

バネ-質点モデルに対する信号処理的アプローチ

小林輝* 吉田典正** 神田亮**

*日本大学 生産工学研究科 **日本大学 生産工学部

バネ-質点モデルはコンピュータグラフィックスの分野で広く使われている。本研究では、モード解析を幾何学的非線形なバネを用いたバネ-質点モデルに適用し、高周波成分の削除などの信号処理的手法への応用を試みる。モード解析は、シミュレーションを独立な振動系に分解する手法である。従って、バネ定数や質量が同じパラメータ値であっても振動系の選択範囲により様々なシミュレーションを行うことができる。本研究では、モード解析を適用した場合としない場合の計算時間とシミュレーションの比較を行うとともに、高周波成分のみの選択などいくつかの信号処理的な利用の例を示す。

Signal Processing Approach to Mass-Spring Models

Hikaru Kobayashi*, Norimasa Yoshida** and Makoto Kanda**

*Graduate School of Industrial Technology, Nihon University

** College of Industrial Technology, Nihon University

Mass-spring systems are widely used in computer graphics. In this paper, we propose a method for performing approximate modal analysis for two-dimensional mass-spring systems with geometrically nonlinear springs and attempt to apply signal processing, such as the removal of high frequency vibrations, to mass spring systems. Modal analysis decomposes the vibration (or the dynamics) of a mass-spring system into mutually independent vibration modes. Therefore, models with the same spring constants and mass behave differently depending on which modes to select. We compare the computation time and the behavior of simulations with and without using modal analysis and show several examples of signal processing approach, such as high pass filtering.

1 はじめに

3次元コンピュータグラフィックにおいて、高周波成分の削除などの信号処理的手法は、3次元メッシュ[1][2]などに応用されてきた。しかしながら、バネ-質点モデルなどの物理シミュレーションに対して信号処理的な手法を適用した例は、あまり見受けられない。本研究では、モード解析の手法を用いて、バネ-質点モデルに対して信号処理的手法を応用する試みについて報告する。一般に、シミュレーションを行う際に、望ましいバネ係数などのパラメータを決定することは容易ではない。動きの高周波成分の削除などの信号処理的な手法が得られれば、バネ-質点系動特性の設計がより容易になることが期待される。

モード解析[3][4]は、振動工学や構造力学などの分野においてよく知られている手法であり、Pentland等によってコンピュータグラフィックスに適用された手法ある[5]。本研究で提案する手法は、これらの分野で用いられているモード解析をバネ-質点モデルを用いたシミュレーションに適用するものである。

バネ-質点モデルで用いられるバネの剛性マト

リックスは幾何学的非線形である。そのため、モード解析をそのまま適用することはできない。Barbic等は部分空間積分法を用いた手法を提案した[6]。O'Brienは非線形な剛性マトリックスをテ일러展開し、線形にすることによりシミュレーションを行う手法を提案した[7]。本研究では、初期形状における剛性マトリックスにより固有ベクトルを計算する。これを変位、速度、加速度などの物理座標系の成分に乘じ、一般化座標系へと変換する。一般化座標系で求められた次ステップの変位を基に、物理座標系で力を計算し、一般化座標系に戻すという処理を行う。

モード解析を適用することで、振動・発散の原因となる振動系を削除することができ、タイムステップを大きくすることができる。すべての振動系を用いて計算を行う手法に比べ、必要な振動系のみを用いて計算するため、計算時間を軽減することができることが知られている。本研究では、信号処理的な操作をバネ-質点モデルに適用することにより、任意の振動系を選択することで、シミュレーションを制御することを試みる。

2 バネ-質点モデルへのモード解析の適用

2.1 モード解析

モード解析では、物理座標系における変位、速度、加速度を互いに独立な振動系に分解することができる一般化座標系に変換する。物理座標系と一般化座標系との間の変換を行う際は、必要な振動系から求めた固有ベクトルを用いて変換する。これにより、特定の振動系の成分を増幅、あるいは削除することができる。モード解析のイメージを図1に示す。

