数理モデル化と問題解決 20－3
（1998. 7. 24）

チャンネル割当問題の解法

宮本裕一郎　　松井知己
システム計画研究所　　東京大学大学院

本論文では，携帯電話の基地局に対するチャンネル割当問題を組合せ最適化問題として定式化した．そして厳密解法，近似解法，発見的解法を提案した．またそれぞれの解法について同心円グラフを入力とする計算実験を行い，考察を行った．厳密解法の章では，既存のパッケージソフトウェアを用いるため，整数線形計画問題へ帰着する定式化を提案した．近似解法の章では，実用に近い特定のグラフに対して５－近似の精度を保証する解法を提案した．発見的解法の章では，２つの構築法と２つの改善法を提案し，それらを組み合わせたいくつかの発見的解法を提案した．

Algorithms for channel assignment problems

Yuichiro MIYAMOTO　　Tomomi MATSUI
Research institute of systems planning　　University of Tokyo

In this paper, we present algorithms for channel (frequency) assignment problems. We formulate channel assignment problems as combinatorial optimization problems. We propose an exact method, an approximation algorithm and heuristic algorithms. We also report the results of computational experiences. We formulated the problem as an integer linear programming problem and solved by a package software. We present a 5-approximation algorithm for particular graphs which are similar to real instances. we propose two construction methods and two improvement methods and present heuristic algorithms each of which is a combination of a construction method and improvement methods.

1. 問題設定

近年，携帯電話の普及にともない，大規模なチャンネル割当問題を解く必要が生じてきた．現在，携帯電話の基地局は関東平野に約 10,000 個ある．

チャンネル割当問題とは，携帯電話の基地局が配置されている状況において，電波の干渉を考慮するという条件の元で各基地局にチャンネルを割り当てる際に，使用するチャンネル幅を出来るだけ狭くする問題である．

本研究では，電波の干渉を離散化して表現した問題を扱う．すなわち，基地局を頂点とし，干渉の存在する基地局間を枝で結んだグラフを用いて問題を表す．またチャンネルの割当は，グラフの頂点に自然数を割り当てることで表現する．この問題を組合せ最適化問題としてモデル化した問題が以下の問題である．

入力：単純無向グラフ G と自然数の枝重み．

目的：G の頂点に割り当てられた自然数の最大値の最小化．

制約：グラフ G の各頂点に自然数を割り当てる．ただし重み k の辺で隣接する頂点対に割り当てる自然数対はその差が k 以上でなければならない．

この問題をチャンネル割当問題と呼ぶ．図1はチャンネル割当問題の例である．図1の太い線は重み2

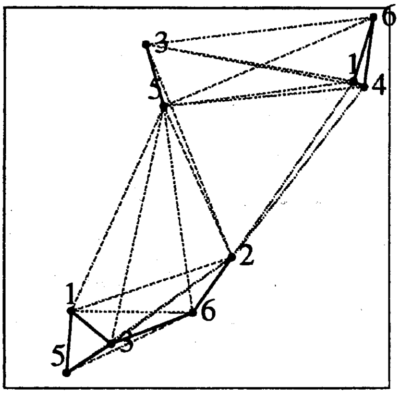

図 1: チャンネル割当問題の例

の辺を，細い線は重み1の辺を表している．数字は制約を満たすチャンネル割当の例である．本論文では枝重みとして1と2の2種類を持つ問題のみを扱うが，本論文で得られた結果の多くは，一般の重みを持つ問題に拡張できる．

チャンネル割当問題は頂点彩色問題を特殊な場合として含む．よってチャンネル割当問題はNP-困難である．本論文では，厳密解法，近似解法，発見的解法のそれぞれを提案する．

2. 厳密解法

本節ではチャンネル割当問題を整数線形計画法に定式化し，既存のパッケージソフトウェアを用いて解を求める．詳細な定式化の前に，その考え方を説明する（図2参照）．グラフにチャンネルを割り当てる問題をグラフの頂点（n 個）とチャンネルの特殊なマッチングを求める問題と見なす．本節では枝重みが2以下の問題を扱うため，最悪の場合に備えてチャンネルは $2n$ 用意する．変数 x_{ij} を用意し，頂点 i にチャンネル j を割り当てたとき $x_{ij} = 1$，そうでないとき $x_{ij} = 0$ とする．変数 y_j を用意し，j 以上のチャンネルを割り当てた頂点が存在する時

