



格子生成法の基礎†

河村 哲也††

1. はじめに

格子生成法とは2次元、3次元の空間領域を格子と呼ばれる小領域に組織的に分割する方法を指す。ただし、たとえば2次元平面上の領域を格子に分割する場合を考えると、各格子の形状は三角形、四角形、…というようにいろいろな分割法が考えられる。本稿では偏微分方程式の差分法によく用いられる格子を念頭におくため、領域を図-1に示すような2種類の曲線群(同一種類の曲線はお互いに交わらないとする)で区切られる小領域(近似的には四辺形)に分割することを考える。このとき各曲線群は格子線、格子線の交点は格子点と呼ばれる。3次元の場合には各格子として6つの曲面で区切られる小領域を考えることになるが、紙面の都合でふれない。ただし本稿で説明する格子生成法のいくつかは3次元に容易に拡張できる。また平面でない曲面上に2次元格子を生成することも格子生成法において重要であるが、微分幾何の知識が少なからず必要になるためこれについても割愛する。詳細については格子生成の教科書¹⁾などを参照して欲しい。本稿では2次元の平面領域において上記のような格子を生成することに関して入門的な解説を行う。

さて格子生成法とは境界の幾何形状が(座標値として)与えられたとき内部の格子点の座標値を決定する方法である。これはある意味で古典的な境界値問題と見なすことができ、二階偏微分方程式を解けば答えが得られると想像される。実際に二階偏微分方程式を利用した格子生成法があり、本稿では便宜上偏微分方程式法と呼ぶことにしよう。別の見方として、境界の座標値から内部の座標値を決めるのであるから、各種の補間法を用い

ても格子が生成できると考えられる。これらの方法も多く存在するが、総称して代数的方法と呼ぶことにしよう。

偏微分方程式の差分法では一般に偏微分方程式を領域内の格子点数の連立の代数方程式におきかえて解く。差分近似の性格上、格子が小さいほど、いいかえれば格子点数が多いほど近似は良くなる。しかし格子の幅を単純に各方向に半分にするると格子点数は2次元で4倍、3次元では8倍になる。取り扱える格子点数にはおのずと限度があるため、限られた格子点数でいかに精度の良い計算を行うかが、差分法など近似解法にいつでもついてまわる問題となる。この意味で空間にいかにか効果的に格子点を配置するかという格子生成の問題は差分法にとって非常に重要な位置をしめる。効果的な格子の配置とは考えている物理現象の空間的变化の激しい部分に格子が集中しており、逆にあまり変化しない部分はまばらになっているような配置と考えてよい。取り扱う物理現象によって、たとえば境界付近などというように、変化の激しい部分が方程式を解く前にあらかじめ分かっている場合もある。しかし変化が激しい部分が方程式を解いてはじめて明かになったり、またその位置が時間的に変化する場合もありうる。したがって格子生成は純粋な幾何学の問題にとどまらず、物理現象自体にも依存した問題となる。格子生成法の究極的な形として、解の変化を自動的に感知しながら、求解中に格子の配置が変化するような格子生成法が考えられる。このような格子は解適合格子と呼ばれ、格子生成法の中で現在さかんに研究されている方法である。

本稿では偏微分方程式法、代数的方法、解適合格子の順に簡単に述べたあと、現実の流体力学の問題に格子生成法を適用した例についてもふれることにする。

† Introduction to Numerical Grid Generation by Tetuya KAWAMURA (Department of Information Sciences, Ochanomizu University).

†† お茶の水女子大学理学部情報科学科

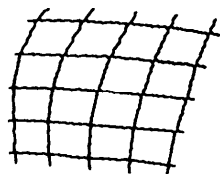


図-1 格子の例

2. 偏微分方程式の解を利用した格子生成法

(a) ラプラス方程式

図-2 に示すような領域 ABCD で BA(CD) に沿う方向に (境界線を含めて) M 本, BC(AD) に沿う方向に N 本の滑らかな格子線をつくることを考える^{1),2)}. このために次のラプラス方程式の境界値問題を考える:

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0, \quad \xi = 1 \text{ on } \Gamma_1, \quad \xi = M \text{ on } \Gamma_2, \quad (1)$$

$$\xi = \psi_3(x, y) \text{ on } \Gamma_3, \quad \xi = \psi_4(x, y) \text{ on } \Gamma_4$$

ただし ψ_3 は BC(Γ_3) に沿って 1 から M まで単調増加する関数, ψ_4 は AD(Γ_4) に沿って同じ範囲で単調増加する関数である. この問題は以下のような物理的な意味を持っている. すなわち ξ を温度と考えるとき, 領域 ABCD において Γ_1 上で温度 1, Γ_2 上で温度 M を与える. さらに Γ_3 および Γ_4 上では関数 ψ_3, ψ_4 に従って 1 から M まで単調増加する温度分布を与えるとする. このとき ξ は熱平衡状態に達したときの温度分布を表す. したがって問題(1)を解いて等高(温)線を温度 1 間隔で描くと, ψ_3 や ψ_4 の関数形によるが, おそらく図-3(a)のようになると考えられる. すなわち等温線は境界に一致し, 内部では滑らかな曲線になっている. これを一方向の格子線とする.

同様に次のラプラス方程式の境界値問題を考える.

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = 0, \quad \eta = 1 \text{ on } \Gamma_3, \quad \eta = N \text{ on } \Gamma_4, \quad (2)$$

$$\eta = \psi_1(x, y) \text{ on } \Gamma_1, \quad \eta = \psi_2(x, y) \text{ on } \Gamma_2$$

ここで ψ_1, ψ_2 はそれぞれ Γ_1, Γ_2 に沿って 1 から N まで単調増加する関数である. 問題(2)を解いて間隔 1 の等温線を描くと図-3(b)のようになるであろう. これを別の方向の格子線とする. このようにして境界と一致する滑らかな格子を領域内で生成できる (図-3(c)).

