

所要時間や所要エネルギーを最小にする道路密度

腰塚武志

筑波大学社会工学系

道路を走行するときの平均走行速度は、信号停止により低下する。これより、ある地点から別な地点までの平均所要時間は、信号数（止まると止まらないとにかかわらず）と距離によって説明できる。

一方、道路延長を増して行くと交差点はどんどん増加することになり、交差点数は総延長の2乗に比例する。

以上のことから、対象領域の端から端までを走行する際、最も時間のかからない道路密度というものが存在すること、同様に最も所要エネルギーがかからない道路密度というものも存在することがわかった。

Road densities which bring a minimum car travel time and a minimum gas consumption

KOSHIZUKA Takeshi

University of Tsukuba
Institute of Socio-Economic Planning

Considering stops at traffic signals and traffic jams, we derived formulae which explain the two relations between car travel speeds and signal densities and between car travel gas consumptions and also signal densities. Using these formulae and the other formula which shows the relation between the length of network and the number of intersections, we discussed basic properties of road networks which are distributed in two-dimensional space and got two kinds of optimum network density which bring us a minimum travel time and a minimum travel gas consumption throughout a city.

1. はじめに

都市における様々な活動を対象としてモデルを構築する場合、取り上げている現象以外は極力省略することに努力しても随分複雑で膨大な数のパラメータを含むシミュレーションになってしまい、モデル構築で結局何が分かったかが曖昧になってしまうことが多い。これは対象とした活動に関する数値データにあまりにも振り回された結果であり、数値的には一見精緻になったかのようにみえても、モデルの明確な構造が失われ、結局モデル化の意味が失われるのである。

このような傾向の反対のやり方、すなわちモデルの明確な構造が失われないような分析はできないのだろうか。別な言葉を用いれば現実の数値よりも、現実の本質的な構造にこだわる態度という言い方ができるだろうか。そこでモデルの前提となる現実を単純化し、結果を厳密に求めることにこだわることにする。

現実を単純化するすることにより厳密な結果の前提が現実と乖離して、結果が数値的に現実とかなり隔たると言う場合があるかもしれない。しかし前提と結果の間に曖昧なものがないので、これらは複雑な現実を考える上での指針の様なものを与えてくれることがあるかもしれない。そこでこれらを将棋や碁でいう定跡(定石)のようなものと考え、複雑なモデルを構築する替わりに、前提を単純化した「定跡」を作りたい。

ところで都市を、密度を高くしてコンパクトなものにすべきか、または、より広い範囲で密度を低くした方がよいか、という問題は都市計画の分野でも様々な局面で議論されてきた。それぞれに長所と短所があり、単純な状況を設定してこれらを明確しておくことは、都市計画のいわば「定跡」として意味のあることだと考えられる。そこで、本論文では道路の密度というものに焦点をあて、道路密度の高いコンパクトな都市と道路密度の低い比較的広い都市を対象とし、主に走行時間や走行エネルギー消費量で両者を比較する問題を考えよう。

2. 平均所要時間と信号密度

本論文は文献 [1] で得られた結果をもとに議論を展開するのでこの章ではこれをまとめて

おくことにする。信号によって道路の使用が制限されると、止まっていた時間によって平均走行速度(交通工学では旅行速度という)が低下することになる。そこである地点から目的地までの自動車による走行を単純化して、停止状態から一定の加速度で定常速度 v に達し、その後この定常速度を保ち、また停止するときは一定の加速度(負の)で止まるものとする。さらに信号で止まる確率や、停止時間を一様分布であると想定すると、信号の停止も考慮に入れた平均所要時間を \bar{t} として、単純な以下の式

$$\bar{t} = \alpha n + \beta l + \gamma \quad (1)$$

が得られた(文献 [1])。ただしある地点から目的地までにある信号の総数を n 、走行距離を l とし、 α は信号一つあたりの平均損失時間、 β は走行中の定常速度 v の逆数すなわち $\beta = 1/v$ で、 βl が距離 l を定常速度 v で走行した時の所要時間、 γ は停止状態から速度 v に達するまでの一回の加速に要する時間となっている。

