2006－CG－124 (4)
2006／8／17

細分割の C^k 級連続必要十分条件

川 原 田　寛†

形状設計において，メッシュに対して施す細分割（subdivision）は，任意位相の滑らかな曲面を生成する手法として有名である．形状設計において，生成した曲面が滑らかであることは非常に重要な要請である．よって，定常な細分割の C^k 級連続必要十分条件は多くの研究者によって調べられてきたが，長年解かれず未解決問題として残されてきた．

それらの中で重要な結果だけを述べると，Reif[1) が C^1 級連続となる十分条件を導出した．さらに Prautzch[2) は C^k 級連続となる必要条件および十分条件を導出した．しかし，必要十分条件は得られなかった．

これに対し，Zorin[3) はいくつかの仮定を置いて，C^k 級連続の必要十分条件を導出した．

一方，我々は[4) において，新たな C^k 級連続の必要十分条件を導出した．その条件は細分割行列のかわりに，細分割行列から導出される行列の言葉として書かれる．このとき，滑らかさの解析は線形代数だけで出来るようになり，そのため理解が容易になる．

C^k-continuity of Stationary Subdivision Schemes

HIROSHI KAWAHARADA†

Subdivision is a well-known method for geometric design and for computer graphics, because the subdivision makes smooth surfaces with arbitrary topology. It is an important request that generated surfaces are C^k-continuous. So, many researchers study a necessary and sufficient condition of C^k-continuity for stationary subdivision schemes.

For smoothness of stationary subdivision schemes at extraordinary points, Reif[1) derived a sufficient condition for C^1-continuity. Moreover, Prautzch[2) derived some conditions for C^k-continuity. However, they are not necessary and sufficient condition.

Zorin[3) derived a necessary and sufficient condition for C^k-continuity with some assumptions.

In this paper, on the other hand, we derive a necessary and sufficient condition for C^k-continuity. Our condition is described in terms of a certain matrix which is made by subdivision matrix instead of subdivision matrix itself. Moreover, we use only linear algebra for our analysis. So, our analysis can be understood easily.

1. 細分割の C^1 級連続性

この章では，細分割の C^1 級連続の必要十分条件を導出する．ここで最も重要なアイデアは normal subdivision matrix による法線ベクトルの細分割スキームの導出である．

1.1 C^0 級連続性

まず細分割曲面の C^0 級連続必要十分条件を導出する．

細分割スキームは次のように書かれる:

$$p^{j+1} = S_k p^j.$$

ここで $p^j = (v_0^j, v_1^j, \cdots, v_k^j)^\top$.（図 1 参照.）

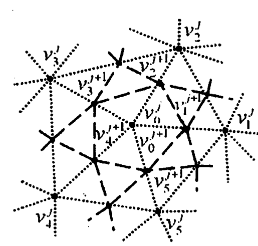

図 1 subdivision matrix

よって，

$$p^\infty = S_k^\infty p^0.$$

C^0 級連続になる（細分割曲面で頂点の極限位置が稠密に配置される）ためには，

† 東京大学大学院情報理工学系研究科
Department of Mathematical Informatics, Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo

$$p^\infty = (v_0^\infty, v_0^\infty, \cdots)^\top$$

であればよい．

よって，$S_k = V_0^{-1}HV_0$ としてジョルダン標準形 H を得る．あきらかに S_k はアフィン不変性から固有値 $\lambda_1 = 1$ とその右固有ベクトル $(1, \cdots, 1)^\top$ を持つ．p^∞ は有界でなければならないので，λ_1 はサイズ 1 の単一の巡回部分空間を持ち，さらに rank $p^\infty = 1$ より，$|\lambda_i| < \lambda_1$, $i = 2, 3, \cdots$ でなければならない．ここで λ_i, $i = 2, 3, \cdots$ は S_k の固有値である．