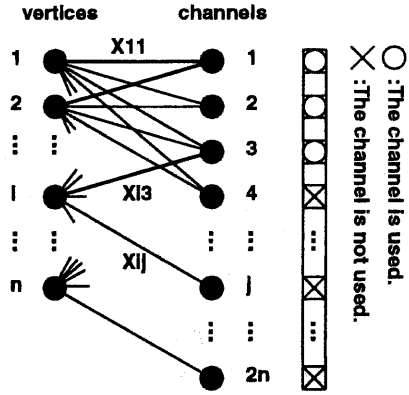

図 2: マッチングに基づいた定式化の概念図

$y_j = 1$，そうでないとき $y_j = 0$ とする．すると，チャンネル割当問題は以下の整数線形計画問題に定式化される．

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & \sum_{j=1}^{2n} y_j, \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{2n} x_{ij} = 1, \\
& x_{i_1 j} + x_{i_2 j} \le 1 \\
& \quad (\forall j \in C, \forall (i_1 i_2) \in E_1), \\
& x_{i_1 j} + x_{i_2 j} + x_{i_1 j+1} + x_{i_2 j+1} \le 1 \\
& \quad (\forall j \in C, \forall (i_1 i_2) \in E_2), \\
& x_{ij} \le y_j \quad (\forall i \in V, \forall j \in C), \\
& 1 \ge y_1 \ge y_2 \ge \cdots \ge y_{2n}, \\
& x_{ij}, y_j \in \{0, 1\} \quad (\forall i \in V, \forall j \in C).
\end{aligned}
$$

ただし $C = \{1, \ldots, 2n\}$．E_1 は G 中の重み1の枝集合を，E_2 は G 中の重み2の枝集合を表している．V は G の頂点集合を表している．上記の整数線形計画問題を既存のパッケージソフトウェア (lp_solve 2.0) を用いて解いた．計算結果を示す前に，計算実験に用いた問題例について説明する．

問題例には同心円グラフを用いた．同心円グラフとは「平面上の点集合に対し点対の距離が r_2 以下ならば重み2の辺で結ぶ．点対の距離が r_2 より大

きく r_1 以下ならば重み 1 の辺で結ぶ．」という手続きで得られるグラフである（図 3）．図 1のグラフは同心円グラフの例となっている．

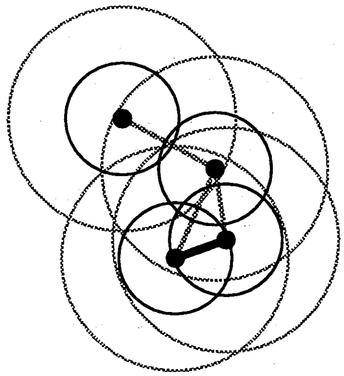

図 3: 同心円グラフの概念図

頂点数 10 の問題例の計算時間が以下の表 1である．用いた計算機は SPARC station 20(150MHz) である．計算時間が長いのは整数線形計画問題の変数（$O(n^2)$ 個）と制約条件式（$O(n^3)$ 個）が多いことが原因と考え，これらを減らす工夫をした．

表 1: 頂点数 10 の問題例の計算時間

問題例	計算時間 [秒]
その 1	13.59
その 2	146.18
その 3	10.24
その 4	10.35
その 5	153.86
その 6	68.30
その 7	15.77
その 8	79.73
その 9	105.90
その 10	156.96
平均	76.09

まず目的関数値の上解 u と下界 l をあらかじめ求め，それらを利用して変数を減らした．また，制約条件式を極大クリークに対して導入することにより，制約条件式を減らした．このようにして工夫を施したものが以下の定式化である．

$$
\begin{aligned}
\text{min.} \quad & l + \sum_{j=l}^{u} y_j, \\
\text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^{u} x_{ij} = 1, \\
& \sum \{x_{ij} \mid \ i \in S\} \leq 1 \\
& \quad (\forall j \in C, S \in Q_1), \\
& \sum \{x_{ij} + x_{i\ j+1} \mid \ i \in S\} \leq 1 \\
& \quad (j \in C, S \in Q_2), \\
& x_{ij} \leq y_j \quad (\forall i \in V, \forall j \in C), \\
& 1 \geq y_{l+1} \geq \cdots \geq y_u, \\
& x_{ij}, y_j \in \{0,1\} \quad (\forall i \in V, \forall j \in C).
\end{aligned}
$$