そこで筑波研究学園都市内のいくつかのルートにおいて信号の総数(止まったかどうかに関係なく)、走行距離、所要時間を計測し、217個のサンプルを得た。これより式(1)の係数 α, β, γ を最小二乗法によって推定すると、時間の単位を秒、長さの単位を km として

$$\bar{t} = 21n + 55l + 16 \text{ (秒)} \quad (R^2 = 0.96) \quad (2)$$

が得られた(文献 [1])。この式で $\alpha = 21$ ということは、実際に停止してもしなくても、信号一つについて平均的に 21 秒ほど余計に時間がかかることを示している(正確にいうと、走行速度を常に一定としているので、加速に含まれる時間の損失も停止時間に入っている)。また $\beta = 55$ ということはこれが速度の逆数であることから、秒を時間に変換して定常速度(最高速度)が $3600/55 = 65.5$ (km/時)であることを意味する。

ところで一回の加速または減速の所要時間に相当する $\gamma = 16$ (秒) というのは小さい値なので、式(1)の両辺を l で割って逆数を取り、 l がかなり大きいとして γ を無視すれば、交差点密度 λ と平均走行速度 \bar{v} との関係が

$$\bar{v} \sim \frac{1}{\alpha \lambda + \beta} \quad (3)$$

と得られた。

3. 実際の平均走行速度と信号密度

さて以上の導出ではある種の理想化された状況、すなわち渋滞がなく、しかも他の車に邪魔されないというもの、が想定されている。厳密に言えばこれは他に車が一台もなくしかも信号機の点滅を遵守して走行した場合で、実際の都市では真夜中に似たような状況が生ずることがあるだろう。したがって式(3)の平均走行速度 \bar{v} は、与えられた道路網では最も速く走れた場合(定常速度 v での平均値としてではあるが)もので、実際の混雑した路線における走行速度のモデル式ではない。式(2)のところで説明力が高いのはデータをとった筑波研究学園都市では交通量がそれほど多くなく、渋滞もほとんどないからと考えられる。

しかし実際の観測値との比較は興味深いので、混んでいるときの実際の観測値として文献[2]のピーク時平均旅行速度というものに注目する。これは交通量がピークのときの各県、各国道ごとの平均速度が計算され、併せて各路線の信号密度も表になって示されている。つぎに混んでいないときの実際の観測値として文献[3]の平常時時刻表を用いることにする。国道1号から58号までが通っている各県、各国道ごとに、この時刻表よりその国道の平常時旅行速度(下り)を計算した。ただしこの時刻表には県境の時刻はないので、県境に最も近い観測地点を用いている。この時刻表には信号のデータはないので厳密には年度の違いと県境付近の信号によるくいちがいがあるわけだが、信号密度にそれほどの違いはないものと考え、信号密度については文献[2]のものを両者に用いることにした。

まず式(3)の両辺の逆数をとると

$$1/\bar{v} \sim \alpha\lambda + \beta \quad (4)$$

となり、平均速度の逆数が交差点密度の一次式で表わされることがわかった。そこで前述の平常時旅行速度の逆数を縦軸、信号密度を横軸とし、国道1号から58号までの各県ごとのデータをプロットすると、図1のようになる(サンプル数150、県で1地点しか観測されていないものは除いてある)。