さて格子生成に必要なのは, 各等温線の交点の

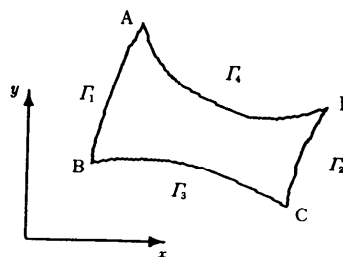
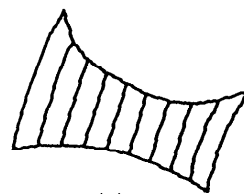
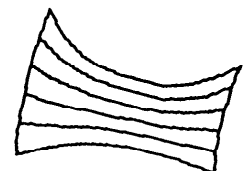


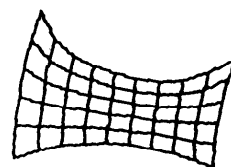
図-2 楕円型格子生成法



(a)



(b)



(c)

図-3 等温線と格子

x, y 座標である. すなわち格子点番号 I, J ($I = 2, \dots, M-1, J = 2, \dots, N-1$) を与えたとき, 対応する x, y 座標を求める必要がある. そこで(1), (2)を一組の偏微分方程式と見なした上で独立変数と従属変数の入れかえを行う. その結果, $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ に関する次の連立偏微分方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= 0, \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで

$$\begin{aligned} \alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2, \quad \beta = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \\ \gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \end{aligned}$$

である. 境界条件は $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ を適当な関数として

$$x(1, \eta) = x_3(\eta), \quad x(M, \eta) = x_4(\eta),$$

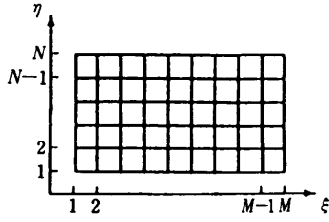


図-4 計算領域

$$y(1, \eta) = y_3(\eta), \quad y(M, \eta) = y_4(\eta) \quad (4)$$

$$x(\xi, 1) = x_1(\xi), \quad x(\xi, N) = x_2(\xi),$$

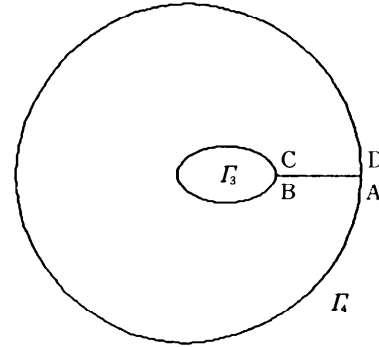
$$y(\xi, 1) = y_1(\xi), \quad y(\xi, N) = y_2(\xi) \quad (5)$$

となる。(3)は図-4に示すように ξ - η 面において長方形領域で解くことになるが、必要なのは図-4に示した内部格子点上での (x, y) の数値であることに注意しよう。すなわち(3)は格子幅1の格子を使って差分法で解けばよいことになる。

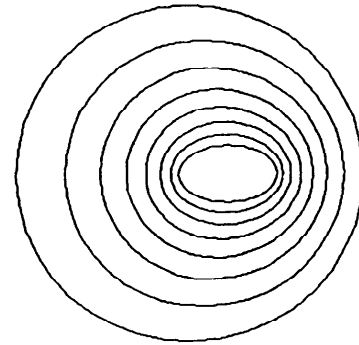
次に境界条件について考える。(4),(5)の右辺に現れる関数は一般には式の形で与えるものではなく、境界での格子点の座標を表す数値が与えられる。もともと格子生成を行うということは、境界線 AB, BC, CD, DA は既知であり、その情報を使って内部の格子点の位置を決めるということである。たとえば辺 BC 上では端点を除いて $M-2$ 個の点から格子線を出発させることになるが、その場合境界条件として出発点の x, y 座標を数値で指定することになる。他の辺も同様である。これで境界条件が定まるので(3)を図-4の差分格子で解けばよいことになる。

(b) 二重連結領域の取扱い

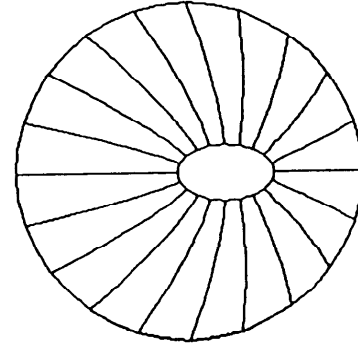
図-5(a)に示すような二重連結領域で格子を生成しよう^{1),2)}。(a)と同じくラプラス方程式を基礎にする。はじめに内部境界を取り囲む格子を生成するために内部境界で温度1, 外部境界で温度 N を与えたときの等温線を利用する。このとき等温線は図-5(b)のようになるであろう。数学的な定式化は(2)で Γ_1, Γ_2 の条件を周期条件(ある点と曲線を1周してきた点は同一点を表すという条件)でおきかえたものとなる。次にもう一方の格子を生成するために図-5(a)のようにカット CD(BA)を入れ、カットをこえて熱が伝わらないようにする。その上で、C点で値1であり Γ_3 に沿って反時計まわりに単調増加してB点で値 M になり、同様にD点で値1であり Γ_4 に沿ってA点で値 M に単調増加するように温度分布を与え



(a)



(b)



(c)

