

確率過程のピーク値分布における重み関数の線形結合モデル

中本 昌由[†] 南原 英生^{††}

荒木 勇一朗^{††} 雛元 孝夫^{†††}

[†] 広島大学大学院工学研究科

^{††} 岡山理科大学工学部情報工学科

^{†††} 広島大学工学部第2類(電気系)

本論文では、非ガウス性の確率過程におけるピーク値分布評価法について論じている。ここでは、まず、ガウス過程のピーク値分布評価式により2つの重み関数を定義し、重み関数の線形結合に基づいてピーク値分布をモデル化している。提案モデルは、帯域情報から求められるパラメータ(帯域パラメータ)に基づいて2つ重み関数を調節することにより、確率過程のピーク値分布を表現するものである。そして、これを非ガウス過程に適用することにより、非ガウス過程における新しいピーク値分布評価式を導出している。計算機シミュレーションでは、非常に良好な結果が得られており、提案手法の有効性が確認されている。

A Novel Model for Peak Values Distribution in Stochastic Process Based on Linear Combination of Weighting Functions

Masayoshi NAKAMOTO,[†] Hideo MINAMIHARA,^{††}

Yuichiro ARAKI^{††} and Takao HINAMOTO^{†††}

[†]Graduate School of Engineering, Hiroshima University

^{††}Faculty of Engineering, Okayama University of Science

^{†††}Faculty of Engineering, Hiroshima University

In this paper, we consider the approximate evaluation of peak values distribution (PVD) of non-Gaussian random process. We define two weighting functions from PVD evaluation formula for Gaussian random process, we model the PVD by linear combination of weighting functions. Weighting functions are adjusted by a parameter with frequency band information (band-parameter). Furthermore we derive a novel formula for non-Gaussian random process PVD approximation by applying proposed model. Result of computer simulation, show good performance of this method on PVD evaluation of non-Gaussian random signal, and conform the effectiveness of proposed model.

1. まえがき

時間 t に関して不確定な現象(不規則変動波形)は、理想化された数学モデルによって記述され、確率・統計的性質に基づいて解析されることから、一般に確率過程と呼ばれる。確率過程論は、さまざまな分野で生じる不規則雑音の分析に利用されるだけでなく、通信・情報・制御理論等の工学分野に浸透しており、その応用範囲は非常に幅広い[1]。

確率過程(不規則変動波形)において、その微分値が0となり、かつ上に凸な値はピーク値と呼ばれており、その研究成果は、地震動に対する構造物の安全性評価[2]、地震波の分析[3]、交通騒音・振動の評価[4],[5]等に応用されている。

確率過程におけるピーク値分布を理論的に評価(近似)するためには、信号の瞬時値、1階微分に加

えて2階微分の結合分布情報を必要とし、その厳密な理論的評価は非常に困難である。Cartwrightらは、対象とする不規則変動波形の振幅がガウス分布に従うとの仮定(ガウス過程)のもとでピーク値分布の確率密度関数を導出した[6]。この場合、対象となる確率過程の瞬時値・1階微分・2階微分に関する3次元結合確率密度関数が比較的簡単な形となることから、ピーク値分布の確率密度関数は、その定義式(後述する式(1))に基づいて導出されている。

ところが、一般的な不規則変動波形が必ずしも典型的なガウス過程とは限らないことから、振幅の非ガウス性(ガウス分布とのずれ)を理論の導出過程で考慮に入れる必要がある。ただし、複雑な形状を示す非ガウス分布(非ガウス過程)の場合、先に述べた3次元結合確率密度関数が非常に煩雑に

なり、理論評価式の導出がきわめて困難となる問題点がある。このような研究背景から、非ガウス過程におけるピーク値分布の評価理論が、3次元結合分布情報を必要としない形で提案されている[4],[7],[8]。ただし、これらは理論を展開する際になんらかの仮定・近似を用いており、いずれも完全な(近似を用いない)形で導出されているわけではない。

そこで本論文では、確率過程のピーク値分布に対して従来とは異なった側面からのアプローチを行う。ここでは、ガウス過程のピーク値分布評価式を2つの重み関数の線形結合の形に変形し、新しい確率分布モデル(重み関数の線形結合モデル)を提案する。このモデルは、帯域情報から計算されるパラメータ(帯域パラメータ)に基づいて重み関数を調節することにより、ピーク値分布を表現するものである。そして、提案モデルを非ガウス過程に適用し、非ガウス過程の新しいピーク値評価式を導出する。また、文献[7]で提案された非ガウス過程に対応した拡張帯域パラメータを適用した評価式も提案する。

