状態変換システムの諸特性の検討
（その2）

古閑　政
九州東海大学工学部経営管理学科

一般的なシステムに重畳して存在する状態変換システムとは、複数の状態集合に跨がって存在する関係構造に関するものである。そのベースシステムについてN通りの状態が観察されるなら、そこにはN次元の状態変換システムがある。これはN－1個の2次元状態変換システムに分解できる。そこで、全体システムの詳細を表現する関係表から2次元システムを導出する過程を説明している。このとき重宝される手法が中抜き定理と反射定理である。具体例として、3次元システムを3個の2次元システムに変換する過程を取り上げたが、その手順は一般的なものである。さらに、同時分布が与えられているとき、全体システムから分解システムへの変換及びその逆を行う手法を述べた。

次に、ベースシステムにおける状態分布の結合状況を示すシステム情報量を定義して、全体システムと分解システムとの比較検討を行っている。分解システムの構造によって決まる判別項によって、全体システムのシステム同時情報量の正負が決まることも明らかにした。

STUDY OF STATE TRANSFORMATION SYSTEM
(PART TWO)

Masashi Koga

Kyushutokai University
School of Engineering
Department of Business Engineering
9－1－1, Toroku, Kumamoto City, 862 Japan

The state transformation system (STS), which is superimposed on another certain system (namely base system) , concerns the structure of the relations among some state sets. If N states are observed on the base system, there is a N-dimensional state transformation system (Nd STS) which is decomposed into N-1 kinds of two-dimensional STS(2d STS). Then, the process for deriving these 2d STS is explained using the relation table which expresses the detail of the total system. In this process, the tunnel theorem and the reflection theorem play some important roles. The process of transforming 3d STS into three kinds of 2d STS is taken for an example, but the procedure is general. As the system information (SI) shows the joint strength of state sets on the base system, SI of the total system are compared to the sum of SI of decomposed 2d STSs. The difference between the former and the latter is named the system joint information.

1．はじめに

これまで一般的なシステムに重畳して存在する状態変換システムについて、種々の角度から検討を行ってきた[1]。その場合の基本的な手法として、多次元システムを複数の2次元システムに分解してそれらの複合体として検討してきた。すなわち、N次元であるならN－1個の2次元システムを導出する必要があったので、それは相補的分枝構造を基礎としてグラフィカルな手法で実現した。

しかし、グラフィカルな手法は分かりやすい半面、アルゴリズムを明確に記述するのが難しく、また効率的でない。そこで状態変換が行列演算によって行われることから、2次元に分解していく過程を行列演算で実現する方法を考案した。それは、従来の行列演算の規則を大筋で守りながら、若干変形したものである。とくに次元数を減らしていくために中抜き定理と反射定理と名付けた手法を提案する。多次元でも、これらの定理を繰り返して次元数を減らしていき、最終的に2次元に到達することが可能である。

次に、元のシステムと分解したシステムとの関係を検討している。先ず対象としている状態分布或いは周辺分布（確率論での呼称であり、前者の命名は後者を包含する）は与えられているものとする。

最初の問題は、元のシステムの同時分布と分解したシステムの同時分布との関係である。前者から後者を導く方法及びその逆と元のシステムの復元について述べる。具体的には3種の状態分布とひとつの状態分布から、3種類の同時分布を求める。逆方向は、3種の状態分布と同時分布から元のシステムの同時分布を求めるとともに、元のシステムの相補的分枝構造の詳細を明らかにできることを示す。

このように論理的には等価であるが、情報的にはどうであるかをシステム情報量を定義して、評価する。具体的には、3次元システム情報量と3種類のシステム情報量の総和との大小を比較する。そして、システム構造の値により大小関係がどのようになるかについての解析も行っている。

2．状態変換システムの分解

あるシステムを外部から観察してN個の状態（1、2、…Nと名付ける）が見られ、またこれをN段階の状態変換システムとして表現できるとき、このシステムをN－1個の2次元システム（1・2間、2・3間 …… N－1・N間）に分解できる。一般論としての展開も可能であるが、表現が非常に煩雑となるので3次元の例について説明する。