図-5 二重連結領域の取扱い

よう。このとき等温線は図-5(c)のようになるであろう。これをもう一方の格子線とする。このことは二重連結領域をカット CD に沿って切り開くと考えたと図-2のような単連結の場合と同じような取扱いができることを意味している。具体的に(3)を解くときには境界条件(4)は同じであり、(5)は周期条件

$$x(\xi, 1) = x(\xi, M), \quad x(\xi, M+1) = x(\xi, 2),$$

$$y(\xi, 1) = y(\xi, M), \quad y(\xi, M+1) = y(\xi, 2)$$

でおきかえることになる。

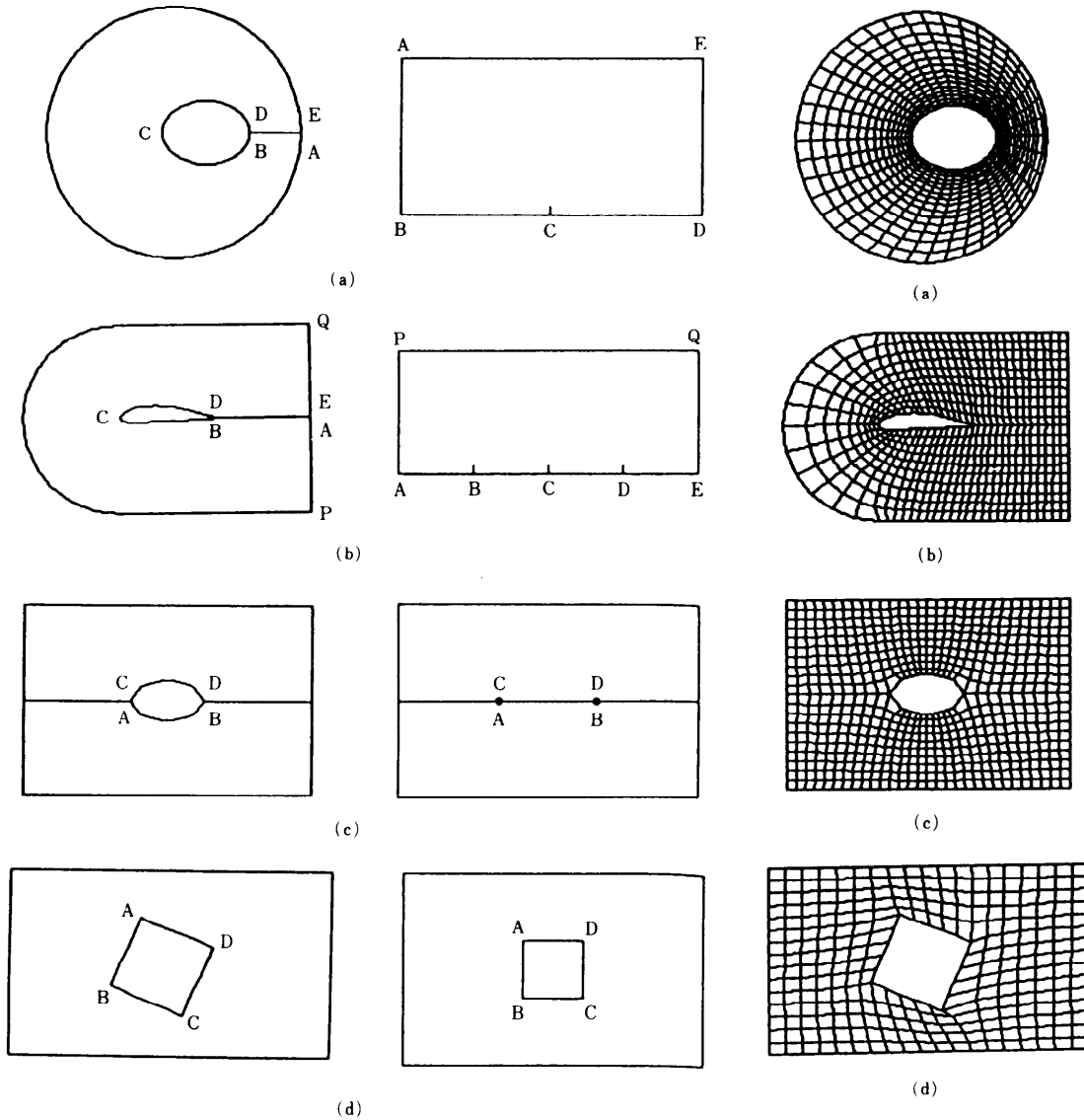


図-6 領域間の種々の対応

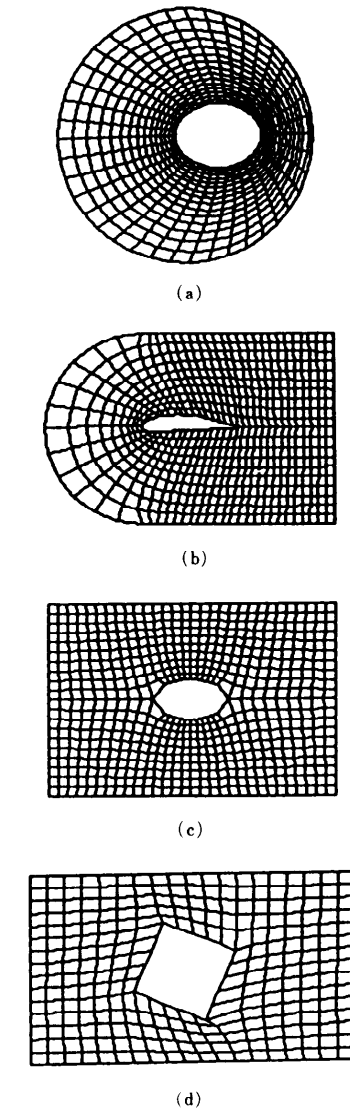


図-7 二重連結領域の種々の格子
(a)O型 (b)C型 (c)H型 (d)L型

同様に m 重連結領域は $m-1$ 本のカットをいれることにより単連結領域になおして計算することができる。ただし境界条件を課す場合にはどの点とどの点の点が同一点を表すかに注意しなければならない。