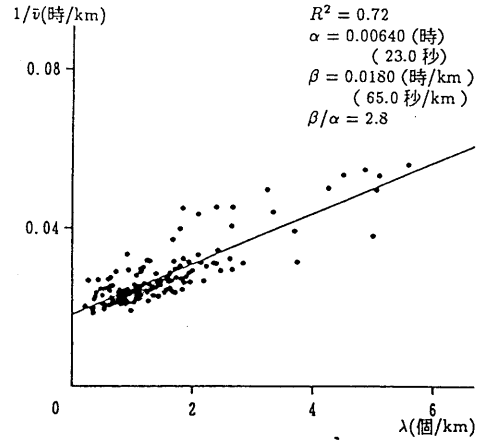


図1 平常時平均旅行速度と信号密度

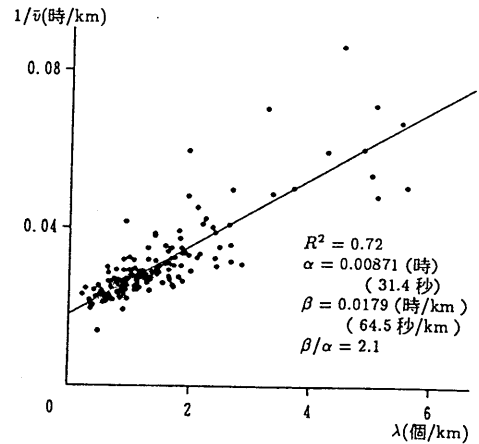


図2 ピーク時平均旅行速度と信号密度

このとき最小二乗法によって回帰直線を求めると、係数 α, β は図にあるような値となり、 $R^2 = 0.72$ と割合よく適合することがわかる。求められた係数は速度の単位が $\text{km}/\text{時}$ なので、式(2)における単位に変換すると $\alpha = 23.0$ 秒であり、式(2)の筑波研究学園都市における結果とよく似ている。定常速度 $v = 1/\beta$ に関してはデータより $55.4\text{km}/\text{時}$ と計算され、筑波のときよりも $10\text{km}/\text{時}$ ほど低いことが示された。ともあれ説明力は筑波の場合より低いけれど、 α の値にはあまり変化がなく、 β も法定速度以内に

収まり現実的な値を得ることができた。

次にピーク時平均旅行速度について、同様に国道1号から58号までをプロットすると図2のようになる。これを見ると直線の傾きである α が異なるが、 $R^2 = 0.72$ と平常時と同じような説明力があることがわかる。定常速度は $v = 1/\beta = 55.8\text{km/時}$ と図1の場合とほぼ同じであり、 $\alpha = 31.4$ 秒で α は図1のときの1.4倍となっている。このことは何を意味するのだろうか。

これはピーク時の旅行速度なので当然のことながら信号だけで止まるわけではなく、他のところでも例えば渋滞で止まってしまうこともあるはずである。そして α が1.4倍ということは、信号がないところでも止まるので、平均としておよそ信号一つあたりの時間のロスの1.4倍ほど時間をロスしている(実際の信号一つあたりに換算して)。つまり対象とした国道での最小二乗法による数値からみる限り、ピーク時の平均速度は信号数があたかも1.4倍になったかのように落ちる、という解釈もできるわけである。

4. 道路密度と平均走行時間

式(3)のところでもみたように、信号機が増加すれば走行速度は低下することがわかった。走行速度からみる限り信号が少ないほどよい。しかし、道路延長が増加すれば交差点は増加する。文献[4]において交差点数は道路総延長の2乗に比例するという関係が理論的にも実証的にも導かれている。ここではこれを詳述する紙面的余裕はないが、これを最も簡単な式で示すと以下ようになる。いま対象としている領域の総面積を S 、道路総延長を Λ 、交差点数を ν とすると近似的に

$$\Lambda \sim \sqrt{\nu\pi S} \quad (5)$$

という関係が成立する。そこで交差点において信号がついている比率を r とすれば信号の存在する交差点数は $r\nu$ 、そして道路をすべて一筆書きのようになぞらえて、これを一直線に延ばして考えれば、大部分の信号交差点を4差路とすると、この直線に同じ交差点が二度あらわれる。それゆえ長さ Λ に信号数が $2r\nu$ なので、これと式(5)より信号の密度 λ について

$$\lambda \sim \frac{2r\nu}{\Lambda} = \frac{2r\Lambda}{\pi S} \quad (6)$$

が得られる。したがってこれと式(3)より平均走行速度 \bar{v} が道路密度 Λ/S によって

$$\bar{v} \sim 1 / \left(\frac{2\alpha r \Lambda}{\pi S} + \beta \right) \quad (7)$$

と説明できることがわかった(文献[1])。この式は、道路延長 Λ が大きくなれば平均走行速度 \bar{v} が落ちることを具体的に関数形で示したものであり、道路網というものを考える上で重要なものと考えられる。

さてここで対象地域の道路延長 Λ は一定とし、面積 S を変化させることを考えよう。つまり流動の起点や終点の道路延長あたりの密度を一定とすれば、面積 S が小さいときは単位面積あたりの流動量が大きく、道路密度 Λ/S も高いコンパクトな状況を表わし、面積 S が大きいときは単位面積あたりの流動量が小さく、道路密度 Λ/S も低い状況を表わしている。このとき距離 \sqrt{S} を走行する平均所要時間 $\bar{i}(S)$ は式(7)より

$$\bar{i}(S) = \frac{\sqrt{S}}{\bar{v}} \sim \sqrt{S} \left(\frac{2\alpha r \Lambda}{\pi S} + \beta \right) \quad (8)$$