今3つの状態集合X、YとZが観察されており、この順序での関係表が次の表1で与えられているとする。

表1　X、Y、Zの関係表（左側）

X	Y	Z	
0.333	0.25	①0.167	②0.833
	0.75	③0.571	④0.429
0.667	0.60	⑤0.125	⑥0.875
	0.40	⑦0.556	⑧0.444

この表から見られるように、事象X、Y、Zの要素数は全て2であり、最も簡単な場合に該当するが、これから述べる計算原理は一般に通用する。

初めに、XとYの2次元システムを明らかにする。表1から事象X、Yの関係が表2として得られる。

表2　X、Yの関係表

左側		同時	右側	
X	Y	XY	X	Y
0.333	0.25	0.083	0.172	0.483
	0.75	0.250	0.484	(0.517)
0.667	0.60	0.400	0.828	(0.483)
	0.40	0.267	0.516	0.517

ここで、右側のYは下記の行列により得る。

$$[0.333\ \ 0.667]\cdot\begin{matrix}0.25 & 0.75\\ 0.60 & 0.40\end{matrix}=[0.483\ \ 0.517] \qquad (1)$$

そして右側のXは、XYを右側のYで除して

得られる。

（１）式の左辺第２項をＸ→Ｙシステム行列と命名すれば、次の公式が得られる。

（Xの行ベクトル）・（X→Yシステム行列）＝（Yの行ベクトル）　（２）

次に（Ｘ－Ｚ）２次元システムを求めるために、以下の計算によりＸ→Ｚシステム行列を導く。

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ \hdashline 0.60 & 0.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.167 & 0.833 \\ 0.571 & 0.429 \\ \hdashline 0.125 & 0.875 \\ 0.556 & 0.444 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.470 & 0.530 \\ \hdashline 0.297 & 0.703 \end{bmatrix} \quad (3)$$

これよりＺの値が下記の行列により得られる。

$$[0.333\ \ 0.667] \cdot \begin{bmatrix} 0.470 & 0.530 \\ 0.297 & 0.703 \end{bmatrix} = [0.355\ \ 0.645] \quad (4)$$

ここで上式の（２）に対応するのは下記の公式である。

（Xの行ベクトル）・（X→Zシステム行列）＝（Zの行ベクトル）　（５）

また、（３）式の左側第２項をＹ→Ｚ関係行列と命名すれば、次の公式が得られる。

（X→Yシステム行列）・（Y→Z関係行列）＝（X→Zシステム行列）　（６）

そして（Ｘ－Ｚ）２次元システムの関係表は上記の結果から次のようになる。

表３　Ｘ、Ｚの関係表

左側		同時	右側	
X	Z	XZ	X	Z
0.333	0.470	0.157	0.442	0.355
	0.530	0.176	0.273	(0.645)
0.667	0.297	0.198	0.558	(0.355)
	0.703	0.469	0.727	0.645

最後に（Ｙ－Ｚ）２次元システムを求めるために、以下の計算によりＹ→Ｚシステム行列を導く。

$$\begin{bmatrix} 0.172 & 0.828 \\ \hdashline 0.484 & 0.516 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.167 & 0.833 \\ 0.125 & 0.875 \\ \hdashline 0.571 & 0.429 \\ 0.556 & 0.444 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.132 & 0.868 \\ \hdashline 0.563 & 0.437 \end{bmatrix} \quad (7)$$

上式の左側第１項は、Ｙ→Ｘシステム行列であり、表１の右側Ｘの項から得られる。さらに左側第２項は、（３）式の第２項と類似しているが、上下の順番が一部入れ代わっているので、Ｙ→Ｚ変形関係行列と命名することにすれば、次の公式が得られる。

（Y→Xシステム行列）・（Y→Z変形関係行列）
＝（Y→Zシステム行列）　（８）

さて、演算の内容を考慮して、（６）式を中抜き定理、（８）式を反射定理と称している。なお、（３）（７）における行列演算は点線の上下でそれぞれ別個に実行されるものである。

そして（Ｙ－Ｚ）２次元システムの関係表は、（７）式の結果を利用して次表の内容で得られる。

表４　Ｙ、Ｚの関係表

左側		同時	右側	
Y	Z	YZ	Y	Z
0.483	0.133	0.064	0.180	0.355
	0.867	0.419	0.650	(0.645)
0.517	0.563	0.291	0.820	(0.355)
	0.437	0.226	0.350	0.645