二重連結の場合にもどろう。上で行った格子生成は図-6(a)に示すように内部境界 Γ_3 を計算領域の底辺全体に対応させたが、図-6(b)に示すように底辺の一部に対応させることもできる。これは翼など一方にとがった点を持った領域での格子生成にしばしば用いられる。境界条件としては

BA, DE 上で注意が必要で DE の下(上)の点は BA の上(下)の点と同じ点を表すことになる。生成した格子の一例を図-7(b)に示す。さらに両端がとがった物体まわりの格子をつくる時には図-6(c)のようにカットを2ついれて2つの領域に分割する方法もある。この方法で生成した格子を図-7(c)に示す。図-7(a), (b), (c)の各格子はアルファベットの文字との類推からそれぞれ O 型, C 型, H 型と呼ばれる。なお図-6(d), 図-7(d)に示すように二重連結領域を保ったまま格子を生成することもできる(L型)。

(c) 格子間隔の調整

ラプラス方程式を利用する格子生成法では滑らかな格子が生成できる反面、格子間隔は一意に決ってしまい、必要に応じて領域のある部分だけ密な格子にするなど、格子間隔の調整はできない。たとえば境界付近で物理量が急激に変化するような現象を取り扱うとき、境界近くに格子を集めることができれば、領域全体で細かな格子をとるよりもはるかに効率の良い計算ができるが、ラプラス方程式を利用した方法ではこのような格子は生成できない。

格子を必要部分に集める方法としてラプラス方程式のかわりにポアソン方程式を利用する方法がある²⁾。いまポアソン方程式

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = \tilde{P}(x, y) \quad (6)$$

を考えよう。前と同様に ξ を熱と考えるとこれは点 (x, y) に \tilde{P} で表される熱源がある場合の温度分布を表し、 \tilde{P} を調整することにより格子(等温線)間隔を調整できると考えられる。同様に η についても

$$\eta_{xx} + \eta_{yy} = \tilde{Q}(x, y) \quad (7)$$

をとる。このとき格子生成に用いる基礎方程式は(6)、(7)の独立変数と従属変数を交換して

$$ax_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + J_2(Px_{\xi} + Qx_{\eta}) = 0 \quad (8)$$

$$ay_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + J_2(Py_{\xi} + Qy_{\eta}) = 0 \quad (9)$$

$$J = x_{\xi}y_{\eta} - y_{\xi}x_{\eta}$$

となる。ここで(8)、(9)の $P(\xi, \eta)$ 、 $Q(\xi, \eta)$ は $\tilde{P}(x, y)$ 、 $\tilde{Q}(x, y)$ を ξ, η の関数として表したものである。 P, Q の例として

$$P(\xi, \eta) = -a \operatorname{sign}(\xi - \xi_i) \exp(-c|\xi - \xi_i|) \quad (10)$$

$$Q(\xi, \eta) = -b \operatorname{sign}(\eta - \eta_j) \exp(-d\sqrt{(\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_j)^2}) \quad (11)$$

ととってみよう。 Q は格子点 (ξ_i, η_j) (図-8の0印)から離れるに従い急激に小さくなる。符号関数 sign を考えない場合には負の熱源と考えられるため、 Q が0の場合に比べて点 (ξ_i, η_j) において温度が低くなる。すなわち等温線は図-8(a)に示すように、熱源がない場合に比べて $\eta < \eta_j$ に対して η_j に近づき、 $\eta > \eta_j$ に対しては遠ざかることになる。両方向から近づくようにするため符号関数をつけている。その結果、図-8(b)に示すようになる。(11)において係数 b は熱源の強さ、 d は減衰率を表す。

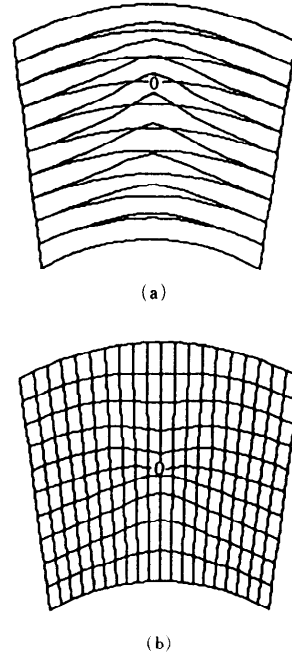


図-8 格子間隔の調整(0に熱源を配置)

次に P の効果を考えよう。この項は格子線 $\xi = \xi_i$ に近づくほど大きくなるため格子線 $\xi = \xi_i$ 全体に沿って他の格子線が近づくことになる。多くの線や点に格子を近づけるためには(10)、(11)などの関数の和をとればよい。

(d) 直交格子

格子生成により生成された格子を用いて種々の偏微分方程式を解く場合、変数変換を使って基礎方程式を変換して解くが、格子が直交していれば変換された方程式は大幅に単純化される。さらに種々の問題において格子が(少なくとも境界近くにおいて)直交していることは、境界条件を正確に課す上で非常に重要なことが多い。そこでここでは図-9に示すような物体まわりに直交格子をつくることを考える。ただし物体は $\eta=1$ で表されているものとする。なおここで示す格子生成法は双曲型偏微分方程式を利用した例になっている³⁾。