となる。面積 S の領域が正方形であれば \sqrt{S} はその一辺であり、式(8)は端から端までの所要時間を表わしている。また領域が不定形(角数の多い多角形)で表わされるようなものであっても、その領域内で一様に発生するトリップの平均トリップ長は \sqrt{S} に比例するので(文献[5])この距離を想定した。

式(8)の右辺を S のみの関数と考えれば、これは $S = 2\alpha r \Lambda / (\pi\beta)$ で最小値をとり、このときの道路密度は

$$\frac{\Lambda}{S} = \frac{\pi\beta}{2r\alpha} \quad (9)$$

と表わされる。これを見ると最適な密度には β/α が重要な役割を演じていることがわかる。そこで図1,2のときの β/α の実際の数値を用い、さらに全ての交差点に信号があるとして $r=1$ を式(9)にいれると、最短所要時間を与える道路密度が、平常時とピーク時でそれぞれ

$$\frac{\Lambda}{S} = \frac{2.8\pi}{2} \approx 4.4 \text{ (km/km}^2\text{)},$$

$$\frac{\Lambda}{S} = \frac{2.1\pi}{2} \approx 3.3 \text{ (km/km}^2\text{)} \quad (10)$$

と計算できる。

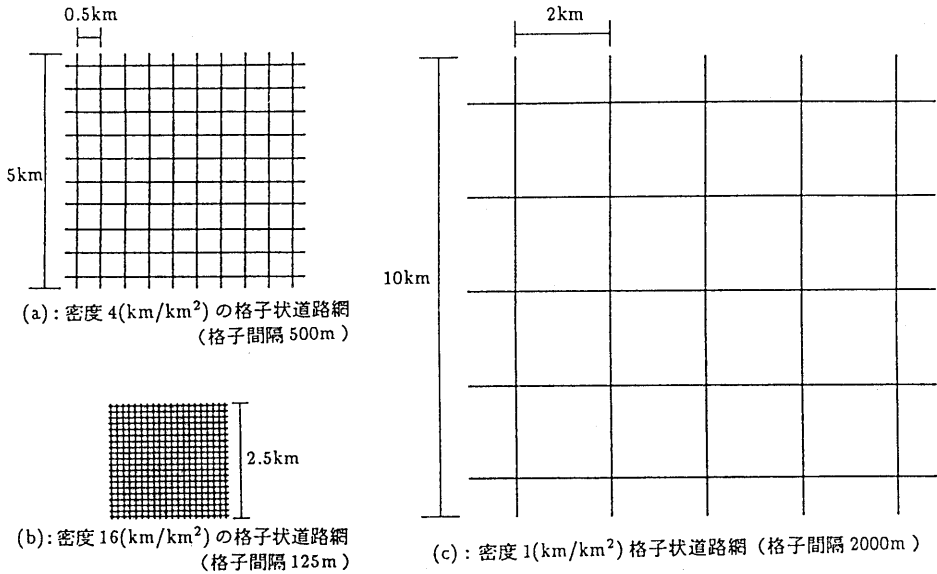


図3 密度の異なる格子状道路網

ところで式(8)の右辺は所要時間の近似式であり、上式(10)は近似式の最小を与えるものであるからこれらの数値には厳密にこだわらなくてよいかもしれない。しかしこのような状況で最短所要時間を与える道路密度が存在する、すなわち道路密度 Λ/S が大きくても時間がかかるし、道路密度が低くても時間がかかり、中間のどこかに最小となる密度が存在するということが判明したことが重要である。

さて、これまで述べたことは様々な道路パターンで一般的に成立すると考えられるが、以下にわかりやすい例を呈示することにする。まず対象地域を正方形とし、ここに格子状の道路網を考え総延長を100kmとする。式(10)で得られた密度に近いものとして $4(\text{km}/\text{km}^2)$ を表示すると、図3の(a)のようになる。これは $5\text{km} \times 5\text{km}$ に縦横10本ずつ計20本の道路があり、交差点間隔は500mとなっている。先の式(4)のところの議論から信号数 n 、距離 l を走行するときの平均所要時間は、平常時を \bar{t}_0 、ピーク時を \bar{t}_p とすると

$$\bar{t}_0 \sim 23.0n + 65.0l \text{ (秒)},$$

$$\bar{t}_p \sim 31.4n + 64.5l \text{ (秒)} \quad (11)$$

であった。そこで図3(a)において端から端まで走行するとすれば、上式において $n=10, l=5$ とにおいて所要時間は $\bar{t}_0 \sim 555$ 秒、 $\bar{t}_p \sim 637$ 秒と得られる。