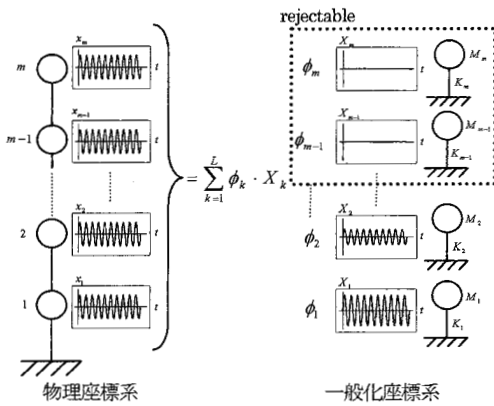


図1 モード解析のイメージ

ここでモード解析について、最も単純な多自由度系である2質点2自由度のモデルを用いて説明する(図2)。

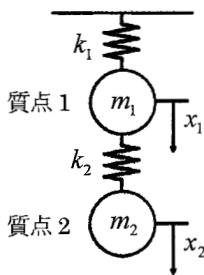


図2 多自由度モデル

ここに、 $k_i (i=1,2)$ はバネ係数、 m_i は質量、 x_i は変位を表す。図2の運動方程式は次のようになる。

$$[m_i]\{\ddot{x}_i\} + [c_i]\{\dot{x}_i\} + \{f\} = \{f_g\} \quad (1)$$

ここで $[c_i]$ はダンピング、 $\{f\}$ は外力、 $\{f_g\}$ は重力による外力である。また、 $\{\dot{x}\}$ 、 $\{\ddot{x}\}$ はそれぞ

れ速度、加速度を示す。本研究において、 $\{\}$ はベクトル、 $[]$ はマトリックスを表す。式(2)を任意の剛性マトリックス $[k]$ について解くことで、固有値、固有ベクトルが求められる。

$$([k] - \omega^2[m])\{\phi\} = \{0\} \quad (2)$$

ここで、 ω は固有値、 ϕ は固有ベクトル、 $\{0\}$ は全ての要素が0のベクトルである。固有値を正確に求めるために、質点を1つ以上固定する必要がある。この制限は、固定された質点に対し他の物理シミュレーションを行い、バネによるシミュレーションと合成することにより解消される。

2.2 剛性マトリックス

図2における全体の剛性マトリックスは、それぞれのバネごとの剛性マトリックスを

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \quad (3),$$

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

とし、式(3)(4)を次のように重ね合わせることでより得られる。

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1+k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

しかし図2では、質点1に接続するバネの上端は固定されているため、式(5)に境界条件を入れる必要がある。従って、図2の全体の剛性マトリックスは次のようになる。

$$\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

実行結果に示すモデルは、図2の1次元上のモデルではなく、2次元平面上のモデルを用いてシミュレーションを行う。2次元平面上のモデルでは、式(3)(4)に示すバネ個々の局所座標系におけるバネごとの剛性マトリックスを、全体座標系に変換する必要がある。図3に示すバネがxy平面上に存在したとする。

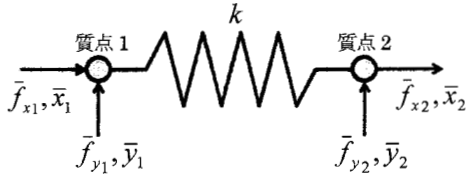


図3 2次元平面上的のバネ

ここで、 \bar{f}_{x_i} 、 \bar{f}_{y_i} はそれぞれの軸方向に発生する力、 \bar{x}_i は x 軸方向の変位、 \bar{y}_i は y 軸方向の変位である。上付きバーで示された変数は局所座標系を示す。このとき、力と変位の関係は次のように表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_{x_1} \\ \bar{f}_{y_1} \\ \bar{f}_{x_2} \\ \bar{f}_{y_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{y}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{y}_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

式(6)を

$$\bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{K}} \cdot \bar{\mathbf{X}} \quad (7)$$