ただし Q_1, Q_2 は各々グラフ (V, E_1) と (V, E_2) の極大クリークの族である．この定式化により，変数と制約条件式は経験上大幅に減るが，最悪ケースではそのオーダーが減るわけではない．

計算実験の結果は以下の表 2，表 3である．この

表 2: 頂点数 10 の問題例の計算時間

問題例	（工夫前）[秒]	（工夫後）[秒]
その 1	13.59	0.10
その 2	146.18	0.15
その 3	10.24	0.10
その 4	10.35	0.10
その 5	153.86	0.26
その 6	68.30	0.24
その 7	15.77	0.08
その 8	79.73	0.12
その 9	105.90	0.12
その 10	156.96	0.18
平均	76.09	0.15

表 3: 頂点数 25 の問題例の計算時間

問題例	計算時間（工夫後）[秒]
その 1	3664.23
その 2	747.09
その 3	16245.87
その 4	51.77
その 5	1456.83
その 6	72.09
その 7	2152.99
その 8	11699.66
その 9	9133.02
その 10	301.06
平均	4552.46

計算時間では頂点数 10 のときは 100 倍程度速くなることが分かる．

3. 近似解法

本稿では，近似解法として以下の頂点除去法を提案した．

頂点除去法

与えられたグラフにおいて，頂点 v に接続する重み 1 の辺の数を $d_1(v)$，重み 2 の辺の数を $d_2(v)$ とする．$d_1(v) + 3d_2(v)$ が最大となる頂点 v をグラフから除去する．得られたグラフにおいて $d_1(v) + 3d_2(v)$ を再び計算しそれが最大となる頂点を再び計算しそれをグラフから除去する．以上の操作をグラフが空になるまで繰り返す．元のグラフに対し，頂点が除去された逆順に，すなわち最後に除去された頂点を最初に，チャンネル割当する．チャンネル割当は貪欲に行なう．ここで「貪欲に」とは制約条件を満たす範囲で最小のチャンネル（最小の自然数）を割り当てることを意味する．

頂点除去法については以下の定理が成り立つことを示した．

定理

$r_1 \geq 2r_2$ なる同心円グラフを問題例とした時，頂点除去法で得られた解の目的関数値は，最適値の 5 倍以内である．

証明

頂点除去法の頂点除去過程において，頂点が除去される時の $d_1(v) + 3d_2(v)$ の値が最も大きい頂点の内，最初に除去される頂点を v^* とする．$d_1(v^*) + 3d_2(v^*)$ は v^* にチャンネルを割り当てる時に使えないチャンネル数の上限になっているので，頂点除去法で得られた解の値を m_{A} とすると，

$$m_{\mathrm{A}} \leq d_1(v^*) + 3d_2(v^*) + 1$$

である．頂点除去過程において v^* が除去される直前の時点のグラフを G^* とする．G^* の頂点の中で最も x 座標が小さい頂点を x_l とする．明らかに

$$d_1(v^*) + 3d_2(v^*) \leq d_1(v_l) + 3d_2(v_l)$$

である． グラフとして問題例に対する最適値を m_{OPT} とすると，v_l に隣接する頂点は全て，v_l より x 座標の大きい点集合である半平面に含まれることから

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{OPT}} &\geq \frac{1}{3}(d_1(v_l) + 3d_2(v_l)) + 1 \\ m_{\mathrm{OPT}} &\geq d_2(v_l) + 1 \end{aligned}$$

が成り立つ．以上より

$$\begin{aligned} m_{\mathrm{A}} &\leq d_1(v^*) + 3d_2(v^*) + 1 \\ &\leq d_1(v_l) + 3d_2(v_l) + 1 \\ &= (d_1(v_l) + d_2(v_l)) + 2d_2(v_l) + 1 \\ &\leq 3(m_{\mathrm{OPT}} - 1) + 2(m_{\mathrm{OPT}} - 1) + 1 \\ &= 5m_{\mathrm{OPT}} - 4 < 5m_{\mathrm{OPT}}, \end{aligned}$$