ξ 曲線と η 曲線の直交条件は、交点における接線が直交すればよいから

$$\mathbf{r}_{\xi} \cdot \mathbf{r}_{\eta} = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} = 0 \quad (12)$$

となる。ただし \mathbf{r} は曲線の位置ベクトルである。(12)からは x, y は一通りに決まらないためさらに別の条件を課す。たとえば格子の面積は

$$ds = |x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi| d\xi d\eta$$

となるため

$$x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi = S \tag{13}$$

とおいて S を指定することにする。(12), (13) を連立させて解けば (x, y) を決定することができる。ただしこのままでは方程式が非線形であるため、近似解 x_0, y_0 を用いて方程式を線形化する。すなわち

$$\tilde{x} = x - x_0, \quad \tilde{y} = y - y_0$$

とおいて \tilde{x} と \tilde{y} の積が小さいとして省略すると

$$x_\xi y_\eta = (\tilde{x} + x_0)_\xi (\tilde{y} + y_0)_\eta \sim y_{0\eta} x_\xi + x_{0\xi} y_\eta - x_{0\xi} y_{0\eta}$$

などが成り立つため次の方程式が得られる。

$$\mathbf{r}_\eta + B^{-1} A \mathbf{r}_\xi = B^{-1} \mathbf{f} \tag{14}$$

ただし

$$A = \begin{bmatrix} x_{0\eta} & y_{0\eta} \\ y_{0\eta} - x_{0\eta} & x_{0\eta} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} x_{0\xi} & y_{0\xi} \\ -y_{0\xi} & x_{0\xi} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ S + S_0 \end{bmatrix}$$

である。(14)において $B^{-1}A$ の固有値は実であるため(14)は双曲型の偏微分方程式である。すなわち(14)は $\eta=1$ での条件を用いて η が増加する方向に空間進行的に解くことができる。双曲型方程式は楕円型と異なり解法に反復計算を必要としないため格子生成に要する計算時間は楕円型に比べて格段に短くてすむ。ただし欠点として図-2や図-5のような閉領域において、条件が過剰となるため、すべての境界で境界条件が課せず、一部の境界においてのみ境界条件を課することになる。したがって外部問題のように境界が遠方であり、その形があまり問題にならない場合に有効に利用することができる。なお楕円型や代数的方法を用いた直交格子生成法もある。

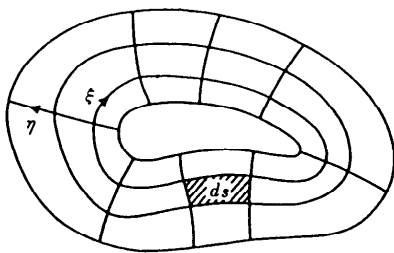


図-9 双曲型格子生成法

3. 代数型格子生成

(a) 一方向補間法

図-10に示すように領域の形が一組の平行線で囲まれた領域で格子を生成しよう。この場合は一方の格子線として境界と平行な直線群をとり、各平行線群に同数の格子点を補間法を用いて適当に配置すればよい(それらの格子点を折線で結ぶことによりもう一方の格子線群が生成できる)。補間法として最も簡単には1次のラグランジュ補間を利用する。すなわち図-11(a)において両端の位置ベクトルを $\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1$ とすると

$$\mathbf{r} = \sum_{i=0}^1 \psi_i(\xi/N) \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0(1 - \xi/N) + \mathbf{r}_1(\xi/N) \quad (\xi=0, 1, \dots, N) \tag{15}$$

となる。ただし ψ_i は1次のラグランジュ多項式である。なお高次のラグランジュ補間を用いることにより両端だけでなく内部にあらかじめ指定した点を通るような格子をつくることもできる(図-11(b))。指定点は格子間隔などを調節するために用いられるため、必ずしも格子点である必要はない。

一方向補間法にはこのほかエルミート補間、ス

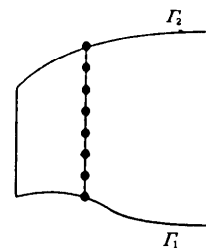


図-10 二曲線に囲まれた領域での格子生成

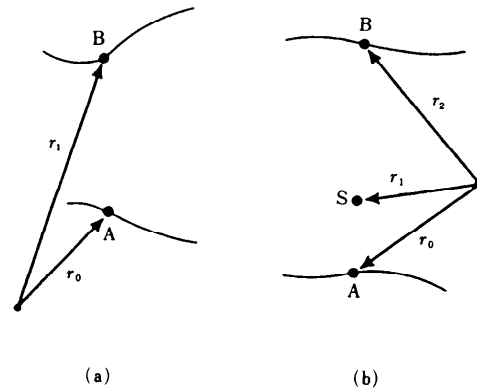


図-11 ラグランジュ補間法

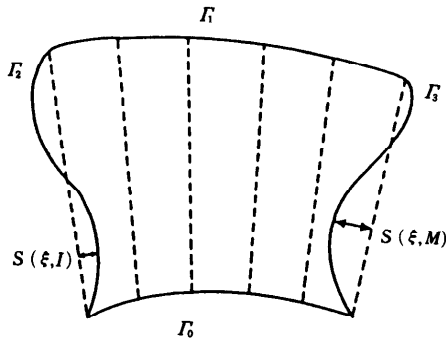


図-12 超限補間法

プライン補間, B-スプライン補間などを利用する方法がある。

(b) 多方向補間法

一方向の補間法では領域が複雑な場合には取扱いが難しくなる。たとえば図-12に示すような領域で上下の境界 $\Gamma_0\Gamma_1$ 上の点だけを用いて一次のLagrange補間を行うと、一般に格子線と左右の境界 $\Gamma_2\Gamma_3$ は一致しない。このような場合は多方向補間法を用いる。ここでは超限(Transfinite)補間法による格子生成法⁴⁾を紹介しよう。図-12においてまず $\Gamma_0\Gamma_1$ 間を1次のラグランジュ補間を行うと

$$r_s(\eta) = \sum_{i=0}^1 \psi(\xi_i/M) r(\xi_i, \eta) \quad (\xi_0=0, \xi_1=M) \tag{16}$$