この評価式は、従来と同様、ガウス分布を初項とする Hermite 展開に基づいて表されており、高次の展開係数を用いて理論評価式は表される。これは、一種の近似手法であるが、良好な評価精度を得ることができることを実験的に確認している。また、この評価式は、ガウス過程や狭帯域過程のようなスペシャルケースの場合、近似を伴わない理論評価式[4],[6]と一致するという特長をもつ。

なお、本論文では一般性を失うことなく、対象とする確率過程の平均を0、分散を1に規格化している。

2. ガウス過程のピーク値分布

確率過程 $x(t)$ のピーク値確率分布 $p(x)$ は、信号の瞬時値 $x(t)$ 、1階微分値 $\dot{x}(t)$ 、2階微分値 $\ddot{x}(t)$ の結合分布情報 $P(x, \dot{x}, \ddot{x})$ を用いて以下のように表される[6]。

$$p(x) = \frac{\int_{-\infty}^0 |\dot{x}| P(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x}}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 |\dot{x}| P(x, 0, \ddot{x}) d\ddot{x} dx} \quad (1)$$

ここで、平均0のガウス過程の場合、 $P(x, \dot{x}, \ddot{x})$ は以下のように表すことができる。

$$P(x, \dot{x}, \ddot{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{m_0 m_2 m_4 - m_2^3}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{\dot{x}^2}{m_2} + \left(\frac{m_4 x^2 + 2m_2 x \ddot{x} + m_0 \ddot{x}^2}{m_0 m_4 - m_2^2} \right) \right\} \right] \quad (2)$$

ただし、 m_n は角周波数 ω に関するパワースペクトル密度関数 $S_x(\omega)$ の n 次モーメントであり、以

下のように定義されている。

$$m_n = \int_0^{\infty} \omega^n S_x(\omega) d\omega \quad (3)$$

式(2)を式(1)に代入し、分散1に正規化すると、以下のように表される。

$$p_G(x; \varepsilon_0) = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_0^2} + \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} x e^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot \Phi \left(-x \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0} \right) \quad (4)$$

ただし、

$$\Phi(*) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_*^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \quad (5)$$

ここで、第2引数 ε_0 は

$$\varepsilon_0 = \sqrt{\frac{m_0 m_4 - m_2^2}{m_0 m_4}} \quad (6)$$

と定義されており、以後、帯域パラメータと呼ぶ。

3. 重み関数の線形結合モデル

3.1 重み関数の導出

次に、式(4)を

$$p_G(x; \varepsilon_0) = \varepsilon_0 P \left(\frac{x}{\varepsilon_0} \right) + \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} \cdot \Phi \left(-x \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0} \right) p_N(x) \quad (7)$$

と書きかえる。ただし、

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (8)$$

$$p_N(x) = x e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (9)$$

このとき、 $P(x)$ 、 $p_N(x)$ に対する重み関数をそれぞれ $w_1(P(x); \varepsilon_0)$ 、 $w_2(p_N(x); \varepsilon_0)$ とし、

$$\begin{cases} w_1(P(x); \varepsilon_0) = \varepsilon_0 P \left(\frac{x}{\varepsilon_0} \right) \\ w_2(p_N(x); \varepsilon_0) = \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} \Phi \left(-x \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0} \right) \cdot p_N(x) \\ \varepsilon_0 \in (0, 1), x \in (-\infty, \infty) \end{cases}$$

と定義すれば、式(4)は

$$p_G(x; \varepsilon_0) = w_1(P(x); \varepsilon_0) + w_2(p_N(x); \varepsilon_0) \quad (10)$$

と表すことができる。式(10)は、ガウス過程のピーク値分布が2つの重み関数の線形結合によってモデル化できることを表している。本論文では、これを重み関数の線形結合モデルと呼ぶ。

3.2 重み関数の性質

提案モデルでは、確率過程のピーク値分布は帯域パラメータ ε_0 によって $P(x)$ と $p_N(x)$ に対する重みが調節されていると考えられる。

特に $\varepsilon_0 \rightarrow 0$ (狭帯域過程) では

$$\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} p_G(x; \varepsilon_0) = \begin{cases} p_N(x) & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad (11)$$