このとき，

$$
\begin{aligned}
p^\infty &= S_k^\infty p^0 \\
&= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \vdots & * \\ 1 & \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & 0 & \\ 0 & & & \end{array}\right) V_0 p^0 \\
&= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \vdots & 0 \\ 1 & \end{array}\right) V_0 p^0,
\end{aligned}
$$

となるので細分割スキームは C^0 級連続である．

また，S_k の第一左固有ベクトルを e_1 とすると，$e_1 \cdot p^0$ として v_0^∞ を計算することができる．

1.2 Normal Subdivision Matrix

これ以降，細分割の C^0 級連続性を仮定する．

細分割の一ステップは次のように書かれた：

$$
\begin{pmatrix} v_0^{j+1} \\ v_1^{j+1} \\ \vdots \\ v_k^{j+1} \end{pmatrix} = S_k \begin{pmatrix} v_0^j \\ v_1^j \\ \vdots \\ v_k^j \end{pmatrix}.
$$

ここで，行列 Δ を

$$
\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & & \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & & \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & \\ \vdots & & & \ddots & & \end{pmatrix}
$$

として定義する．

$D'_k = \Delta S_k \Delta^{-1}$ とすると，

$$
\begin{pmatrix} v_0^{j+1} \\ v_1^{j+1} - v_0^{j+1} \\ \vdots \\ v_k^{j+1} - v_0^{j+1} \end{pmatrix} = D'_k \begin{pmatrix} v_0^j \\ v_1^j - v_0^j \\ \vdots \\ v_k^j - v_0^j \end{pmatrix}.
$$

ここでアフィン不変性から S_k の行和は 1 である．よって，v_0^j は他の要素 $v_1^{j+1} - v_0^{j+1}, v_2^{j+1} - v_0^{j+1}, \cdots, v_k^{j+1} - v_0^{j+1}$ に影響を与えない．よって，$v_1^j - v_0^j, v_2^j - v_0^j, \cdots, v_k^j - v_0^j$ を d^j とし（図 2 参照），D'_k の対応する部分行列を D_k とする：

$$
D'_k = \left(\begin{array}{c|c} a & * \\ \hline 0 & \\ \vdots & D_k \\ 0 & \end{array}\right).
$$

このとき，$d^{j+1} = D_k d^j$．これを差分スキームと呼ぶ．

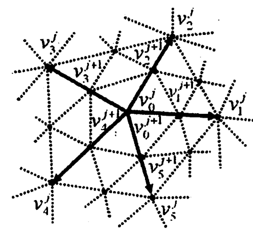

図 2　差分ベクトル．d^j の行は差分ベクトル $v_i^j - v_0^j$．差分ベクトルは極限で v_0^∞ での一階微分（接ベクトル）に収束する．

ここで，d^j の x 要素だけを並べたものを d_x^j とし，同様に d_y^j, d_z^j を y 要素だけ z 要素だけ並べたものとする．

今，$u_1, u_2 \in \mathbf{R}^k$ を使って，行列 ΛD_k を次のように定義する：

$$\Lambda D_k(u_1 \wedge u_2) = D_k u_1 \wedge D_k u_2.$$

ここで $\wedge$ は楔積．このとき，

$$\Lambda D_k(d_y^j \wedge d_z^j) = D_k d_y^j \wedge D_k d_z^j.$$

そこで，$N^j = (d_y^j \wedge d_z^j, d_z^j \wedge d_x^j, d_x^j \wedge d_y^j)$ とすると，

$$N^{j+1} = \Lambda D_k\, N^j$$

という関係が得られる．N^j のある行は $v_i^j - v_0^j$ と $v_l^j - v_0^j$ の間の外積であり，つまり v_0^j 近傍の法線ベクトルである．

つまり，この関係は法線ベクトルの細分割を表している．ΛD_k は次数 k の頂点のまわりの法線ベクトルを細分しているので "normal subdivision matrix" と呼ぶ．