これで３種類の２次元システムが全部得られたので、次の課題として表１に関する右側の表を求めることにする。

先ず、ＸＹＺの同時分布を表１から計算すると、表５の第１項 XYZ　が得られる。

表５　ＸＹＺの同時分布（右側）

XYZ	X	Y	Z
(111)0.014	0.219	0.180	0.355
(112)0.069	0.165	0.650	0.645
(121)0.143	0.491	0.820	0.355
(122)0.107	0.473	0.350	0.645
(211)0.050	0.781	0.180	0.355
(212)0.350	0.835	0.650	0.645
(221)0.148	0.509	0.820	0.355
(222)0.119	0.527	0.350	0.645

次に表４からＹとＺの組み合わせ

$$\begin{bmatrix} 0.180 & 0.355 \\ 0.650 & 0.645 \\ 0.820 & 0.355 \\ 0.350 & 0.645 \end{bmatrix}$$

を取り出し、それを上下に２回置いて、表５のＹとＺの項を作る。それから XYZ の値をＹとＺの積で除してＸを得れば、表５が完成し、表１と合わせてＸ，Ｙ，Ｚの３次元状態変換システムの詳細が明らかとなる。

なお、Ｘ，Ｙ，Ｚの状態分布は上の検討から次の通りである。

$$X = [0.333\ \ 0.667]$$

$$Y = [0.483\ \ 0.517]$$

$$Z = [0.355\ \ 0.645]$$

以上で表１から出発して表２から表５までの全てが得られる手順を明らかにした。

その要点をまとめると、次のようである。

（１）ＸとＹの２次元システムの求め方

Ｘ、Ｙ、Ｚの関係表（左側）からＺを無視してＸ、Ｙの関係表を完成する。

（２）ＸとＺの２次元システムの求め方

中抜き定理により、Ｘ→Ｚシステム行列を求め、Ｚの状態分布を計算すれば、Ｘ→Ｚの関係表を完成できる。

（３）ＹとＺの２次元システムの求め方

反射定理により、Ｙ→Ｚシステム行列を求め、既に得られているＺの状態分布と合わせて、Ｙ→Ｚの関係表を完成できる。

これらの要点は、対象がＸ，Ｙ，Ｚ，Ｗの４次元状態変換システムの場合であっても基本的には同じであり、中抜き定理と反射定理の反復使用により目的が達成される。もっとも２段中抜き定理のような拡張定理により手順を簡略化することがあるが、今回の報告では省略する。