となる。これは、 $p_N(x)$ に対する重みが 1, $P(x)$ に対する重みが 0 となっていることを示している。式(11)は、 $p_N(x)$ が狭帯域過程におけるピーク値分布であることと表しており、 $x < 0$ には、ピーク値が存在しないことも示している。

また $\varepsilon_0 \rightarrow 1$ の場合は、

$$\lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 1} p_G(x; \varepsilon_0) = P(x) \quad (12)$$

となって、振幅確率密度関数(ガウス分布)と一致する。これは、 $p_N(x)$ に対する重みが 0, $P(x)$ に対する重みが 1 となっていることを表している。

4. 非ガウス過程におけるピーク値分布評価法

4.1 重み関数の線形結合モデルの適用

ここでは、新しく提案した重み関数の線形結合モデルを非ガウス過程に適用することを考える。 $P(x)$ と $p_N(x)$ は、それぞれガウス過程における「振幅確率密度分布」と「狭帯域過程のピーク値分布」の評価式であるが、これらは、非ガウス過程における評価式も既に導出されている。

非ガウス過程では、振幅確率密度分布は、Hermite 展開により

$$\bar{P}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \sum_{n=0}^{\infty} A(n, 0) H_n(x) \quad (13)$$

と表すことができ、また、狭帯域過程のピーク値分布は

$$\bar{p}_N(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{F_1(x)}{F_0(0)} \quad (14)$$

と表される[4]。ただし

$$\begin{aligned} F_k(x) &= \sum_{m=2}^{\infty} H_{m-2}(0) \sum_{n=0}^{\infty} A(n, m) H_{n+k}(x) \\ &+ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A(n, 1) H_{n+k}(x) \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} A(n, 0) H_{n+k}(x) \end{aligned} \quad (15)$$

なお、 $A(n, m)$ は展開係数、 $H_n(x)$ は Hermite 多項式を表している。

したがって、非ガウス過程 ($\bar{P}(x)$ と $\bar{p}_N(x)$) に対し、重み関数の線形モデルを用いると、ピーク値分布は以下のように表すことができる。

$$p_W(x; \varepsilon_0) = w_1(\bar{P}(x); \varepsilon_0) + w_2(\bar{p}_N(x); \varepsilon_0) \quad (16)$$

すなわち、帯域情報に応じて ε_0 が決定され、 $\bar{P}(x)$, $\bar{p}_N(x)$ に対する重みが調節される。本手法はガウス過程における確率分布モデルを非ガウス過程に適用するという新しい試みである。

4.2 ピーク値分布評価式の導出

式(16)に式(13),(14)を代入すると

$$\begin{aligned} p_W(x; \varepsilon_0) &= \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} A(n, 0) H_n\left(\frac{x}{\varepsilon_0}\right) \\ &+ \sqrt{1 - \varepsilon_0^2} \Phi\left(-x \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_0^2}}{\varepsilon_0}\right) e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{F_1(x)}{F_0(0)} \end{aligned} \quad (17)$$

となって、非ガウス過程における新たなピーク値分布評価式が導出される。

また、文献[7]では、非ガウス過程における帯域パラメータを

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{N_1}{M_1}\right)^2} \quad (18)$$

と定義している。ただし、 N_1 は非ガウス過程におけるゼロ・クロッシング[4]、 M_1 はピーク値総数[7]であり、それぞれ以下のように表される。

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} F_0(0) \quad (19)$$

$$M_1 =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} H_{m-2}(0) \sum_{n=0}^{\infty} B(n, m) H_n(0) \right. \\ &+ \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} B(n, 1) H_n(0) \\ &+ \left. \sum_{n=0}^{\infty} B(n, 0) H_n(0) \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし $B(n, m)$ は展開係数を表している。

この ε_1 を式(17)に用いると、以下のように表される。

$$\begin{aligned} p_W(x; \varepsilon_1) &= \\ &= \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2/\varepsilon_1^2} \sum_{n=0}^{\infty} A(n, 0) H_n\left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right) \\ &+ \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} \Phi\left(-x \frac{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2}}{\varepsilon_1}\right) e^{-\frac{1}{2}x^2} \frac{F_1(x)}{F_0(0)} \end{aligned} \quad (21)$$