N^j はメッシュの面でない unreal face を含む（対して，メッシュの面は Real face と呼び，$(v_i^j - v_0^j) \times (v_{i+1}^j - v_0^j)$ or $(v_k^j - v_0^j) \times (v_1^j - v_0^j)$ と書かれる．N^j のそれ以外の行が unreal face である）．

1.3 Tangent Plane Continuity

差分ベクトルが v_0^∞ での一階微分に収束することから，細分割曲面が v_0^∞ で tangent plane continuous（接平面連続）になるための必要十分条件は，N^∞ の

すべての行が同じ方向を指すことである（ここでは n と $-n$ を同じ方向としている）．

今，$\Lambda D_k = V^{-1}AV$ としジョルダン標準形 A を得る．

Tangent plane continuous になるためには，$\lim_{j\to\infty}(\Lambda D_k)^j = V^{-1}\lim_{j\to\infty}(A)^j V$ のランクが 1 でなければならない．よって A^∞ の最大要素を考える．D_k の固有値を $\Lambda_i, i=1,2,\cdots$ とする（ただし，$|\Lambda_i| \geq |\Lambda_{i+1}|, \Lambda_i \neq \Lambda_j$）．

Λ_i に対応するジョルダンセルは：

$$\begin{pmatrix} \Lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda_i & 1 \\ & & & \Lambda_i \end{pmatrix}$$

となる．

このジョルダンセルの大きさを l とすると，

$$\begin{pmatrix} \Lambda_i & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \Lambda_i & 1 \\ & & & \Lambda_i \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \Lambda_i^n & {}_n\mathrm{C}_1\Lambda_i^{n-1} & \cdots & {}_n\mathrm{C}_{l-1}\Lambda_i^{n-l+1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \Lambda_i^n & {}_n\mathrm{C}_1\Lambda_i^{n-1} \\ & & & \Lambda_i^n \end{pmatrix}.$$

よって，このジョルダンセルの最大要素（絶対値で）は，${}_n\mathrm{C}_{l-1}\Lambda_i^{n-l+1}$ となる（ただし，十分大きな n に対して）．

ここで A^n の最大要素を考えることができる．

1.3.1 $|\Lambda_1| > |\Lambda_2|$ の場合

この場合，

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} \Lambda_1^n \left(\begin{array}{c|c} \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\Lambda_1^n}\lim_{n\to\infty} *^n & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．ここで $*$ は Λ_1 に対応するジョルダンセルたち．$*$ のジョルダンセルの最大サイズを l_m とする．このとき，$*^n$ の最大要素は ${}_n\mathrm{C}_{l_m-1}\Lambda_1^{n-l_m+1}$ となる（ただし，十分大きな n に対して）．$*^n$ の他の要素は $n\to\infty$ で ${}_n\mathrm{C}_{l_m-1}\Lambda_1^{n-l_m+1}$ に対して十分小さくなる．

サイズ l_m のジョルダンセルがユニークならば，この最大要素もユニークになる．その最大ジョルダンセルの第一行が A^n で a 行目に対応するとすると，

$$N^\infty = V^{-1}\lim_{n\to\infty}(A)^j VN^0$$
$$= V^{-1}\lim_{n\to\infty}({}_n\mathrm{C}_{l_m-1}\Lambda_1^{n-l_m+1})\cdot \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) VN^0$$
$$= \lim_{n\to\infty}({}_n\mathrm{C}_{l_m-1}\Lambda_1^{n-l_m+1})\cdot \left(\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} 0 & \cdots & 0 & V_a^{-1} & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) VN^0$$
$$= \lim_{n\to\infty}({}_n\mathrm{C}_{l_m-1}\Lambda_1^{n-l_m+1})\begin{pmatrix} V_{1a}^{-1}\cdot vn_a^0 \\ V_{2a}^{-1}\cdot vn_a^0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

となる．ここで V_a^{-1} は V^{-1} の a 列目，V_{ia}^{-1} は V_a^{-1} の i 行目，vn_s^0 は VN^0 の s 行目．今，rank $N^\infty = 1$．よって Λ_1 が実かつ正ならば，細分割曲面は tangent plane continuous になる．