3．状態分布と同時分布に関する性質

前章で考察したのと同じように要素数が２の事象Ｘ，Ｙ，Ｚがあって、それらの要素事象が次のように与えられているものとする。

$$X = [\ X_1\ \ X_2\ ] \quad (9)$$

$$Y = [\ Y_1\ \ Y_2\ ] \quad (10)$$

$$Z = [\ Z_1\ \ Z_2\ ] \quad (11)$$

そして各事象の値を

$$P(X) = [\ P(X_1)\ P(X_2)\ ] \quad (12)$$

$$P(Y) = [\ P(Y_1)\ P(Y_2)\ ] \quad (13)$$

$$P(Z) = [\ P(Z_1)\ P(Z_2)\ ] \quad (14)$$

と置く。この記号の下で

$$P(XYZ) = [\ P(X_iY_jZ_k) \mid i,j,k\ ] \quad (15)$$

は３事象の同時分布の値を表しており、

$$P(XY) = [\ P(X_iY_j) \mid i,j\ ] \quad (16)$$

$$P(YZ) = [\ P(Y_jZ_k) \mid j,k\ ] \quad (17)$$

$$P(ZX) = [\ P(Z_kX_i) \mid k,i\ ] \quad (18)$$

は２事象の組み合わせに分解したときの、それぞれにおける同時分布の値である。

前章の事例では、ｉ，ｊ，ｋはいずれも１から２の値をとるにすぎないが、以下の議論は１からｎ（任意の正の整数）の値をとる場合にも成立する。

＜問題１＞Ｐ（Ｘ），Ｐ（Ｙ），Ｐ（Ｚ）とＰ（ＸＹＺ）からＰ（ＸＹ），Ｐ（ＹＺ），Ｐ（ＺＸ）を求める手順

①Ｐ（ＸＹ）の値

次の式により求まる。

$$P(X_1Y_1) = P(X_1Y_1Z_1) + P(X_1Y_1Z_2) \quad (19)$$

$$P(X_1Y_2) = P(X_1Y_2Z_1) + P(X_1Y_2Z_2) \quad (20)$$

$$P(X_2Y_1) = P(X_2Y_1Z_1) + P(X_2Y_1Z_2) \quad (21)$$

$$P(X_2Y_2) = P(X_2Y_2Z_1) + P(X_2Y_2Z_2) \quad (22)$$

表５を使ってこれらの値を算出すると、

$$P(X_1Y_1) = 0.083 \quad P(X_1Y_2) = 0.250$$

$$P(X_2Y_1) = 0.400 \quad P(X_2Y_2) = 0.267$$

②Ｐ（ＹＺ）の値

次の式と表５により求まる。

$$P(Y_1Z_1) = P(X_1Y_1Z_1) + P(X_2Y_1Z_1) \quad (23)$$

$$P(Y_1Z_2) = P(X_1Y_1Z_2) + P(X_2Y_1Z_2) \quad (24)$$

$$P(Y_2Z_1) = P(X_1Y_2Z_1) + P(X_2Y_2Z_1) \quad (25)$$

$$P(Y_2Z_2) = P(X_1Y_2Z_2) + P(X_2Y_2Z_2) \quad (26)$$

$$P(Y_1Z_1) = 0.064 \quad P(Y_1Z_2) = 0.419$$

$$P(Y_2Z_1) = 0.291 \quad P(Y_2Z_2) = 0.226$$

③Ｐ（ＺＸ）の値

次の式と表５により求まる。

$$P(Z_1X_1) = P(X_1Y_1Z_1) + P(X_1Y_2Z_1) \quad (27)$$

$$P(Z_1X_2) = P(X_2Y_1Z_1) + P(X_2Y_2Z_1) \quad (28)$$

$$P(Z_2X_1) = P(X_1Y_1Z_2) + P(X_1Y_2Z_2) \quad (29)$$

$$P(Z_2X_2) = P(X_2Y_1Z_2) + P(X_2Y_2Z_2) \quad (30)$$

$P(Z_1X_1) = 0.157$　　$P(Z_1X_2) = 0.198$

$P(Z_2X_1) = 0.176$　　$P(Z_2X_2) = 0.469$

＜問題2＞ P（X），P（Y），P（Z）と P（XY），P（YZ），P（ZX）とから P（XYZ）を求める手順

①P（Y｜X）の計算

次の式により求める。

$$P(Y_1|X_1) = P(Y_1X_1)/P(X_1) \quad (31)$$

$$P(Y_2|X_1) = P(Y_2X_1)/P(X_1) \quad (32)$$

$$P(Y_1|X_2) = P(Y_1X_2)/P(X_2) \quad (33)$$

$$P(Y_2|X_2) = P(Y_2X_2)/P(X_2) \quad (34)$$

以上の計算式と表2から

$P(Y_1|X_1) = 0.083/0.333 = 0.25$

$P(Y_2|X_1) = 0.250/0.333 = 0.75$

$P(Y_1|X_2) = 0.400/0.667 = 0.60$

$P(Y_2|X_2) = 0.267/0.667 = 0.40$

②P（Z｜XY）の計算

表1において、Zが未定の場合に相当するから次表の a_1 から b_4 までを決定すればよい。

表6　X、Y、Zの関係表（左側）

P(X)	P(Y|X)	P(Y|XY)	P(XYZ)
0.333	0.25	① a_1	$0.0833a_1$
		② a_2	$0.0833a_2$
	0.75	③ a_3	$0.2498a_3$
		④ a_4	$0.2498a_4$
0.667	0.60	⑤ b_1	$0.4002b_1$
		⑥ b_2	$0.4002b_2$
	0.40	⑦ b_3	$0.2668b_3$
		⑧ b_4	$0.2668b_4$

この表のP（XYZ）の値を上からひとつおきに集めたのが $P(Z_1)$ であるから次式が得られる。

$$0.0833a_1+0.2498a_3+0.4002b_1+0.2668b_3 = 0.355 \quad (35)$$

また、Y→Z関係行列は

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

となり、X→Yシステム行列は、①から次の形式で得られる。

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.60 & 0.40 \end{bmatrix}$$

さらにX→Zシステム行列は、P(X）と P(ZX）から

$$\begin{bmatrix} 0.470 & 0.530 \\ 0.297 & 0.703 \end{bmatrix}$$

が得られるから、（6）式に該当して次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} 0.25 & 0.75 \\ 0.60 & 0.40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.470 & 0.530 \\ 0.297 & 0.703 \end{bmatrix} \quad (36)$$