となる。前述のとおり、これは一般に境界 $\Gamma_2\Gamma_3$ と一致せず境界で

$$s(\xi, 0) = r(\xi, 0) - r_s(\xi, 0) \\ s(\xi, N) = r(\xi, N) - r_s(\xi, N)$$

だけ差ができる。ここで N は η 方向の格子数で Γ_3 が $\eta=N$ に対応するものとする。 $r(\xi, 0), r(\xi, N)$ は既知であるから、差 $s(\xi, 0), s(\xi, N)$ も既知である。そこで望ましい格子として、ラグランジュ補間してできた格子と境界において差 $s(\xi, 0), s(\xi, N)$ を持ち、領域内においては $s(\xi, 0)$ と $s(\xi, N)$ をラグランジュ補間しただけの差を持つような格子を採用する。すなわち、差は内部で

$$s(\xi, \eta) = \sum_{j=0}^1 s(\xi, \eta_j) \psi_j(\eta/N) \\ = \sum_{j=0}^1 (r(\xi, \eta_j) - r_s(\eta_j)) \psi_j(\eta/N)$$

と補間できるため、この式を

$$s = r(\xi, \eta) - r_s(\eta)$$

の左辺に代入し、(16)を考慮すれば最終的に

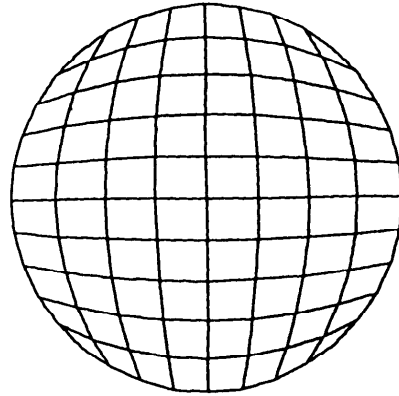


図-13 超限補間法による格子生成の例

$$r(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^1 \psi_i(\xi/M) r(\xi_i, \eta) \\ + \sum_{j=0}^1 \psi_j(\eta/N) r(\xi, \eta_j) \\ - \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \psi_i(\xi/M) \psi_j(\eta/N) r(\xi_i, \eta_j) \tag{17}$$

が得られる。(17)は双一次超限補間法と呼ばれそのつくりかたから各境界は $\Gamma_0\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3$ に一致している。(17)はより一般的な超限補間法

$$r(\xi, \eta) = \sum_{n=0}^N \phi_n(\xi/M) r(\xi_n, \eta) \\ + \sum_{m=0}^M \phi_m(\eta/N) r(\xi, \eta_m) \\ - \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \phi_n(\xi/M) \phi_m(\eta/N) r(\xi_n, \eta_m) \tag{18}$$

の特殊な場合である。ここで ϕ_n, ϕ_m は混合関数と呼ばれ内部点の分布を指定する関数である。図-13に(17)を用いて円内に生成した格子の一例を示す。超限補間法は境界に一致した格子を簡単な演算で手軽につくることができ、混合関数の指定により自由に格子間隔を調整できる。すなわち非常に汎用性に富んだ方法であり、格子生成法において多用されている。

4. 解適合格子

差分法を用いて偏微分方程式の解を求める場合、誤差がなるべく小さくなるような格子を用いるのが望ましい。ところで一般に誤差は解の勾配が大きいとこで大きくなるので、その付近で格子を細かくとるのがよい。一方、領域のどの部分で解の勾配が大きくなるかは、境界付近のように

あらかじめ予測できる場合は別として、一般には解を求めてはじめて分かるという性質のものである。さらに非定常の問題ではそのような部分が時間とともに変化し得る。そのような場合に望ましい格子が解適合格子である。

解適合格子によって方程式を解く場合には2とおりの方法がある。このことを1次元の波動方程式

$$\partial u / \partial t + c \partial u / \partial x = 0 \quad (19)$$

を例にとって説明しよう。格子が時間的に変化するので座標変換

$$\tau = t \quad \xi = \xi(x, t) \quad (20)$$

を用いる。このとき(19)は

$$\partial u / \partial t + (\xi_t + c \xi_x) \partial u / \partial \xi = 0 \quad (21)$$

または

$$\partial u / \partial \tau + (-x_\tau / x_\xi + c / x_\xi) \partial u / \partial \xi = 0 \quad (22)$$

となる。

さて第1の方法は各時間ステップごと(あるいは何ステップかおき)に、得られた解をもとにして、何らかの方法で格子を再構成する。そのとき、格子の変化から、 x_τ, x_ξ が直接計算できるので、(22)を用いて計算をすすめる。一方、第2の方法では、格子の速度(x_τ または ξ_t)を支配する方程式を解の勾配等に関連づけてあらかじめ決めておいて、それを解いて格子速度を決める。格子速度が決まれば、(21)または(22)から解を求めることができ、また格子速度から新しい格子点の座標も決まる。