ここで vn_a^0 が必ずしも非ゼロベクトルではないことに注意する．つまり，$\exists N^0, vn_a^0 = (0,0,0)$．このとき，細分割曲面は tangent plane continuous にはならない．しかし，そのような N^0（そのような頂点配置 p^0）は稠密な集合にならない．よって，そのような場合を除いて C^k 級連続性を議論することにする．

サイズ l_m のジョルダンセルがユニークでない場合，最大要素もユニークにならないので rank $V^{-1}A^\infty \neq 1$．よって，tangent plane continuous にはならない．

1.3.2 $|\Lambda_1| = |\Lambda_2| > |\Lambda_3|$ の場合

この場合，

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \Lambda_1^\infty \cdot \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{1}{\Lambda_1^\infty}\lim_{n\to\infty} *^n & 0 & 0 \\ \hline 0 & \frac{\Lambda_2^\infty}{\Lambda_1^\infty}\frac{1}{\Lambda_2^\infty}\lim_{n\to\infty} \acute{*}^n & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

となる．ここで $*$ は Λ_1 のジョルダンセルたち，$\acute{*}$ は Λ_2 のジョルダンセルたち．$\acute{l}$ を $*$ と $\acute{*}$ のジョルダンセルたちの最大サイズとする．それらのジョルダンセルのうちサイズ $\acute{l}$ を持つものがユニークならば，同様に議論できる．さもなければ，rank $V^{-1}A^\infty \neq 1$ となり，tangent plane continuous ではなくなる．

他の場合（例えば $|\Lambda_1| = |\Lambda_2| = |\Lambda_3| > |\Lambda_4|$ の場合）でも，同様に議論できる．

ここで N^j は unreal face の法線ベクトルを含んでいることに注意する．しかしそれらの収束を，別に考える必要はない．全ての real face の法線ベクトルが同じ向きになる時およびその時のみ，全ての unreal face もその向きを向くからである．

まとめると，Λ を ΛD_k の固有値のうち絶対値が最大のものの集合，l_m を $\Lambda_i \in \Lambda$ に対するジョルダンセルの最大サイズ，q をサイズが l_m であるような Λ のジョルダンセルの個数とすると，次の定理を得る．

Theorem 1.1 (Tangent Plane Continuity)
細分割曲面が v_0^∞ で *tangent plane continuous* であるための必要十分条件は $q=1$ かつ最大サイズのジョルダンセルに対応する固有値 Λ_i が実かつ正となることである．

1.4 C^1 級連続性

ここでは tangent plane continuity を仮定した上で C^1 級連続性を議論する．

まず，$\mathcal{R}^1 = \{i|i\text{-th row of } N^\infty \text{ is normal of real face}\}$ として $\mathcal{R}^1$ を定義する．C^1 級連続になるためには $\forall i \in \mathcal{R}^1$，$N_i^\infty$ が符号を含めて同じ向きを向く必要がある．ここで N_i^∞ は N^∞ の i 行目．

1.4.1 全ての V_{ia}^{-1} が実である場合

例えば，$(v_1^\infty - v_0^\infty)\times(v_2^\infty - v_0^\infty)$ に対応する V_a^{-1} の要素が非負であるとすると，$(v_1^\infty - v_0^\infty)\times(v_k^\infty - v_0^\infty)$ に対応する V_a^{-1} の要素は非正でなければならない．

このように，N^∞ の real face の法線ベクトルの同符号を "proper sign" と呼ぶことにする．

1.4.1.1 1-cyclical sign

$\forall i \in \mathcal{R}^1$ に対して V_{ia}^{-1} が proper sign かつ非ゼロであるとする．その上で C^1 級連続にならない場合というのは，real face が重なっているときである（図 3 参照）．このように v_0^∞ の近傍が一枚のディスクになっていない時 C^1 級連続性にならず，一枚のディスクかつ全ての real face の法線ベクトルが符号を含めて同じ向きであることと C^1 級連続性は等価である．