と表す。ここで示した $\bar{\mathbf{K}}$ を全体座標系に変換する必要がある。

ここで、バネが角度 θ だけ傾いていたとする。図4は図3が傾いている場合の質点1周辺を拡大したものである。

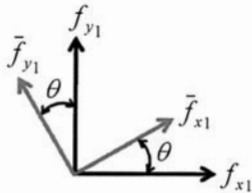


図4 質点1周辺の拡大図

局所座標系における力 \bar{f}_{x_1} 、 \bar{f}_{y_1} は全体座標系における力 f_{x_1} 、 f_{y_1} を用いて、

$$\begin{aligned} \bar{f}_{x_1} &= f_{x_1} \cos \theta + f_{y_1} \sin \theta \\ \bar{f}_{y_1} &= -f_{x_1} \sin \theta + f_{y_1} \cos \theta \end{aligned} \quad (8)$$

と表わすことができる。また質点2の力 \bar{f}_{x_2} 、 \bar{f}_{y_2}

についても同様の式が成り立つ。これをまとめる

と、

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_{x_1} \\ \bar{f}_{y_1} \\ \bar{f}_{x_2} \\ \bar{f}_{y_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_{x_1} \\ f_{y_1} \\ f_{x_2} \\ f_{y_2} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式(9)を

$$\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{T} \mathbf{F} \quad (10)$$

と表わす。変位についても式(9)と同様の関係が成り立ち、その関係式を次のように表す。

$$\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{T} \mathbf{X} \quad (11)$$

ここで、 \mathbf{T} は回転変換を行う行列であるため、この行列の逆行列は転置行列に等しい。また、以降の上付き文字 \mathbf{T} は転置行列を表す。式(10)を変形し、式(11)を代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \mathbf{X} \quad (12)$$

従って、全体座標系におけるバネごとの剛性マトリックスは、

$$\mathbf{K} = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T} \quad (13)$$

によって得ることができる。図6に示すような多自由度のモデルを扱う場合、式(13)によって得られたバネごとの剛性マトリックスを、1次元の場合と同様に重ね合わせることにより、全体の剛性マトリックスが得られる。

2.3 一般化座標系と物理座標系

一般化座標系における変位応答 X を用いて、物理座標系における変位応答 $\{x\}$ は次のように表わされる。

$$\{x\} = \sum_{i=1}^L \{\phi_i\} X_i \quad (14)$$

ここで、 L は自由度、下付き文字 i はモード次数を表す。同様の関係式が速度 \dot{X} 、加速度 \ddot{X} についても成り立つ。これとは逆に、一般座標系における変位応答 X は、物理座標系における変位応答 $\{x\}$ を用いて次のように表わされる。

$$X_i = \frac{\{\phi_i\}^T [m] \{x\}}{\{\phi_i\}^T [m] \{\phi\}} \quad (15)$$

式(15)についても速度 \dot{X} , 加速度 \ddot{X} に同様の式が成り立つ。一般化座標系を使うことで、物理座標系では相互依存していたバネの成分を、成分ごとに分解することができる。これにより、必要な、または望ましい成分のみを用いてシミュレーションすることができる。

式(1)の両辺の左側から $\{\phi_i\}^T$ を乗じ、式(14)を代入すると、一般化座標系における L 個の独立した運動方程式が得られる。

$$M_i \ddot{X}_i + C_i \dot{X}_i + F_i = F_{g_i} \quad (16)$$

ただし、

$$M_i = [\phi_i]^T [m_i] [\phi_i], \quad C_i = [\phi_i]^T [c_i] [\phi_i]$$

$$F_i = [\phi_i]^T [f_i] \quad F_{g_i} = [\phi_i]^T [f_{g_i}]$$

であり、大文字は一般化座標系を表し、小文字は物理座標系を表す。

式(16)には数値積分法が適用できるため、本研究では *Newmark β* 法を適用して解くと、離散化時間上のタイムステップ $n+1$ での応答 $\ddot{X}_{i,n+1}$, $\dot{X}_{i,n+1}$, $X_{i,n+1}$ は $\ddot{X}_{i,n}$, $\dot{X}_{i,n}$, $X_{i,n}$ を用いて式(17)~(19)で表わされる。

$$\ddot{X}_{i,n+1} = M_i^{-1} F_{i,n+1} - M_i^{-1} C_i \dot{X}_{i,n+1} + F_{g_i} \quad (17)$$

$$\dot{X}_{i,n+1} = \dot{X}_{i,n} + \frac{1}{2} (\ddot{X}_{i,n} + \ddot{X}_{i,n+1}) \Delta t \quad (18)$$

$$X_{i,n+1} = X_{i,n} + \dot{X}_{i,n} \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{X}_{i,n} \Delta t^2 \quad (19)$$