第2の方法についてもう少し詳しく説明しよう。この場合は、格子の速度を決める法則を指定する必要があるが、その一例を示す⁹⁾。格子の配置は、全体の格子数が一定なら、格子点は解の勾配の大きいところでは多く、小さいところでは少なくするのがよいと考えられる。そこで $|u_\xi|$ が平均値 $|u_\xi|_{av}$ より大きければ格子を近づけ、 $|u_\xi|$ が $|u_\xi|_{av}$ より小さければ格子を遠ざけるようにする。さらにその影響は考えている点から遠ざかるにつれて小さくなると考えられる。そこで影響が $1/r^n$ に比例すると考えて、上述のことを式に表せば

$$(\xi_\tau)_i = k \left(\sum_{i=j+1}^N (|u_\xi|_i - |u_\xi|_{av}) / r_{ij}^n - \sum_{i=1}^{j-1} (|u_\xi|_i - |u_\xi|_{av}) / r_{ij}^n \right) \quad (23)$$



図-14 表面効果翼艇ミュースカイ2

となる。ここで、 k, n は適当な定数であるが、もともと格子点の分布と解が表す物理量の間には直接関係がないため、その値は物理的な考察により決められる性質のものではない。そこでたとえば試行により決める。(23)により $\xi_\tau (= \xi_t)$ が決まれば $x_\xi = 1/\xi_x, x_\tau = -\xi_t/\xi_x$ から $x_\tau (= x_t)$ が決まるので、これにより新しい格子の位置を決めることができる。

5. 格子生成法の流体力学への応用

格子生成法を現実の流体力学の問題へ適用した例として、表面効果翼艇(WISE=Wing In Surface Effect)まわりの流れの解析について簡単に述べる。これは差分法による数値シミュレーションであるが、計算には艇体形状にあわせて生成した格子を用いている。

表面効果翼艇とは、水面すれすれに飛行することによって艇体(機体)に働く揚力が増加し誘導抵抗が減少する効果(表面効果)を利用して経済性を飛行機より良くした新しい乗り物であり、将来の海上高速輸送手段として有望視されている。図-14に1990年2月に鳥取大学工学部と三菱重工神戸造船所で共同開発された2人乗りの試作艇(ミュースカイ2)を示す¹⁰⁾。さてWISEは通常の飛行機と飛行特性がかなり異なるためその空気力学的特性を知ることが非常に重要になる。そのため通常は風洞試験を行ってデータを集めるが、風洞試験は時間や費用がかかり、また地面の効果を考慮に入れるためには特殊な装置が必要になるなど問題点も多い。そこで最近の飛行機設計に多く導入されている数値シミュレーションによる方法が風洞試験を補う方法としてWISEの設計にもある程度役立つものと考えられる。このような

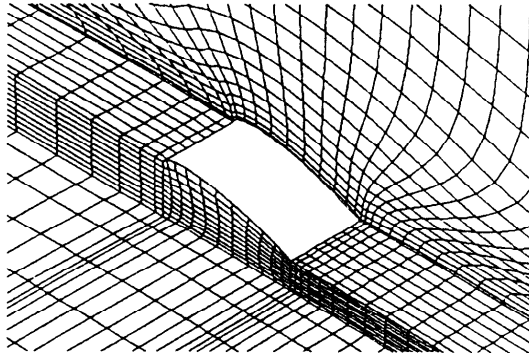


図-15 WISE まわりの格子分割例

目的で筆者らはいくつかの研究を行ってきた。ここでは表面効果翼艇の翼の特性を知る目的で行った計算を簡単に紹介する¹¹⁾。

ミュースカイ 2 の主翼(胴体も兼ねる)は中空の翼であり、第 1 段階として中空の翼まわりの流れの計算を行った。一般に翼まわりの流れの差分解析には翼に沿った格子が用いられる。なぜなら翼に働く力をなるべく正確に計算する必要があり、そのためには翼のまわりにできる非常にうすい(たとえば 5 cm)境界層内部におこる現象まで解像できるような格子を用いて流体計算を行う必要があるからである。(ただし翼に沿う流れ方向の格子は粗くてよい)このとき普通の長方形格子を用いたのでは膨大な格子が必要となる。図-15 に WISE の主翼まわりの格子分割例(分かりやすくするため格子はある程度間引いて表示している)を示す。この場合は 1 つの横断面内で 2 次元格子を生成し、横(スパン)方向に平行移動して 3 次元格子を生成している。なお翼に働く力をなるべく正確に計算するために翼面上で格子が翼と直交するようにしている。図-16 は計算結果の一例であり、中央横断面内の流れの様子を水面と WISE の距離を変えて流跡線で示している。図-17 はそのときの表面圧力分布であり、水面に近いほど揚力(2 つの曲線に囲まれた部分の面積に対応)が大きくなっていることが分かる。

最後に境界に沿った格子を用いたためにどの程度基礎方程式が複雑になるかを、2 次元の場合に、渦度輸送方程式(流体力学の基礎方程式の 1 つ)を例にとって示しておく。

$$\omega_t + \psi_y \omega_x - \psi_x \omega_y = (\omega_{xx} + \omega_{yy}) / \text{Re} \quad (24)$$

$$\omega_t + (\psi_\eta \omega_\xi - \psi_\xi \omega_\eta) / J = (\alpha \omega_{\xi\xi} - 2\beta \omega_{\eta\eta})$$

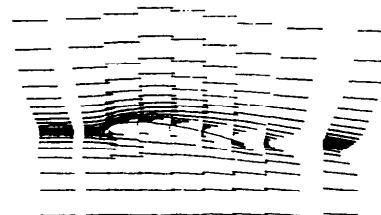
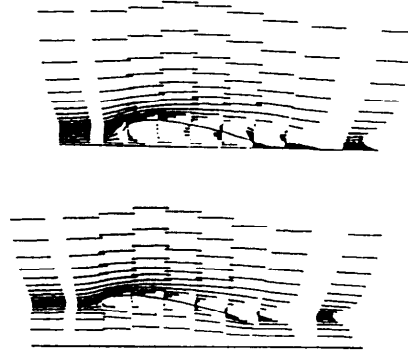