1 枚のディスクになっていることを次のようにしてチェックする．基準となる差分ベクトル $v_i^\infty - v_0^\infty$（i はどれでもかまわない）をとり，$(v_i^\infty - v_0^\infty)\times(v_{i+1}^\infty - v_0^\infty), (v_i^\infty - v_0^\infty)\times(v_{i+2}^\infty - v_0^\infty), \cdots, (v_i^\infty - v_0^\infty)\times(v_k^\infty - v_0^\infty), (v_i^\infty - v_0^\infty)\times(v_1^\infty - v_0^\infty), \cdots, (v_i^\infty - v_0^\infty)\times(v_{i-1}^\infty - v_0^\infty)$ を考える．それらの N^∞ における行番号の順序付けられたセットを $\mathcal{C}^1$ とする．

要するに，ある差分ベクトル $v_i^\infty - v_0^\infty$ に着目し，それと他の差分ベクトル全てとの法線ベクトルを順番に見ようとしている．

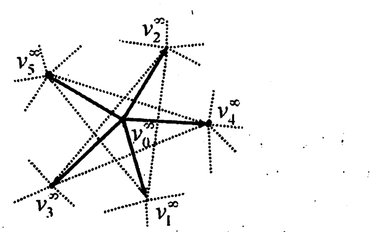

図 3　2 枚のディスク．v_0^∞ の近傍が 2 枚のディスクになっている．このとき，C^1 級連続にならない．

例えば，$i=1$ とすれば $(v_1^\infty - v_0^\infty)\times(v_2^\infty - v_0^\infty), (v_1^\infty - v_0^\infty)\times(v_3^\infty - v_0^\infty), \cdots, (v_1^\infty - v_0^\infty)\times(v_k^\infty - v_0^\infty)$ を見ることになる．その順序付けられた符号が $(+,+,+,\cdots,+,0,0,\cdots,0,-,-,\cdots,-)$ のようにプラスとマイナスを跨ぐ回数が一回であることが，1 枚のディスクであるための必要十分条件である．このようにプラスとマイナスを跨ぐ回数が一回である符号の列になっていることを，"1-cyclical sign" と定義する．

つまり，$\forall i \in \mathcal{C}^1$ に対して V_{ia}^{-1} が 1-cyclical sign になっていることが，1 枚のディスクになっていることと等価である．

以上より，次の定理を得る．

Theorem 1.2 (C^1-continuity)
細分割曲面が v_0^∞ で *tangent plane continuous* であり，かつ $\forall i \in \mathcal{R}^1$ に対して V_{ia}^{-1} が非ゼロとする．このとき，細分割曲面が v_0^∞ で C^1 級連続であるための必要十分条件は $\forall i \in \mathcal{R}^1$ に対して V_{ia}^{-1} が *proper sign*，かつ順序付けられたインデックス $\forall i \in \mathcal{C}^1$ に対して V_{ia}^{-1} が *1-cyclical sign* となることである．

1.4.1.2 消　滅　面

$\exists i \in \mathcal{R}^1, V_{ia}^{-1} = 0$ とき，N_i^∞ に対応する real face が消滅している（図 4 参照）．

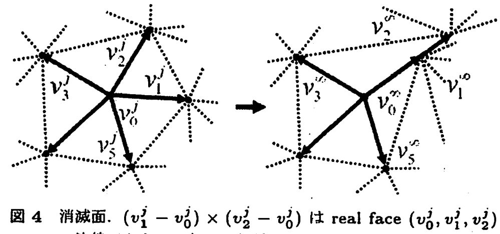

図 4　消滅面．$(v_1^j - v_0^j)\times(v_2^j - v_0^j)$ は real face (v_0^j, v_1^j, v_2^j) の法線ベクトルである．$(v_1^\infty - v_0^\infty)\times(v_2^\infty - v_0^\infty)$ に対応する V_a^{-1} の要素が 0 であるとき，三角形 $(v_0^\infty, v_1^\infty, v_2^\infty)$ が消滅している．