本研究ではバネ - 質点モデルの力は、次に示す式を用いて物理座標系で求める。

$$f_i = \sum_j k \frac{x_j - x_i}{|x_j - x_i|} (|x_j - x_i| - l_{ij}) \quad (20)$$

ここで、 k はバネ係数、 l_{ij} はバネの自然長を表す。式(20)において力 f_i は、バネの位置の変位に関して線形ではない。従って、バネモデルが幾何学的非線形になるため、剛性マトリックスが非線形となる。

幾何学的非線形を回避するために、本研究では、

バネモデルの初期形状における剛性マトリックスを使用する。バネの力を計算するために、本研究では、一般化座標系で求めた変位応答を物理座標系に変換し、式(20)で力を求め、それを再び一般化座標系に変換するという処理を行う。図 5 に、本研究で使用するアルゴリズムを示す。

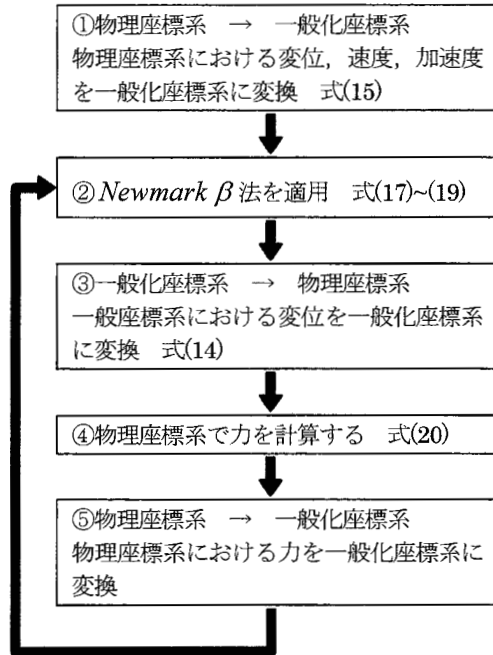


図 5 バネ - 質点モデルのためのモード解析アルゴリズム

図 5 において①, ③, ⑤は物理座標系から一般化座標系へ、あるいはその逆の変換を全ての固有ベクトルの成分を用いて行う。しかし変位、速度、加速度の計算においては、シミュレーションに対して選択された (または、望ましい) モード成分に対応する固有ベクトルの成分のみを使用して計算する。

図 5 に示したアルゴリズムを確かめるため、本研究ではモード解析を適用したシミュレーションと、物理座標系のみでシミュレーションしたものとを比較を行う。この際、それぞれのシミュレーションで同等のダンピング係数を与えるため、一般化座標系で求めた減衰マトリックス $[C]$ を用いて、物理座標系の減衰マトリックス $[c]$ を次式により求める。

$$[c] = \{\phi\}^T [C] \{\phi\}^{-1}$$

$[C]$ は一般化座標系におけるダンピング係数を対角成分に持つ対角行列である。また、 $[C]$ の対角成分は次式で求められる。

$$C_i = 2h_i \omega_i M_i$$

ここで h_i は i 番目のダンピング係数ある。

3 実行結果

本研究では、図6に示すように2次元平面に、バネと質点を配置しシミュレーションを行った。

図7は、物理座標系のみでシミュレーションしたものと、モード解析を適用し、周波数の低い方から2つの周波数のみを使用してシミュレーションを行い、様々な質点数における1ステップの平均計算時間を計測したものである。図8は、縦横10個ずつ計100個の質点を配置し、モード解析を適用して、削除数を増加させた場合の1ステップ当たりの計算時間を計測したものである。これらの図から、質点数を増加させた時モード解析を使用することにより計算時間を軽減できることが分かる。