一方これよりコンパクトなものとして図3の(b)のような一辺が半分の2.5km(面積1/4)のものを考えると、道路密度は4倍となり縦横20本ずつ計40本の道路があり、交差点間隔は125mとなっている。そこで式(11)より端から端まで2.5kmの所要時間を計算すると、 $n=20, l=2.5$ より $\bar{t}_0 \sim 623$ 秒、 $\bar{t}_p \sim 789$ 秒となり距離が半分になったにもかかわらず所要時間は図3の(a)のときよりも余計にかかることが分かった。実際には、交差点間隔がある長さより短くなると、先に想定した定常速度 $v(=1/\beta)$ に達さないで停止せざるを得ないことが起こり得る。その時は β を一定とした式(11)よりも、もっと多くの時間がかかることになる。

次に(a)よりも密度の低いものとして図3の(c)のように一辺を倍の10kmに伸ばしたものを考えよう。今度は道路密度は1/4となり縦

横5本づつ計10本の道路があり、交差点間隔は2kmとなっている。前と同様に式(11)より端から端まで10kmの所要時間を計算すると、 $n=5, l=10$ より $\bar{t}_0 \sim 765$ 秒、 $\bar{t}_p \sim 802$ 秒となり、図3の(a)の場合が最短所要時間の道路密度に近いことを実例として示しているといえるだろう。

ここでは道路を走行するさいの信号や混雑による停止を考慮に入れて、前述のような状況のもとで最短所要時間を与える道路密度を算出した。単純な仮定の下での結果で問題もあるが、「最適」な道路密度というものが存在するということは、都市を設計する場合に示唆を与えるのではないかと考えている。

5. 走行エネルギーと道路密度

さて、これが所要時間でなく所要エネルギーだとどうなるのだろうか。自動車走行時に交差点等で止まる回数やスピードに関して、実際の走行に要した燃費ないしガソリン量を測定したものがあればよい。いろいろ手をつくしているが今のところ、これに適合するデータにめぐり会えてはいない。ところで式(1)の所要時間の定数項を無視すれば

$$\bar{t} \sim \alpha n + \beta l \quad (12)$$

となるが、これにさかのぼってもう一度考え直してみよう。

まず距離 l を行くのに要するエネルギー消費量を e とし、 e を簡単に説明しよう。エンジンをかけてから止めるまで、ずっとエンジンには燃料が必要だから、まず走行時間 \bar{t} に比例する部分があるはずである。次に、停止することにブレーキを踏み、ついで加速を行なうわけだから止まる回数 m にも比例するはずである。信号でしか止まらないことにしてその止まる回数にその路線の平均値をもって来るなら、前記の交差点ごとに期待値を考えて、 m のかわりに信号数 n を用いてよいだろう。また渋滞等で信号以外で止まるにしても図1,2のところの議論のように、ピーク時平均旅行速度は信号があたかも1.4倍に増加したように止まるとみなすこともできるので、回数 m のかわりに信号数 n を用いることができる。さらに距離 l を走るのだからこの距離にも関係すると考えられよう。以上

によりここではエネルギー消費量 e は、所要時間 \bar{t} 、信号数 n 、距離 l との線型関係にあるとみなすことにする。するとこれははじめから近似式なので等号は用いないとすれば

$$e \sim c_1 \bar{t} + c_2 n + c_3 l \quad (13)$$

と書くことができる。ところで前の(12)より

$$e \sim c_1(\alpha n + \beta l) + c_2 n + c_3 l$$

となるので消費エネルギーは結局、

$$e \sim a n + b l \quad (14)$$

で、所要時間と同じように、交差点数と距離に依存することがわかる。

この式が検証できれば問題ない。しかし実際には距離と交差点数でエネルギー消費量を測った例はない。しかしこれに近いものとして、ある程度の長さの一般道路を走行した時、平均速度とガソリン消費量を測ったデータが文献[6]にある。そこでこのデータを用いるために、式(14)を変形すると