これから次の2式が得られる。

$$0.25a_1 + 0.75a_3 = 0.470 \quad (37)$$

$$0.60b_1 + 0.40b_3 = 0.297 \quad (38)$$

さらにY→Xシステム行列は、P（Y）と P（XY）から

$$\begin{bmatrix} 0.172 & 0.828 \\ 0.484 & 0.516 \end{bmatrix}$$

であり、Y→Zシステム行列は、P（Y）と P（YZ）から

$$\begin{bmatrix} 0.132 & 0.868 \\ 0.563 & 0.437 \end{bmatrix}$$

が得られるから、（8）式に該当して次式が成立する。

$$\begin{bmatrix} 0.172 & 0.828 \\ 0.484 & 0.516 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.132 & 0.868 \\ 0.563 & 0.437 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$0.172a_1 + 0.828b_1 = 0.132 \quad (40)$$

$$0.484a_3 + 0.516b_3 = 0.563 \quad (41))$$

上に得られた（35）、（37）、（38（40）、（41）の5式から a_1, a_3, b_1, b_3 が導出され、残りは以下の関係式から求められる。

$$a_1 + a_2 = a_3 + a_4 = 1 \quad (42)$$

$$b_1 + b_2 = b_3 + b_4 = 1 \quad (43)$$

なお、上の5式のうちひとつは、残りの4式から導けるので余剰である。

つまり、P（X），P（Y），P（Z）が与えられておれば、

P（XY），P（YZ），P（ZX）

⇔P（XYZ）

であり、どちら側からも相手側の詳細構造を明らかにできる。

4．システム情報量の意味[2)]

例えば、3次元システム情報量は、下記のごとく定義される。

$$S(X;Y;Z)=H(X)+H(Y)+H(Z)-H(XYZ) \quad (44)$$

ここで、

$$H(X)=-\Sigma P(X_i)\log P(X_i) \quad (45)$$
$$(i=1,2,\cdots l)$$

$$H(Y)=-\Sigma P(Y_j)\log P(Y_j) \quad (46)$$
$$(j=1,2,\cdots m)$$

$$H(Z)=-\Sigma P(Z_k)\log P(Z_k) \quad (47)$$
$$(k=1,2,\cdots n)$$

$$H(XYZ)=-\sum_{ijk}P(X_i,Y_j,Z_k)\cdot\log P(X_i,Y_j,Z_k) \quad (48)$$

これは非負であり、

$$H(X)+H(Y)+H(Z)=-\sum_{ijk}P(X_i)P(Y_j)P(Z_k)\cdot\log P(X_i)P(Y_j)P(Z_k) \quad (49)$$

であるから、次式が成立する。

$$S(X;Y;Z)=H(X\cdot Y\cdot Z)-H(XYZ)\geqq 0 \quad (50)$$

この式が意味することはこうである。つまり、複合事象の同時分布の情報エントロピーは、それらの事象が独自に存在するとしたときの分布の相乗積の情報エントロピーより小さく、その差をシステム情報量と考えるということである。

換言すれば、H（X・Y・Z）は3事象が互いに関連をもたないときの情報エントロピーであるのに対し、H（XYZ）は相補的分枝構造というシステムをもつときの情報エントロピーであるから、その差はシステムの中に見られる情報量であると考えられる。

5．2次元に分解したときのシステム情報量

上記の3次元システムを3種類の2次元システムに分解したとき、それらは下記の式で与えられる。

$$S(X;Y)=H(X)+H(Y)-H(XY) \quad (51)$$
$$S(Y;Z)=H(Y)+H(Z)-H(YZ) \quad (52)$$
$$S(Z;X)=H(Z)+H(X)-H(ZX) \quad (53)$$

ここで、H(XYZ),H(XY),H(YZ),H(ZX)は同時事象の情報エントロピーである。したがってその定義式は下記に示す通りである。

$$H(XY)=-\Sigma P(X_i,Y_j)\log P(X_i,Y_j) \quad (54)$$
$$H(YZ)=-\Sigma P(Y_j,Z_k)\log P(Y_j,Z_k) \quad (55)$$
$$H(ZX)=-\Sigma P(Z_k,X_i)\log P(Z_k,X_i) \quad (56)$$