図-16 WISE まわりの流れ(中央断面内の流跡線)上から順に WISE と水面の距離が翼弦長の 2.5%, 20%, 250%

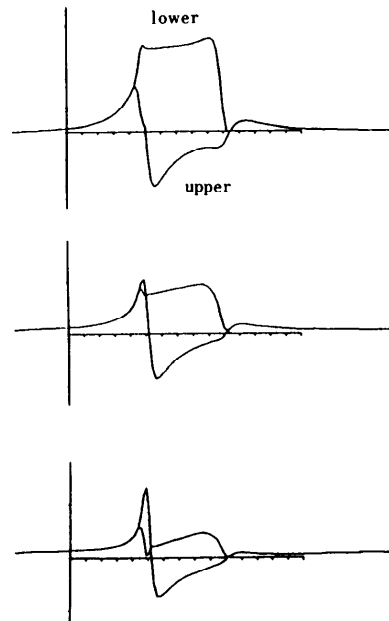


図-17 WISE 中央断面内の圧力分布(図-16 の順に対応)

$$+ \gamma \omega_{\eta\eta}) / J^2 \text{Re} + (Q \omega_\eta + P \omega_\xi) / \text{Re} \quad (25)$$

(24) は長方形格子を用いる場合の基礎方程式、(25) がポアソン方程式を利用して生成した曲線格子を用いる場合である。最終的に計算機を用いて

計算することを考えると、それほど難しくなっていないことが分かる。

6. ま と め

以上、格子生成法の基本的な考え方および代表的な手法についてごく簡単に説明し、また実際の応用例についても WISE まわりの流れの解析を例にとって簡単に解説した。格子生成法は差分法を用いた偏微分方程式の数値解法にとって基本的に重要な役割りを果たすことは明かであり、いかに“良い格子”を生成するかということが、限られた格子数の計算で信頼できる計算結果を得るために最も大切であると言っても過言ではない。現在、格子生成は解くべき問題に応じて手作業で行っており、一般に非常に時間のかかる作業になっている。なぜなら、良い格子とは取り扱う問題によるため、良い格子を生成するためにはどうしても利用者の経験や試行錯誤が要求されるからである。自動的に良い格子を生成する方法として前述の解適合格子があるが、その他ファジィ理論⁶⁾や制御論⁷⁾を応用した試みもあることを付け加えておく。

格子生成法は数値流体力学の分野ではごく普通に用いられる道具となっているが、格子生成法の発達とともに今後いろいろな分野に幅広く応用されるものと思われる。なお格子生成法について興味を持たれた読者は教科書がいくつか出てくる^{1), 8), 9)}のでそれらを参照して欲しい。

参 考 文 献

- 1) Thompson, J. F. et al.: Numerical Grid Generation: Foundations and Applications, North-Holland (1985) (トンプソンほか著(小国 力ほか訳): 数値格子生成法の基礎と応用, 丸善(1994)).
- 2) Thompson, J. F., Thames, F. C. and Mastin, C. W.: Automatic Numerical Generation of Body-Fitted Curvilinear Coordinate System for Field Containing Any Number of Arbitrary

Two-dimensional Bodies. J. Comp. Phys., 15, pp. 299-319 (1974).

- 3) Steger, J. L. and Sorenson, R. L.: Use of Hyperbolic Partial Differential Equations to Generate Body Fitted Coordinates, Numerical Grid Generation Techniques, NASA CP, 2166, pp. 463-478 (1980).
- 4) Eriksson, L. E.: Generation of Boundary-Conforming Grids around Wing-Body Configurations Using Transfinite Interpolation, AIAA J., 20, pp. 1313-1320 (1982).
- 5) Rai, M. M. and Anderson, D. A.: Application of Adaptive Grids to Fluid Flow Problems with Asymptotic Solutions, AIAA J., 20, pp. 496-502 (1982).
- 6) 矢川元基編: ファジィ推論(計算力学とCAEシリーズ4, 7章), 培風館(1991).
- 7) 小早川命, 山田英太郎: 最適制御を用いた適応格子生成法, システム制御情報学会論文誌5, No. 10, pp. 418-426 (1992).
- 8) 高見顕郎ほか著: 偏微分方程式の差分法(5, 6章), 東大出版会(1994).
- 9) 数値流体力学編集委員会編: 格子形成法とコンピュータグラフィックス(数値流体力学シリーズ第6巻, 1, 2章), 東大出版会(1995).
- 10) 久保昇三, 松岡利雄, 河村哲也: 地面効果翼艇マリンスライダ-ミュースカイ-1, 2, 日本流体力学会誌「ながれ」9巻頭写真(1990).
- 11) 河村哲也, 久保昇三: 地面効果翼まわりの流れの数値シミュレーションII, 航空宇宙技術研究所特別資料 Sp-10, pp. 243-248(1989).

(平成7年4月4日受付)



河村 哲也

1954年生。東京大学工学部物理工学科, 同工学系修士課程修了。東京大学工学部助手, 鳥取大学工学部助教授, 千葉大学工学部助教授, 教授を経て, 1996年お茶の水女子大学理学部情報科学科教授, 工学博士。専門は数値流体力学およびその周辺領域。著書「偏微分方程式の差分法」, 「非圧縮性流体解析」(東大出版会), 「流体解析I」(朝倉書店)など。日本物理学会, 日本機械学会, 造船学会, 流体力学会, 数値流体力学会各会員。