$$\frac{e}{l} \sim a \lambda + b \quad (15)$$

となるが、交差点密度 $\lambda (= n/l)$ のデータがないので式(3)より、この λ を平均速度 \bar{v} で説明することにし

$$\lambda \sim \frac{1}{\alpha} \left(\frac{1}{\bar{v}} - \beta \right)$$

を式(15)に入れると

$$\frac{e}{l} \sim \frac{a}{\alpha} \frac{1}{\bar{v}} + b - \frac{a\beta}{\alpha} = a' \frac{1}{\bar{v}} + b' \quad (16)$$

が得られる。そこで先の文献[6]にある一般道路を1200ccの車で走行したデータに関してガソリン消費量の単位を l (リットル)でとり、縦軸に e/l (l/km)横軸に $1/\bar{v}$ (時/ km)をとって28個のデータをプロットすると図4のようになり、 $R^2 = 0.95$ で式(16)はよく適合することがわかる。最小二乗法によって求められた係数は図中の数値のようになり、式(16)が図4の直線で表わされている。この式がよく適合するということは式(16)の両辺に l をかけ

$$e \sim a' \bar{t} + b' l \quad (17)$$

と、ガソリン消費量が所要時間と距離で説明できることを意味している。もし係数 b' が 0 ならガソリン消費量は所要時間に比例することになり、前章の所要時間最小の道路密度がガソリン消費からみても良いことになる。しかし係数 b' が 0 ではないので、ガソリン消費最小の道路密度と所要時間最小の道路密度は異なることが分かった。

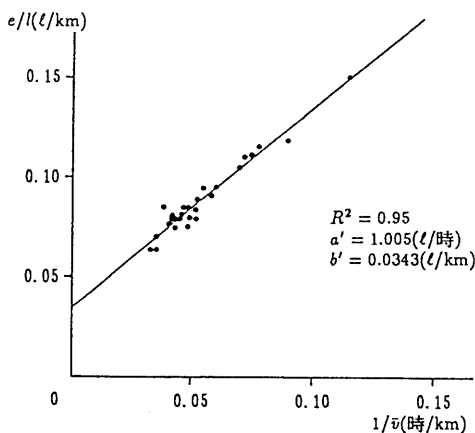


図4 ガソリン消費量と平均速度

さて、所要時間の場合には、式(8)のところで距離 \sqrt{S} を行く時の時間を最小にした。同様に距離 \sqrt{S} を行く時の燃料(ガソリン量)を最小にすることを考えれば、単位距離あたりのガソリン消費量は e/l であらわされるので、この消費量 $E(S)$ は

$$E(S) = \sqrt{S} \frac{e}{l} = \sqrt{S}(a\lambda + b)$$

となり、式(6)より λ に道路線延長を入れるとして

$$E(S) = \sqrt{S} \left(\frac{2ar}{\pi} \frac{\Lambda}{S} + b \right)$$

となり、最も消費エネルギーの小さい道路密度を式(9)と同様

$$\frac{\Lambda}{S} = \frac{\pi b}{2ra} \quad (18)$$

と求めることができる。係数 a は止まるたびに消費するエネルギーであり、 b は長さあたりのエネルギー消費ということで、この比 b/a がエ

ネルギーを最小とする道路密度を与えている。先のデータは 1200cc の乗用車によって測定されたものであった。もしこの比が排気量によらないものであれば大変都合がよいことになる。

式(16)の定数項に注目すると

$$a = \alpha a', \quad b = b' + a\beta/\alpha \quad (19)$$

であり、上の右の式の両辺を a で割ると

$$\frac{b}{a} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{b'}{a}$$

となっており、これを式(18)に代入すると

$$\frac{\Lambda}{S} = \frac{\pi\beta}{2r\alpha} + \frac{\pi b'}{2ra} \quad (20)$$

が得られる。上式の右辺第一項は式(9)より所要時間を最小にする道路密度であり、これよりガソリンの消費を最小にする道路密度は所要時間を最小にする道路密度より高いことがわかる(もっとも係数 b' はデータから正なので)。