この場合，C^1 級連続性を議論するのは多くの場合わけを必要とするので，ここでは議論しない．また，消滅面が存在するような細分割は非常にまれである．Loop や Catmull-Clark などほとんどの細分割は消滅面を持たない．

1.4.2 $\exists i, V_{ia}^{-1}$ が実でない場合

$\exists i', V_{i'a}^{-1}$ が実でないとすると，vn_a^0 は $\bar{V}_{i'a}^{-1}$ （$\bar{V}_{i'a}^{-1}$ は $V_{i'a}^{-1}$ の複素共役）を因子として含む．なぜならば $N_{i'}^{\infty}$ は実だからである（細分割行列は実行列）．

よって，$\forall i, V_{ia}^{-1}$ は $V_{i'a}^{-1}$ を因子として含む．なぜなら同様に $\forall i, N_i^{\infty}$ が実でなければならないからである．

ゆえに $\forall i, \frac{V_{ia}^{-1}}{V_{i'a}^{-1}}$ を新たな V_a^{-1} とすると，実になるので同様に考えることができる．

1.4.3 特異点以外での有効性

また v_0^{∞} で C^1 級連続であるならば，その近傍でも C^1 級連続である．なぜなら，ある差分ベクトルの両側の real face の法線ベクトルが符号を含めて同じ向きを向くので，差分ベクトル上およびそれらがなす面上で C^1 級連続となる．よって，これらの条件は頂点の極限位置の近傍でも成り立つ．つまり細分割曲面全体についての条件となっている．

ここで，proper sign 性は細分割曲面のヤコビアンの constant sign に，1-cyclical sign 性は細分割曲面の injectivity に対応している．これらが固有ベクトルの要素の符号として現れるところが normal subdivision matrix を用いる利点である．

また，高階の滑らかさ（C^k-conituity）については，[4] を見て欲しい．

2. 厳密法線ベクトルの計算

前章の解析から C^1 級連続をチェックするのと同時に，厳密法線ベクトルの式は求まっていることが分かる．例として Loop の細分割に対して，この解析を当てはめ厳密法線ベクトルを求めて見よう．

今回は v_0^j の次数は 6 としよう．Loop の細分割の細分割行列 S_6 とその D_6 は：

$$S_6 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D_6 = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

となる．

このとき，normal subdivision matrix ΛD_6 は:

$$\Lambda D_6 = \frac{1}{128}\left(\begin{array}{ccccccccccccccc} 12 & 3 & -2 & -2 & -3 & 3 & 2 & 2 & -3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 12 & 2 & -3 & -2 & 3 & 1 & 0 & -1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 12 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 & 12 & 3 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 & -3 & 0 & -2 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & -2 & 3 & 12 & -1 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & 12 & 3 & -2 & -2 & 3 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & -1 & 3 & 12 & 2 & -3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 2 & 12 & 2 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & 3 & -2 & -3 & 2 & 12 & -1 & 0 & 2 & -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 3 & 3 & 0 & -1 & 12 & 3 & -2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & -1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 3 & 12 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & 12 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 & 3 & 0 & 12 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 3 & 0 & -3 & 2 & 1 & 2 & 3 & 12 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & -3 & -3 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 2 & -2 & 3 & 3 & 12 \end{array}\right)$$

となる．ここで，$N^0 = (d_1^0 \times d_2^0, d_1^0 \times d_3^0, d_1^0 \times d_4^0, d_1^0 \times d_5^0, d_1^0 \times d_6^0, d_2^0 \times d_3^0, d_2^0 \times d_4^0, d_2^0 \times d_5^0, d_2^0 \times d_6^0, d_3^0 \times d_4^0, d_3^0 \times d_5^0, d_3^0 \times d_6^0, d_4^0 \times d_5^0, d_4^0 \times d_6^0, d_5^0 \times d_6^0)^\top$ （$d_i^0 = v_i^0 - v_0^0$）である．