図10(a)は、物理座標系のみでシミュレーションを行った結果であり、(b)はモード解析を適用し、高周波成分を165個削除し、シミュレーションを行った結果である。(c)は、(b)と同様のパラメータ値のモデルにテクスチャを張り付け、シミュレーションを行った結果である。(d)は低周波成分を2個、高周波成分を131個削除し、シミュレーションを行った結果である。これらのシミュレーションの質点数100個、振動系180個である。また、(b)(c)は信号処理のローパスフィルタを、(d)はバンドパスフィルタの処理である。モード解析を適用したシミュレーションにおいて、変形が微小であればある程正確なシミュレーションが可能である。

4 まとめ

本研究では、バネ-質点モデルを用いたシミュレーションにモード解析を適用することにより、信号処理的なシミュレーションの制御を試みた。その結果、変形が微小であるほど本来のシミュレーションに近い結果が得られることが確認できた。しかし、図10に示すようにモデルが裏返る、あるいは非常に大きな変形を伴うシミュレーションにおいて、本来の動作と大きく異なることが確認されている。この解決策として、毎ステップごとに剛性マトリックス、固有値、固有ベクトルを生成する手法を適用することを試みた。しかし、シ

ミュレーションが連続でなくなる等の問題が生じ、解決するに至らなかった。今後、連続でなくなる原因を追及するとともに大変形を伴うシミュレーションの近似的な信号処理を行いたいと考えている。

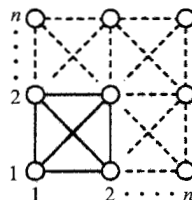


図6 バネネットワーク

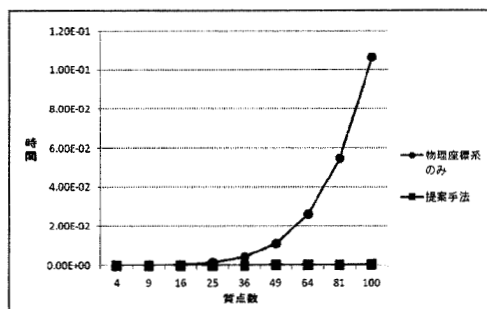


図7 計算時間の比較

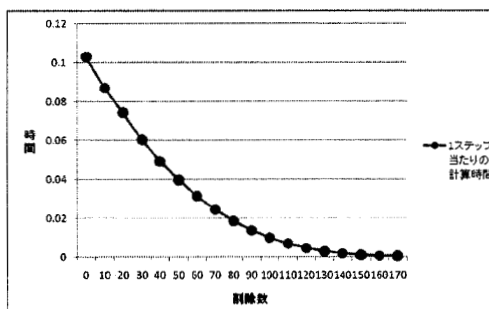


図8 削除数と計算時間

参考文献

- [1] Gabriel Taubin: A signal processing approach to fair surface design. SIGGRAPH 1995: 351-358.
- [2] I. Guskov and W. Sweldens and P. Schroder, Multiresolution Signal Processing for Meshes, SIGGRAPH 99, pp.325-334, 1999.
- [3] A. Blakeborough, M. S. Williams, A. P. Darby and D. M. Williams, The development of real-time substructure testing, Philosophical Transactions: Mathematical, Physical & Engineering Sciences, 359, pp.1869-1891, 2001.

[4] R. E. Nickell, Nonlinear Dynamics by Mode Superposition, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 7, pp.107-129, 1975.
 [5] Pentland A., and J. Williams, Good Vibrations: Modal Dynamics for Graphics and Animation, SIGGRAPH, pp.215-222, 1989.
 [6] J. Barbic and D. James, Real-Time

Subspace Integration for St. Venant-Kirchhoff Deformable Models, SIGGRAPH, pp.982-990, 2005.
 [7] James F. O'Brien, 高速で安定した変形のためのモーダル解析, GAME PROGRAMMING Gems 4, 株式会社ボーンデジタル, pp.266, 276.