そこですべての交差点に信号がある、すなわち $r=1$ とし図4の係数 a', b' と式(19)さらには図1,2の β/α を使って、実際に所要エネルギーを最小にする道路密度を計算すると、平常時とピーク時でそれぞれ

$$\frac{\Lambda}{S} \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{0.0524}{0.00642} \approx 8.2 \text{ (km/km}^2\text{)},$$

$$\frac{\Lambda}{S} \approx \frac{\pi}{2} \cdot \frac{0.0522}{0.00877} \approx 6.0 \text{ (km/km}^2\text{)} \quad (21)$$

と計算できる。ただしこれをみると走行エネルギーを最小にする道路密度は図3における(a)(b)の間中であることがわかる。

そこで式(11)と同じように図3における端から端までの走行に要するエネルギーは、平常時を e_o 、ピーク時を e_p とすると、図4における係数と式(21)のところで求めた a, b と式(14)により

$$e_o \sim 0.00642n + 0.0524l \text{ (}\ell\text{)},$$

$$e_p \sim 0.00877n + 0.0522l \text{ (}\ell\text{)} \quad (22)$$

が得られる。この式を用いて図3における端から端までの走行エネルギーは

$$(a) \text{ のとき } e_o \sim 0.33\ell, e_p \sim 0.35\ell$$

$$(b) \text{ のとき } e_o \sim 0.26\ell, e_p \sim 0.31\ell$$

(c) のとき $e_o \sim 0.56l$, $e_p \sim 0.56l$ となり, この 3 例では (b) の場合が最も消費エネルギーが小さいと計算できる. もっとも最小の場合の密度は前に述べたように図 (a) と (b) の中間にあることは分かっている.

ともかくエネルギー消費からみても, ただ一途に密度を高くしてコンパクトにするのが良いわけではなく, 所要時間と同じように最小となる密度というものが存在するという, さらに走行エネルギーを最小とする道路密度は所要時間を最小にする道路密度よりも高いということが分かった.

6. おわりに

自動車の燃費をめぐっては様々な論文や多くの説がある. しかしごく平均的な我々が通常運転するときの燃費を, 大まかにしかし本質的部分をはずさないで推定しようとする, ことはそれほど簡単ではない. 様々な局面で出された燃費に関する数値のどれを信用すべきか途方にくれてしまうからでもある.

そこでここでは文献 [2],[3],[6] のデータのみをもとに道路の密度について論じてみた. もとより不備な点が多々あることは承知しているが, 前提条件を簡単にしたうえで所要時間や所要エネルギーを最小にする道路密度が存在すること, およびこの数値を実際に計算できたことは収穫だと考えている. なお所要時間を最小にする道路密度は走行エネルギーを最小にする道路密度よりも低いこと, さらに平常時とピーク時では時間, エネルギーともピーク時の方が最適密度は低いこと, 等も重要なことであろう.

最後に, 本論文は文献 [9] とほとんど同じものであり, 本研究会論文集のフォーマットに合わせて作成したものにすぎない.

参考文献

- [1] 腰塚武志, 今井和敏 (1991): 平均走行速度と信号密度. 日本都市計画学会学術研究論文集 26 号, pp.547-552.
- [2] 建設省道路局編 (1989): 昭和 63 年度道路交通センサス一般交通量調査基本集計表. 交通工学研究会.
- [3] 道路時刻研究会編 (1993): 道路時刻表. 道路整備促進期成同盟会全国協議会.

[4] 腰塚武志 (1978): 道路網と交差点. 都市計画 103 号, pp.36-41.

[5] 腰塚武志 (1978): 地域内距離. *Journal of the Operations Research Society of Japan* Vol.21, pp.302-319.

[6] 佐野雅英 (1979): 自動車の実走行燃費—主として福岡・北九州を対象として—, 交通工学 Vol.14, No.2, pp.11-22.

[7] 腰塚武志 (1993): 信号停止を考慮した最短所要時間道路密度. 日本OR学会春季研究発表会アブストラクト集, pp.18-19.

[8] 腰塚武志 (1994): 道路の密度と所要時間. オペレーションズ・リサーチ, Vol.39, No5, pp.237-242.

[9] 腰塚武志 (1994): 走行時間や走行エネルギーを最小にする道路密度. 日本都市計画学会学術研究論文集 29 号, pp.319-324.