数理モデル化と問題解決　34－9
（２００１．５．１１）

GA による離散係数のグループ分けに基づく誤差フィードバック回路の設計法

中本　昌由 [†]　雛元　孝夫 [††]

[†] 広島大学大学院　[††] 広島大学工学部

本論文では，誤差 FB 回路を低コストで実現するため，係数を特定の要素数のグループに分け，グループ内の係数の絶対値が同一となるような誤差 FB 回路の設計法が示されている．そして，係数がグループ分けされた条件下で回路の設計・評価を繰り返し，その中から遺伝的アルゴリズム (GA) によって最適な回路を探索している．数値実験では，グループの要素数 4 として回路設計を行っており，良好な結果が得られている．また，より低コストで誤差 FB 回路を設計するため，誤差 FB 係数を離散値で指定した場合についても検討している．

Design of Error Feedback Network Based on Groups Forming of Discrete Valued Coefficients by Genetic Algorithm

Masayoshi NAKAMOTO[†] and Takao HINAMOTO[††]

[†]Graduate School of Engineering, Hiroshima University
[††]Faculty of Engineering, Hiroshima University

In this paper, we form groups of error feedback (FB) coefficients and design error FB network in which coefficients belonging in that group have the same absolute values. And using genetic algorithm (GA) we find the optimal network by repeating error FB network design and evaluation. Numerical example shows good design result when each group has 4 elements. Furthermore we also consider our proposed technique in the case of discrete error FB coefficients.

1.　はじめに

固定小数点演算のディジタルフィルタをハードウェア上で実現する際には，フィルタの有限語長に起因した様々な特性劣化が生じる．積和演算の丸め (量子化) によって発生する誤差もその一つであり，この誤差信号はフィルタ内部を巡回してフィルタ出力で雑音となって現われる．この雑音の低減化技法として，フィルタの量子化器に誤差フィードバック（FB）回路を組み込んで雑音分散を最小化する方法が 1 次元および 2 次元の巡回形ディジタルフィルタについて提案されている [1],[2].

ただし，もともとディジタルフィルタを固定小数点で実現する理由は，コストを低く抑えるためであるから，誤差 FB 回路に大きなコストをかけることはできない．よって，低コストでの実現が誤差 FB 回路設計の重要な課題である．このような研究背景から，誤差 FB 回路の設計問題は，最適な誤差 FB 係数の設計法だけでなく，制約条件の付加によるコスト削減についても検討されている．

例えば，文献 [2] では対称・奇対称といった制約を用いて誤差 FB 回路を設計しており，この制約条件によって乗算回数を無制約の場合の約半分に減じている．また，文献 [4] では，対称・奇対称といった決まった形の係数のペアリング (制約条件) ではなく，実現可能な全ペアリングの中から最も望ましい係数の制約条件の決定法が示されており，無制約の場合の約半分のパラメータ数での回路設計法が示されている．

本論文では，係数のペアリングに基づく誤差 FB 回路の設計法を拡張し，誤差 FB 係数を特定の要素数のいくつかのグループに分けて，グループ内の係数の絶対値を同一にすることによって誤差 FB 回路の実現コストの削減を図る．ここでは,「グループの分け方」が「探索点」となり,「グループ分けされた係数をもつ誤差 FB 回路」が「解」となる．すなわち，グループ分けされた（いくつかの係数値の絶対値が同じとなる）誤差 FB 回路を設計して評価することが「解の探索」に相当する．最適な係数のグループの分け方は，大域的探索に優れ，かつ様々な問題に容易に応用できるという特長をもつ遺伝的アルゴリズム [3](以下，GA と略す) によって探索している．これらは，Lagrange の未定乗数法によって連続係数値で設計されるが，特定のビット数で指定して探索を行う方法についても検討している．