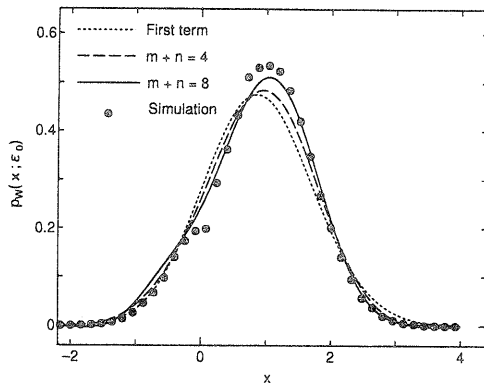


Fig. 1 Comparison between theoretical curves and experimental values in approximation of peak values distribution ($p_W(x; \varepsilon_0)$ cases).

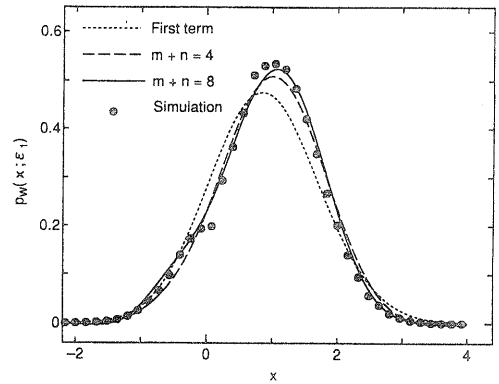


Fig. 2 Comparison between theoretical curves and experimental values in approximation of peak values distribution ($p_W(x; \varepsilon_1)$ cases).

5. 計算機シミュレーション

ここでは、計算機シミュレーションによって理論の妥当性を確認する。シミュレーションで用いる非ガウス過程の不規則信号は、三角級数モデル [2] によって発生させたガウス過程の信号に対し、非線形変換を施すことによって生成した信号である (文献 [7] のシミュレーション信号 C)。 ε_0 と ε_1 の値は、それぞれ 0.70, 0.67 である。Fig. 1 に式 (17) による理論曲線と実験値を比較した結果を示す。また、Fig. 2 に式 (21) による理論曲線と実験値を比較した結果を示す。なお、各理論曲線の初項は、ガウス過程のピーク値分布評価式 ((4) 式) であることに注意する必要がある。Fig. 1 と Fig. 2 より展開係数の次数を増やすにつれて、徐々に実験値と理論値が近づいていることがわかる。したがって、提案手法の有効性が実験的に確認できる。

6. まとめ

本論文では、ガウス過程のピーク値分布評価式に基づいて 2 つ重み関数を導出し、これらの線形結合による新たな確率分布モデルを提案した。更に、提案モデルを非ガウス過程のピーク値分布評価に適用し、新たなピーク値分布評価式を導出した。計算機シミュレーションでは、良好な結果が得られ、非ガウス過程のピーク値分布における提案手法の有効性が確認できた。

参考文献

[1] 小倉久直: 物理・工学のための確率過程論, コロナ社, 東京都, (1978).

[2] 星谷勝: “確率論手法による構造解析,” 鹿島出版会, 東京都, (1973).

[3] A.A.Gusev: Peak factors of Mexican accelerograms: Evidence of a non-Gaussian amplitude distribution, *J Geophys Res*, vol.101, no.B9, pp.20083-20090, (1996).

[4] 南原英生, 西村正文, 太田光雄: 任意不規則騒音・振動波形のピーク値分布に関する一評価理論と実験, *音響学会誌*, vol.37, no.3, pp.116-122, (1981).

[5] 南原英生, 西村正文, 太田光雄: 正領域内確率変動波の交差・ピーク値に関する簡易信号処理法と環境騒音・振動への適用, *電気学会論文誌*, vol.109-C, no.8, pp.601-606, (1989).

[6] D.E.Cartwright and M.S.Longuet-Higgins: The statistical distribution of the maxima of a random function, *Proc.Soc*, vol.A237, no.212, pp.212-232, (1956).

[7] 中本昌由, 南原英生, 太田光雄: レベル交差情報を用いた広帯域非ガウス形不規則信号のピーク値分布評価法, *電子情報通信学会論文誌 (A)*, Vol.J82-A, No.3, pp.471-481, (1999).

[8] 中本昌由, 荒木勇一朗, 南原英生, 鎌元孝夫: 広帯域非ガウス性不規則信号のピーク値分布に関する簡易評価理論, *情報処理学会論文誌 (投稿中)*.