ポリゴンデータの滑らかさの定義と応用

小出 昭夫
日本アイ・ビー・エム（株） 東京基礎研究所

1 はじめに

Level-of-Detail などの応用のため, 各種の多重解像度ポリゴンデータ作成手法が提案されている [1,2,3,4] が, ＰＣなどでは実際のスクリーン解像度よりはるかに粗いデータが必要とされる。本論文では, 品質の高い多重解像度ポリゴンデータ作成のため, ポリゴンデータの「滑らかさ」の計量を定義し, その性質と応用を述べる。

2 滑らかさの計量

滑らかさの計量 M を, 頂点や辺の追加に対し, ポリゴンの表面形状が変わらぬ限り不変であるように定義しよう。

辺を共有する二つの面の法線のなす角を θ_i と辺の長さを l_i とするとき, 計量 M を次の形に仮定する。

$$M = \sum_i f(l_i, \theta_i) \quad (1)$$

形状を変えず, そのまま, 面に新規の辺を追加して分割しても計量が不変であるためには, $\theta_i = 0$ のとき $f(l_i, \theta_i) = 0$ である必要がある。また, 辺に頂点を追加しても計量が不変であるためには, 辺の長さ l_i に関して線形である必要がある。もっとも簡単な答えは

$$f(l_i, \theta_i) = l_i \, {\theta_i}^2 \quad (2)$$

であろう。実用上の観点からは

$$f(l_i, \theta_i) = l_i \, (1 - \cos(\theta_i)) \quad (3)$$

が都合がよい。辺の両側の面の法線を $\mathbf{n}_{i1}$, $\mathbf{n}_{i2}$ とするとき, 式 (3) は

$$f(l_i, \theta_i) = l_i \, (1 - \mathbf{n}_{i1} \cdot \mathbf{n}_{i2}) \quad (4)$$

と書け, 法線はそれぞれの面の外周の辺の外積から求まる。なお, 上記の式の面の法線の向きは共有する辺の上では逆にまわるようにとるものとする。

Definition and Application of Smoothness of Polygonal Data
Akio KOIDE (koide@trl.ibm.co.jp)
IBM Research, Tokyo Research Laboratory

式 (2) または (3) のいずれの場合も, 滑らかさの計量の最適化を行なったとき安定であるよう, 面と面とのなす角での展開が２次で始まるように定めた。

式 (2) または (3) を 式 (1) に代入することにより, 頂点や辺の追加に対し, ポリゴンの表面形状が変わらぬ限り不変である計量 M が得られる。しかしながら, 最適化に使う目的関数と考えるとき, このままでは, 全体のサイズを縮小すると M も減少するので, 不安定化が起きる。従って, スケール不変にした次式を滑らかさの計量として提案する。

$$M = \sum_i l_i \, (1 - cos(\theta_i)) \, / \sum_i l_i \quad (5)$$

対象ポリゴンデータ全体の滑らかさの計量は各辺の滑かさの計量の総和で定義され, 各辺の滑かさは局所的な面の向きづけだけにもとづいているので, 我々の滑かさの計量はクラインの壺のような場合にも適用可能である。

式 (5) では, 特定の箇所の滑らかさを重視したい等のユーザの意図が比重としてはいっていない。比重の簡単な導入は, 空間に比重を付け, 辺上でその比重を積分することであろう。実用上は, 積分のかわりに, その近似として辺の両端の頂点の比重の和を用いることができる。

$$M = \sum_i (w_{i1} + w_{i2}) l_i \, (1 - cos(\theta_i)) \, / \sum_i (w_{i1} + w_{i2}) l_i \quad (6)$$

3 応用

前章で述べられた滑らかさの計量を, ポリゴンデータの細分化、簡素化に適用できる。細分化においては, まず, 新規の頂点を辺の中点, または, 面の重心上に作成し, 滑らかさの計量が最小化されるよう、頂点をつなぎなおし, 新規の頂点を移動してやればよい。簡素化においては, 頂点を削除しそのまわりで頂点を結び直したとき, 滑らかさの計量がほとんど増加しないものから, 頂点を削除すればよい。

1048

ここでは, 辺の結び変えと頂点の移動について詳しく述べる。

3.1 辺の結び直し

滑らかさの計量に対してより滑らかになるように頂点と頂点とを結び変えは, 次のステップをすべての辺に対して一度適用することで行なう。なお, 以下ではポリゴンデータがすべて三角形からなるとする。