2. 問題の定式化

2.1 フィルタ出力における雑音利得

2次元巡回形ディジタルフィルタの誤差FB構成について簡単に説明する．ここでは，文献[2]より得られた結果のみを用いているので，詳細は，文献[2]を参照されたい．

まず，(M_1, M_2) 次の2次元誤差FB回路がフィルタの量子化器に組み込まれた場合を考える．

誤差信号の自己相関係数 q_{rs} を要素にもつ行列を

$$\boldsymbol{R}_i = \begin{bmatrix} q_{0i} & q_{-1,i} & \cdots & q_{-M_1,i} \\ q_{1i} & q_{0i} & \cdots & q_{-M_1+1,i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{M_1,i} & q_{M_1-1,i} & \cdots & q_{0i} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \cdots M_2) \tag{1}$$

とし，自己相関行列 $\boldsymbol{R}$ を

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{R}_0 & \boldsymbol{R}_{-1} & \cdots & \boldsymbol{R}_{-M_2} \\ \boldsymbol{R}_1 & \boldsymbol{R}_0 & \cdots & \boldsymbol{R}_{-M_2+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{R}_{M_2} & \boldsymbol{R}_{M_2-1} & \cdots & \boldsymbol{R}_0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

とおく．ここで，$\boldsymbol{R}$ は正定対称行列であることが知られている．

さらに，誤差FB係数 β_{rs} を要素にもつベクトルを

$$\boldsymbol{w}_i = (\beta_{0i},\ \beta_{1i},\ \cdots\ \beta_{M_1 i})^T \quad (i = 1, 2, \cdots M_2) \tag{3}$$

として，誤差FB係数ベクトル $\boldsymbol{w}$ を

$$\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{w}_0^T,\ \boldsymbol{w}_1^T,\ \cdots\ \boldsymbol{w}_{M_2}^T) \tag{4}$$

とおく．ただし，$\boldsymbol{w}$ の第1要素は1とする．

このとき，フィルタ出力における正規化雑音分散 V は，$\boldsymbol{w}$ に関する2次形式で表される．

$$V = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{w} \tag{5}$$

誤差FB回路の設計とは，フィルタ出力における雑音分散 V を最小にするような誤差FB係数 $\beta_{rs}(r = 0, 1, \cdots M_1;\ s = 0, 1, \cdots M_2)$ を決定することである．

2.2 係数のグループ分け

誤差FB回路の設計において，文献[2]では実現コストの削減のため，4分対称

$$\beta_{rs} = \beta_{r, M_2-s} = \beta_{M_1-r, s} \tag{6}$$

または4分奇対称

$$\beta_{rs} = -\beta_{r, M_2-s} = -\beta_{M_1-r, s} \tag{7}$$

の設計法を用いており，このとき，無制約の場合と比較してパラメータ数を約4分の1に減らすことができる．例えば $(M_1, M_2) = (3, 3)$ とすると，4分対称条件では $\beta_{00} = \beta_{03} = \beta_{30} = \beta_{33}$ なる制約となり，4つの係数 $\beta_{00}, \beta_{03}, \beta_{30}, \beta_{33}$ が同一グループに所属していると考えることができる．

本論文では，このような定形の係数の制約（グループ分け）ではなく，実現可能な全グループ分けから最適な（最も雑音分散を小さくする）ものを探索する．言いかえると，あるグループ分けに対して，その条件下で誤差FB回路を設計し，雑音分散を指標としてその回路の評価を行う．これを1回の試行として回路の設計と評価を繰り返し，評価値が高い回路を探索アルゴリズムによって見つける．この問題は，次のような「係数のグループ分け問題」として定式化できる．

[係数のグループ分け問題]

N 個の係数から L 個を1グループとして K 個のグループをつくり，グループの分け方に対して評価値が与えられる組み合わせ最適化問題．

本論文では，最初に N を L の倍数(すなわち，$K = N/L$) として以下の議論を進める．

以下では N 個の係数を $x_1, x_2, \cdots, x_N$ と記述する．

なお，グループ分けの組み合わせ総数は

$$\Phi(N) = 2^{(L-1)K} \cdot \frac{\begin{pmatrix} N \\ L \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} N-L \\ L \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} L \\ L \end{pmatrix}}{K!} \tag{8}$$