が成り立つ．よって頂点除去法は 5- 近似である．（証明終り）

計算実験の結果は以下の表 4 である．最適値の下界はグラフ (V, E) の最大クリーク問題の近似解を用いた．表 4 より頂点除去法による解の目的関数値

表 4: 近似解法による目的関数値（頂点数 500）

問題例	最適値の下界	頂点除去法による目的関数値
その 1	385	434
その 2	393	426
その 3	393	417
その 4	413	433
その 5	424	457
その 6	411	419
その 7	399	418
その 8	389	414
その 9	408	426
その 10	400	422

は，現実には最適値の 1.2 倍程度でおさえられていることが分かる．

4. 発見的解法

本論文における発見的解法の章では，「構築法」と「改善法」それぞれを複数提案し，計算実験によって，その良い組み合わせ方について考察を行なった．頂点除去法は構築法の一つである．もう一つ構築法の提案を行なったが本稿では省略する．また本論文では局所探索を用いた改善法を 2 つ提案した．

改善法 1

概要の説明にとどめる．既に可能解が得られているとする．以下ではチャンネルに頂点を割り当てているとみなして算法を記述する．一番大きなチャンネルに割り当てられている頂点すべてを，ランダムに選んだ別のチャンネルに割り当てる．チャンネル制約を満たさなくなる頂点が出現したらそれらをまとめて別のチャンネルに割り当てる．すべての頂点がチャンネル制約を満たす割当を得られるまでこれを繰り返す．このとき割当に使うチャンネルが 1 つ少なくなる．これを繰り返す．

改善法 2

既に可能解が得られているとする．チャンネルの区間をランダムに選ぶ．選ばれた区間に割り当てられているチャンネルをひっくり返す（昇順のものを降順にする）．区間の端とその隣に割り当てられている頂点を同じチャンネルに割り当てることが出来るならば割当に使うチャンネルが 1 つ（あるいは 2 つ）少なくなる．これを繰り返す．

表 5は頂点除去法に 2 つの改善法を加えた発見的解法の計算実験結果である．計算時間は約 100 秒であった．構築法と改善法の他の組合せについては，性能がこれより劣っていたため，ここでは計算実験結果を省略する．

表 5: 発見的解法による目的関数値（頂点数 500）

問題例	最適値の下界	頂点除去法 + 改善法 1 + 改善法 2
その 1	385	426→415→415
その 2	393	412→409→409
その 3	393	413→407→406
その 4	409	433→425→425
その 5	422	457→442→442
その 6	410	419→419→419
その 7	396	418→413→413
その 8	385	414→412→412
その 9	407	426→418→418
その 10	390	422→421→421

5. まとめ

本論文では，組合せ最適化問題としてのチャンネル割当問題に対し，整数線形計画法を用いた厳密解法，最適値の 5 倍未満の解が得られることが理論的に保証されている多項式時間近似解法，発見的解法を提案した．

参考文献

[1] R.Borndörfer, A.Eisenblätter, M.Grötschel and A.Martin, "Frequency Assignment in Cellular Phone Networks", Konrad-Zuse Zentrum für Informationstechnik Berlin (ZIB), Preprint SC 97-35 (July 1997).

[2] K.I.Ardal, A.Hipolito, C.P.M. van Hoesel and B. Hansen, "A Branch-and-Cut Algorithm for the Frequency Assignment", Reseach Memo 96/001, http://www.unimaas.nl/~oprres/.

[3] M.V.Marathe, H.Breu, H.B.Hunt, S.S.Ravi and D.J.Rosenkrantz, "Simple Heuristics for Unit Disk Graphs", Networks, Vol.25, 59-68 (1995).

[4] M.V.Marathe, V.Radhakrishnan, H.B.Hunt III and S.S.Ravi, "Hierarchically specified unit disk graphs", Theoretical Computer Science, Vol. 174, 23–65 (1997).

[5] D.S.Johnson, M.Yanakakis and C.H.Papadimitriou, "On Generating all Maximal Independent Set", Information Processing Letters, Vol. 27, 119–123 (1988).