$\Lambda D_6 = V_6^{-1} A_6 V_6$ としてジョルダン標準形 A_6 を得る：

$$V_6^{-1} = \left(\begin{array}{ccccccccccccccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$A_6 = \frac{1}{32}\mathbf{diag}(8, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1)$$

$$V_6 = \frac{1}{12}\left(\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right.$$

$$
\begin{matrix}
0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 \\
-4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
0 & -2 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\
0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\
-2 & -2 & 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & -2 \\
0 & -1 & 1 & -1 & -4 & 0 & -1 & 1 \\
0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 3 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
-2 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & -1 & 1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1
\end{matrix}\right).
$$

ここで $\Lambda = \{\frac{8}{32}\}$. Λ の要素が一つ（重複もない）なので $q = 1$. さらに Λ は実かつ正である. よって, 定理 1.1 より Loop の細分割は次数 6 の頂点の極限位置とその近傍で tangent plane continuous になる.

今, Λ の最大サイズのジョルダンセルの第一行目は A_6 の第一行目. よって $a = 1$. $N^0 = (d_1^0 \times d_2^0, d_1^0 \times d_3^0, d_1^0 \times d_4^0, d_1^0 \times d_5^0, d_1^0 \times d_6^0, d_2^0 \times d_3^0, d_2^0 \times d_4^0, d_2^0 \times d_5^0, d_2^0 \times d_6^0, d_3^0 \times d_4^0, d_3^0 \times d_5^0, d_3^0 \times d_6^0, d_4^0 \times d_5^0, d_4^0 \times d_6^0, d_5^0 \times d_6^0)^\top$ だったので, $\mathcal{R}^1 = \{1, 5, 6, 10, 13, 15\}$.

よって, $\forall i \in \mathcal{R}^1, V_{ia}^{-1} = \{V_{11}^{-1}, V_{51}^{-1}, V_{61}^{-1}, V_{10,1}^{-1}, V_{13,1}^{-1}, V_{15,1}^{-1}\} = \{1, -1, 1, 1, 1, 1\}$. ゆえに $\forall i \in \mathcal{R}^1, V_{ia}^{-1}$ は proper sign かつ非ゼロ.

また, $\mathcal{C}^1 = (1, 2, 3, 4, 5)$（基準の差分ベクトルは $v_1^\infty - v_0^\infty$ とした）. よって, $\forall i \in \mathcal{C}^1, V_{ia}^{-1} = (V_{11}^{-1}, V_{21}^{-1}, V_{31}^{-1}, V_{41}^{-1}, V_{51}^{-1}) = (1, 1, 0, -1, -1)$. 順序付けられた符号の列としてみると $(+, +, 0, -, -)$. ゆえに $\forall i \in \mathcal{C}^1, V_{ia}^{-1}$ は 1-cyclical sign.

よって, 定理 1.2 より, Loop の細分割は次数 6 の頂点の極限位置とその近傍で C^1 級連続になる.

厳密法線ベクトル N^∞ は:

$$
\begin{aligned}
& N_1^\infty \\
&= \lim_{n\to\infty} 4^n \cdot \lim_{n\to\infty} ({}_n\mathrm{C}_{l_m - 1} \Lambda_i^{n - l_m + 1}) V_{1a}^{-1} \cdot vn_a^0 \\
&= \lim_{n\to\infty} 4^n \cdot \lim_{n\to\infty} ({}_n\mathrm{C}_0 (\frac{1}{4})^n) V_{11}^{-1} \cdot vn_1^0 \\
&= vn_1^0.
\end{aligned}
$$

ここで N_1^∞ は N^∞ の第一行. よって, vn_1^0 が厳密法線ベクトルを表している（vn_1^0 は VN^0 の第一行目）.

$$
\begin{aligned}
vn_1^0 = {} & d_1^0 \times d_2^0 + d_1^0 \times d_3^0 - d_1^0 \times d_5^0 - d_1^0 \times d_6^0 \\
& + d_2^0 \times d_3^0 + d_2^0 \times d_4^0 - d_2^0 \times d_6^0 + d_3^0 \times d_4^0 \\
& + d_3^0 \times d_5^0 + d_4^0 \times d_5^0 + d_4^0 \times d_6^0 + d_5^0 \times d_6^0.
\end{aligned}
$$

ここで, $d_i^0 = v_i^0 - v_0^0$. このように, 細分割の C^1 級連続性と厳密法線ベクトルを簡単に調べることができる.