そして、次の式の正負を検討する。

$$S(XYZ)=S(X;Y;Z)-\{S(X;Y)+S(Y;Z)+S(Z;X)\} \quad (57)$$

この式で定義したS（XYZ）をシステム同時情報量と命名する。

さて、この式は、以下のように変形できる。

$$S(XYZ)=H(X|Y)+H(Y|Z)+H(Z|X)-H(XYZ) \quad (58)$$

2次元の場合、1次元のシステム情報量との比較は無意味であるが、（58）式の形式的検討はできる。このとき（58）式に該当する式として次式をあてる。

$$S(XY)=H(X|Y)+H(Y|X)-H(XY) \quad (59)$$

ここで、

$$H(X|Y)=-\sum_{ij}P(X_iY_j)\log\frac{P(X_iY_j)}{P(Y_j)} \quad (60)$$

$$H(Y|X)=-\sum_{ij}P(X_iY_j)\log\frac{P(X_iY_j)}{P(X_i)} \quad (61)$$

であるから

$$S(XY)=-\sum_{ij}P(X_iY_j)\log\frac{P(X_iY_j)}{P(X_i)P(Y_j)} \quad (62)$$

これは、カルバックの判別量が非負であることから零以下である。つまり、

$$H(X|Y)+H(Y|X)\leqq H(XY) \quad (63)$$

次に、（58）式の正負について検討を加える。（60）式と同様にして

$$H(Y|Z)=-\sum_{jk}P(Y_jZ_k)\log\frac{P(Y_jZ_k)}{P(Z_k)} \quad (64)$$

$$H(Z|X)=-\sum_{ki}P(Z_kX_i)\log\frac{P(Z_kX_i)}{P(X_i)} \quad (65)$$

が得られるから、（４８）式とあわせることによって、次頁の式が導出される。

$$S(XYZ) = \sum_{ijk} P(X_i, Y_j, Z_k) \cdot \log \frac{P(X_i Y_j Z_k)}{P(X_i|Y_j)P(Y_j|Z_k)P(Z_k|X_i)} \quad (66)$$

したがって、次式

$$\sum_{ijk} P(x_i|y_j)P(y_j|z_k)P(z_k|x_i) \leqq 1 \quad (67)$$

が成立すれば、

$$S(XYZ) \geqq 0 \quad (68)$$

と言える。

したがって、判別項Dを次式で定義する。

$$D = 1 - \sum_{ijk} P(x_i|y_j)P(y_j|z_k)P(z_k|x_i) \quad (69)$$

これにより、Dが非負なら（６８）式が成立することとなる。

6．判別項の具体例の検討

6．1　S（３，２－２－２）の場合[3)]

３次元状態変換システム（Ｘ；Ｙ；Ｚ）は、既述したとおり３種類の状態変換システムつまり（Ｘ；Ｙ），（Ｙ；Ｚ）と（Ｚ；Ｘ）に分解できる。そこで、Ｘ→Ｙ，Ｙ→Ｚ，Ｚ→Ｘに変換するときのシステム行列が次のようになっているとする。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \quad (72)$$