である．ただし，

$$\begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix} = \frac{N!}{k!(N-k)!} \tag{9}$$

$$k! = k \cdot (k-1) \cdots 1 \tag{10}$$

3. 誤差FB回路の設計

ここでは，係数がグループ分けされた条件下での誤差FB回路の設計法について述べる．

[補題][2]

誤差FB係数が N 個の場合を考えると $\boldsymbol{w}$ のサイズは $N \times 1$，$\boldsymbol{R}$ のサイズは $N \times N$ である．また，$\boldsymbol{C}$ を $N \times ((L-1)K+1)$ 行列，$\boldsymbol{p}$ は $((L-1)K+1) \times 1$ ベクトルとする．このとき，Lagrange の未定乗数法によると，式(5)を制約条件

$$\boldsymbol{w}^T \boldsymbol{C} = \boldsymbol{p}^T \tag{11}$$

のもとで最小化するベクトル $\boldsymbol{w}^*$ は

$$\boldsymbol{w}^* = \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{C} (\boldsymbol{C}^T \boldsymbol{R}^{-1} \boldsymbol{C})^{-1} \boldsymbol{p} \tag{12}$$

を満たす．

ここでは $\boldsymbol{C}$ を制約行列と呼び，$\boldsymbol{p} = (1, 0, \cdots, 0)^T$ とする．与えれた係数のグループ分け情報に基づ

いて $\boldsymbol{C}$ を生成すれば，式 (12) から誤差 FB 係数が設計される．

次に，制約行列 $\boldsymbol{C}$ の生成アルゴリズムを以下に示す．

$N\times((L-1)K+1)$ の制約行列 $\boldsymbol{C}$ の (i,j) 要素を c_{ij} とおく．ただし，初期状態では $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$ とする．

STEP 1: $j=1$ として $x_1=1$ を満たすために，$c_{11}=1$ とおく．$j=2$ として，**STEP 2** へ．

STEP 2: N 個の係数の中からまだ選択されていない最も若い番号の係数 x_i を選択し，$c_{ij}=c_{i,j+1}=\cdots=c_{i,j+L-2}=1$ とおく．

STEP 3: N 個の係数の中から x_i と同一グループに所属する，まだ選択されていない係数 $x_{i'}$ を選択し，x_i と同符号ならば $c_{i'j}=-1$ とおき，異符号ならば $c_{i'j}=1$ とおく．

STEP 4: x_i と同じグループに所属する係数がすべて選択されていれば，**STEP 5** へ．そうでなければ，$j\leftarrow j+1$ として **STEP 3** へ．

STEP 5: すべての係数がグループ分けされていれば，終了する．そうでなければ，$j\leftarrow j+1$ として，**STEP 2** へ．

4. 遺伝的アルゴリズム

遺伝的アルゴリズム（GA）は，生物の進化モデルを模倣した最適値の確率探索アルゴリズムであり，さまざまな最適化問題に対して応用されている．本論文で用いる GA は，選択，交叉，突然変異オペレーションからなる単純 GA である．

4.1 遺伝子形へのコーディング方法

遺伝子形の設計は，GA の探索効率に大きく影響する．したがって，実現不可能な遺伝子 (致死遺伝子) を発生させることなく，効率的に遺伝子形を設計する必要がある．

以下に係数のグループ分け情報を遺伝子形へ変換する手順を次に示す．

STEP 1: N 個の係数 $x_1,\ x_2,\ \cdots\ x_N$ に対して，相対番号 $x_1^{(1)},\ x_2^{(2)},\ \cdots\ x_N^{(N)}$ を付ける．

STEP 2: 相対番号「1」の係数をとり除き，残った係数に対して再番号付けを行う．

STEP 3: **STEP 2** で選ばれた係数と同じグループに所属する，まだ選択されていない最も若い相対番号の係数 (相対番号 k) を選択し，同符号ならば遺伝子「k」，異符号ならば遺伝子「$-k$」とする．