ジョルダン標準形を計算する手間が問題だと考える人がいるかもしれない. しかし, 簡単な仮定を置くだけで, ジョルダン標準形を計算する必要はなくなる. D_k が対角化可能であるとする（実用的な細分割のほぼ全てにおいて, D_k は対角化できる）.

$D_k = U^{-1}BU$ としよう. λ_1, λ_2 を第一第二固有値, u_1^{-1}, u_2^{-1} を第一第二右固有ベクトルとすると, $\Lambda D_k(u_1^{-1} \wedge u_2^{-1}) = D_k u_1^{-1} \wedge D_k u_2^{-1} = \lambda_1 u_1^{-1} \wedge \lambda_2 u_2^{-1} = \lambda_1\lambda_2(u_1^{-1} \wedge u_2^{-1})$ より, ΛD_k の第一固有値 $\lambda_1\lambda_2$, 第一右固有ベクトル $u_1^{-1} \wedge u_2^{-1}$ が得られる. 同様に, ΛD_k は $\Lambda D_k = V^{-1}AV$ として対角化可能である. $u, v \in \mathbf{R}^k$ を使うと, $V(u \wedge v) = Uu \wedge Uv$, $V^{-1}(u \wedge v) = U^{-1}u \wedge U^{-1}v$, $A(u \wedge v) = Bu \wedge Bv$ となっている.

ここで, ΛD_k の固有値は $\lambda_i\lambda_j$ と書かれるので, 第二固有値も簡単に求められ, C^1 級連続になるためには第二固有値は第一固有値より絶対値が小さくなければならないので, $q = 1, a = 1$ となる. そのとき, $V_a^{-1} = u_1^{-1} \wedge u_2^{-1}$ となる. ΛD_k の第一左固有ベクトルは $u_1 \wedge u_2$ となるため（u_1, u_2 は D_k の第一第二左固有ベクトル）, 厳密法線ベクトルは $V_{11}^{-1}(u_1 \wedge u_2) \cdot N^0$ として計算できる. ΛD_k を求めることなしに, C^1 級連続性の判定および厳密な法線ベクトルの計算が可能である.

3. 結　論

本稿では定常な細分割スキームに対して C^1 級連続の必要十分条件を導出し, さらに細分割曲面の厳密法線ベクトルの計算法を示した.

最も重要なアイデアは, 法線ベクトルたちを細分割する "normal subdivision matrix" の導出である. 法線ベクトルは差分ベクトルの外積であり, 差分ベクトルが極限で一階微分（接ベクトル）へ収束することから, normal subdivision matrix を使って C^1 級連続の容易な解析が可能となった.

この解析では極限における厳密な法線ベクトルが表れ, C^1 級連続になるとき簡単に計算することができる.

参　考　文　献

1) Reif, U.: A unified approach to subdivision algorithms near extraordinary points, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. 12, pp. 153–174 (1995).
2) Prautzsch, H.: Analysis of C^k-subdivision surfaces at extraordinary points, *Preprint. Presented at Oberwolfach* (1995).
3) Zorin, D.: Smoothness of Stationary Subdivision on Irregular Meshes, *Constructive Approximation*, Vol. 16, No. 3, pp. 359–397 (2000).
4) Kawaharada, H. and Sugihara, K.: C^k-continuity of Stationary Subdivisions Schemes, *Computer Aided Geometric Design*, Vol. XX, p. submitted (2006).