このとき、判別項は

$$D = -(a_{11} - a_{21})(b_{11} - b_{21})(c_{11} - c_{21}) \quad (73)$$

であることが求められる。

第２章の例では、

$a_{11}=0.25$　$a_{21}=0.60$　$b_{11}=0.133$

$b_{21}=0.563$　$c_{11}=0.442$　$c_{21}=0.273$

であるから

$D = -0.025$

したがって、この場合

$S(XYZ) \leqq 0$

となるので、２次元に分解したときのシステム情報量の総和のほうが大となる。

すなはち、

$S(X;Y;Z)= 0.238$

$S(X;Y)+S(Y;Z)+S(Z;X)= 0.259$

これに対し、表１が次の表７のように変わったとする。

表７　Ｘ、Ｙ、Ｚの関係表（左側）

X	Y	Z
0.333	0.25	①0.167 ②0.833
	0.75	③0.200 ④0.800
0.667	0.60	⑤0.125 ⑥0.875
	0.40	⑦0.875 ⑧0.125

この場合

$a_{11}=0.25$　$a_{21}=0.60$　$b_{11}=0.133$

$b_{21}=0.549$　$c_{11}=0.184$　$c_{21}=0.413$

であるから、

$D = 0.033$

$S(X;Y;Z)= 0.413$

$S(X;Y)+S(Y;Z)+S(Z;X)= 0.200$

となり、元のシステム情報量の方が２次元に分解したときのシステム情報量の総和より大である。

なお、Ｘ，Ｙの関係表は前例と同じだが、Ｘ，Ｚの関係表とＹ．Ｚの関係表は以下のように変わる。表８　Ｘ、Ｚの関係表

左側		同時	右側	
X	Z	XZ	X	Z
0.333	0.192	0.064	0.184	0.347
	0.808	0.269	0.413	(0.653)
0.667	0.425	0.283	0.816	(0.347)
	0.575	0.384	0.587	0.653

表９　Ｙ、Ｚの関係表

左側		同時	右側	
Y	Z	YZ	Y	Z
0.483	0.133	0.064	0.184	0.347
	0.867	0.419	0.642	(0.653)
0.517	0.549	0.283	0.816	(0.347)
	0.451	0.234	0.358	0.653

6．2　S（3，2－3－2）の場合

前節と同じく3次元ではあるが、2番目のYが3要素事象の場合を次に考察する。したがって、2次元に分解したとき、X→Y及びY→Zにおけるシステム行列が以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \qquad (74)$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \qquad (75)$$

このとき、判別項は

$$D = -(c_{11} - c_{21})\{(a_{11} - a_{21})b_{11} + (a_{12} - a_{22})b_{21} + (a_{13} - a_{23})b_{31}\} \qquad (76)$$

一例として、X，Y，Zが次の表に掲げる値をとるときを検討する。

表10　X、Y、Zの関係表（左側）

X	Y	Z	
0.700	0.30	①0.900	②0.100
	0.50	③0.700	④0.300
	0.20	⑤0.400	⑥0.600
0.300	0.50	⑦0.700	⑧0.300
	0.40	⑨0.400	⑩0.600
	0.10	⑪0.100	⑫0.900

このとき、

$a_{11}=0.3$　$a_{12}=0.5$　$a_{13}=0.2$

$a_{21}=0.5$　$a_{22}=0.4$　$a_{23}=0.1$

$b_{11}=0.816$　$b_{12}=0.184$　$b_{21}=0.622$

$b_{22}=0.378$　$b_{31}=0.346$　$b_{32}=0.654$

$c_{11}=0.76$　$c_{12}=0.24$

$c_{21}=0.59$　$c_{22}=0.41$

これらを代入して、

$D = 0.011$

が得られる。システム情報量を求めると、

$S(X;Y;Z) = 0.160$

$S(X;Y)+S(Y;Z)+S(Z;X) = 0.130$

したがって、システム同時情報量S（XYZ）は0．030であり、一体として提供する情報量が、分解された3システムが提供する情報量の総和より大きい。

7．おわりに

状態変換システムの重要な性質のひとつとして、（3次元以上なら3種類以上の）2次元システムに分解でき、また元のシステムに復元できるということがある。

先ず、状態変換システムの詳細な構造を示す関係表から中抜き定理と反射定理を用いて分解していく方法を示した。それは、行列演算の手法に基づくものである。したがって大規模演算が必要な場合、コンピュータプログラミングのためのアルゴリズムにふさわしい手法といえる。

また、全ての事象の状態分布が与えられていれば、分解した2次元事象の同時分布から元の全体事象の同時分布を導出でき、その逆も可能であることを示した。

この意味で全体事象と分解した2次元事象の全ては等価であるが、システムが有する情報量の視点ではどうであるかを次に検討している。そのためシステム情報量という概念を導入した。これは、状態分布がシステムという結合体のなかで有する情報量を示している。

ただし、全体事象のシステム情報量と分解した2次元事象システムの情報量の総和との大小にはシステムの構造が影響することを判別項によって示している。この判別項は、システム行列の要素値で与えられることを具体例において説明した。最後に、本研究は文部省科学研究費の補助(No. 06808042）を受けてなされたものであることを付記する。

—参考文献—

（1）古閑：相補的分枝構造を有する状態変換システムの性質，情報処理学会九州支部研究会報告、pp. 92-101（1995/2)

（2）古閑：複合事象システムの情報量評価について、情処研報 95-87, pp. 1-8(1995/9)

（3）古閑：状態変換システムの諸特性の検討（その1）、情処研報 96-72, pp. 9-16（1996/7)