辺 $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ に対し, その辺を共有する三角形のもう一つの頂点をそれぞれ $\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_4$ とする。すなわち、辺 $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ の両側に三角形 $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2\mathbf{x}_3$ と三角形 $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_4$ とがあるとする。辺 $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2$ を削除し, 辺 $\mathbf{x}_3\mathbf{x}_4$ を作成した場合の滑らかさの計量の総和の変化分を計算し, それが減っていれば, 辺を結び直しを実行する。結び直しで面の法線が変化するので, 辺 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ 辺 $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4$, $\mathbf{x}_4\mathbf{x}_1$ を通して隣接する三角形までが変化に寄与する。

辺のリストのスキャンする方法として次のスタックの手法が適用できる。

1. 最初にスタックに辺を一つ積む。

2. 以下, スタックに辺がある限り, スタックから最も新しく積まれた辺をとり, その辺に対し, 上記の辺の結び直しのステップを行なう。このとき, 辺の結び直しのチェックが済んだものにフラッグをたてる。

3. 次に, 上記のステップでの外側の四角形の辺 $\mathbf{x}_1\mathbf{x}_3$, $\mathbf{x}_3\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_2\mathbf{x}_4$, $\mathbf{x}_4\mathbf{x}_1$ を, もし, まだ辺の結び直しのチェックが済んでいなければ, スタックに積む。スタックに二重に積まれることのないように, スタックに積まれた辺にもフラッグをたてる。

上記で複数スタックを用意し, 辺のもつ滑らかさの計量 (式(3)) の値の範囲で積むスタックを選択し, スタックからの取りだしについては, 滑らかの計量の範囲の大きなスタックから先に使用する。

また, 辺の結び直しのステップの後, 辺をスタックに積むとき, 滑らかの計量が最も大きな辺を最後に積む。すなわち, 次のステップで, その最も大きな計量の辺が先に使用されることになる。

3.2 頂点移動部

ここでは, 事前に定められた範囲内で頂点を移動することにより, 逐次的に滑らかなポリゴンデータに整形する。

頂点を一点移動したときに生じる滑らかの計量の一次および二次微分の計算し, 局所的に最適の移動量を求める。一度に一頂点だけ移動する方法では, その頂点を共有する辺の長さと三角形の法線とが変化するので, それらに三角形に隣接する三角形までが考慮の範囲になる。

辺の結び直しと同様に, スタック手法ですべての頂点について, このステップを繰り返すことなる。このとき, 移動した頂点と辺で結ばれる頂点がスタックに載せる対象となる。

4 おわりに

式(5)で与える滑らかさの計量をもとに, 前章で述べた手法をサンプルデータに適用し, 所望の結果を得た。

結果の一例を図示する。図1はサンプルのポリゴンデータで, それにまず辺の結び直しを適用したのが図2, 次に頂点の移動を2サイクル行なったのが図3である。

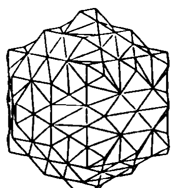
図1.

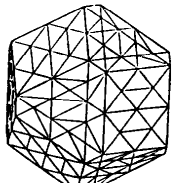
図2.

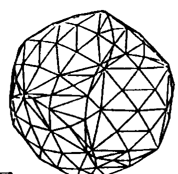
図3.

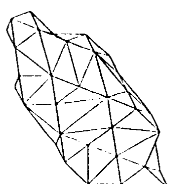
図1.

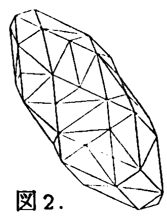
図2.

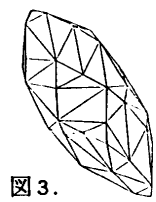
図3.

文献

[1] H. Hoppe, T. DeRose, T. Duchamp, J. McDonald, and W. Stuetzle: "Mesh Optimization," Computer Graphics, SIGGRAPH '93, pp. 19-26, August 1993.

[2] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuetzle: "Multiresolution Analysis of Arbitary Meshes," Computer Graphics, SIGGRAPH '95, August 1995.

[3] Greg Turk: "Re-Tiling Polygonal Surfaces," Computer Graphics, Vol. 26, No. 2, SIGGRAPH '92, pp. 55-64, July 1992.

[4] B. C. Vemuri and A. Radisavljevic: "Multiresolution Stochastic Hibrid Shape Models with Fractal Priors," ACM Transactions on Graphics, Vol. 13, No. 2, pp. 177-207, 1994.