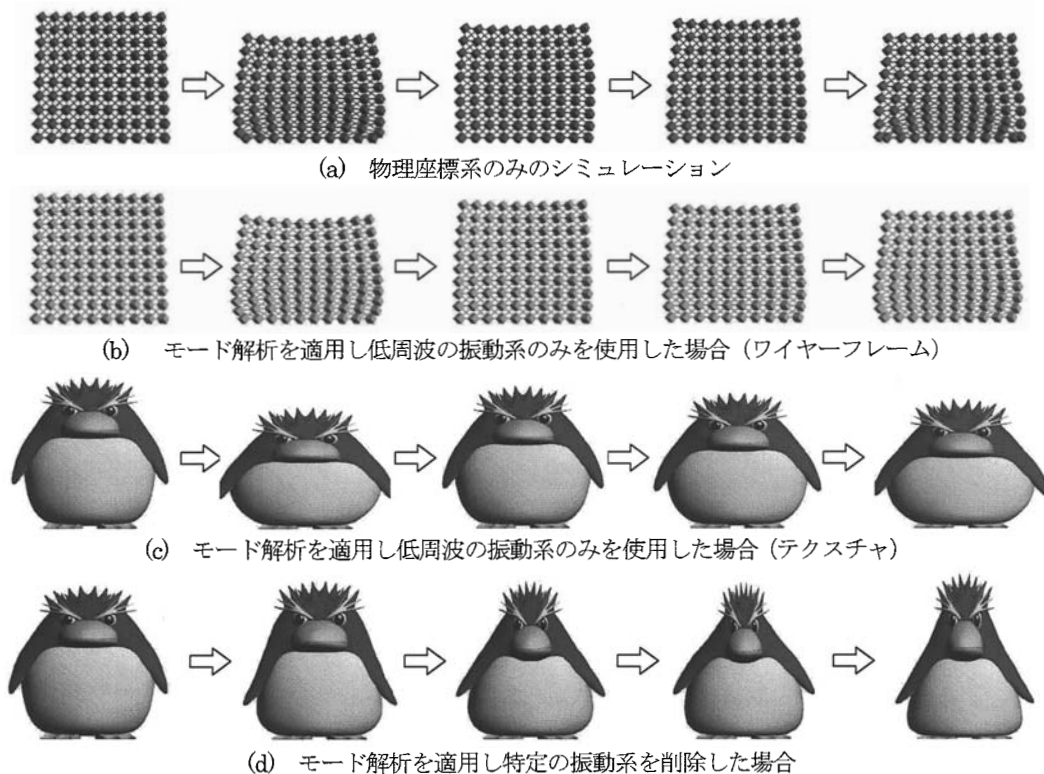


図 9 シミュレーション結果

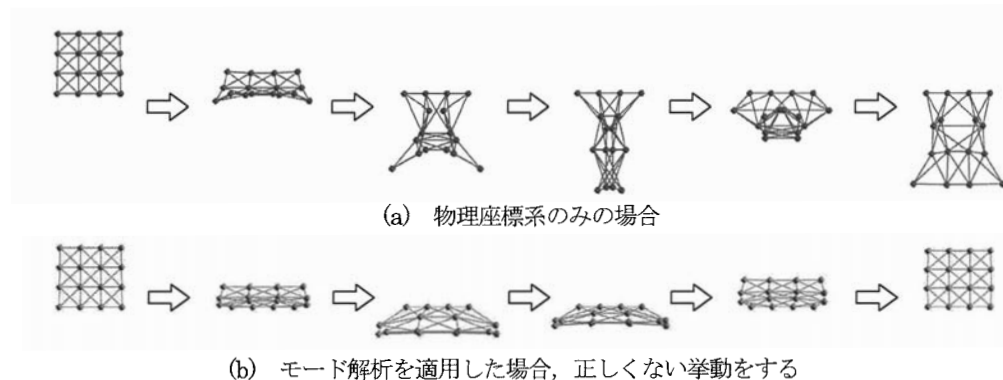


図 10 大変形を伴うシミュレーション