 東京大学博士論文, 1996.
5) Chiyokura, H. and Kimura, F., Design of solids with free-form surfaces, Computer Graphics, Vol.17, pp.289-298, 1983.
6) Chiyokura, H., Takamura, T., Konno, K. and Harada, T., G^1 surface interpolation over irregular meshes with rational curves, In: Farin, G. (ed) *NURBS for Curve and Surface Design.* SIAM, Philadelphia, pp.15-34, 1991.
7) 脇田玲, 矢島誠, 原田毅士, 鳥谷浩志, 千代倉弘明, ラティス構造に基づく軽量で高品質な Web3D データ表現, 情報処理学会論文誌, 第 42 巻, 第 5 号, pp.1170-1181, 2001.
8) J. Peters, Patching Catmull-Clark Meshes, Proceedings of SIGGRAPH 2000, pp.255-258, 2000.
9) M. Halstead, M. Kass, T. DeRose, Efficient, Fair Interpolation using Catmull-Clark Surfaces, Proceedings of SIGGRAPH 1993, pp.35-44, 1993.
10) Piegl, L. and Tiller, W., *The NURBS Book*, Springer-Verlag, 1995.
11) Hoschek, J., Approximate conversion of spline curves. Computer Aided Design, Vol.4, pp.59-66, 1987.