STEP 4: **STEP 3** を $L-1$ 回 (すなわち，1 つのグループが形成されるまで) 繰り返す．

STEP 5: 選択された $L-1$ 個の係数を取り除き，残った係数に対して再番号付けを行う．

STEP 6: すべての係数がグループ分けされているならば，**STEP 7** へ．そうでなければ，**STEP 2** へ．

STEP 7: 得られた遺伝子を得られた順に左から並べて「遺伝子形」を生成する．

4.2 実現可能な遺伝子形

4.1 で得られた遺伝子形において，各遺伝子は次のような値をとる．遺伝子形は，右から 1 番目から $L-1$ 番目の遺伝子，L 番目から $2(L-1)$ 番目の遺伝子，$\cdots(K-1)(L-1)+1$ 番目から $K(L-1)$ 番目の遺伝子によってそれぞれ 1 つの集合を形成しており，これらをそれぞれ $\boldsymbol{S}_1,\boldsymbol{S}_2,\cdots,\boldsymbol{S}_K$ とする．ここで，集合 $\boldsymbol{S}_k$ に属する遺伝子を

$$\boldsymbol{S}_k=\{g_1^{(k)},\ g_2^{(k)},\ \cdots,\ g_{L-1}^{(k)}\} \tag{13}$$

とするとき，

$$1\le|g_1^{(k)}|<|g_2^{(k)}|<\cdots<|g_{L-1}^{(k)}|\le(Lk-1)$$

を満たす．よって $\boldsymbol{S}_1$ に属する遺伝子は $g_1^{(1)}=\pm1,\ g_2^{(1)}=\pm2,\ \cdots,\ g_{L-1}^{(1)}=\pm(L-1)$ となる．

4.3 各オペレータの設定

致死遺伝子の発生を抑えるため，交叉と突然変異にはいくつかの制約が必要となる．

初期集団の生成: N_P 個体をランダムに発生させる．

選択: 個体 I_k $(k=1,2,\cdots,N_P)$ の選択確率 $P_s(I_k)$ は

$$P_s(I_k)=\frac{F(I_k)}{\displaystyle\sum_{l=1}^{N_P}F(I_l)} \tag{14}$$

と計算する．ただし，$F(I_k)$ は I_k の適応度である．このような選択方法をルーレット選択という．

交叉: 2 つの個体において，右から c_p 番目の遺伝子から一番右に位置する遺伝子を確率 P_{cross} で交換する．ただし，$c_p=(L-1),\ 2(L-1),\ \cdots\ K(L-1)$ であり，c_p を交叉ポイントと呼ぶ．なお，P_{cross} を交叉率と呼ぶ．

突然変異: 個体の遺伝子を確率 P_{mut} で他の実現可能な遺伝子 (4.2参照) へ変異させる．ここで，変異される遺伝子は，等確率で決定される．なお，P_{mut} を突然変異率と呼ぶ．

終了判定: 本論文では，200 世代まで到達した場合を終了条件として実験を行う．なお，すべての個体が一致した場合は無条件に終了とする．

4.4 適応度の計算

誤差 FB 回路の設計と GA による係数のグループ分け問題の解法は，適応度の計算によって結び付けられている．適応度計算ルーチンでは，グループ分け情報は制約行列 $\boldsymbol{C}$ で表現されている．次の **STEP 1** ～ **6** により，係数のグループ分け情報 (個体に相当する) に適応度が与えられる．

Table 1 Design results in ref.2.

	無制約	4 分対称	4 分奇対称
V	0.2457	1.2766	0.9881

STEP 1: GA ルーチンから係数のグループ分け情報を得る．

STEP 2: 3 章の手順に従って，グループ分け情報から制約行列 $\boldsymbol{C}$ を生成する．

STEP 3: 制約行列 $\boldsymbol{C}$ に基づいて与えれた制約条件下での最適誤差 FB 係数を式 (12) より設計する．(離散係数の場合は，この後，特定のビット数 b で丸める．)

STEP 4: 設計された誤差 FB 係数を式 (5) に代入して，雑音分散 V を計算する．

STEP 5: 雑音分散 V を用いて，適応度

$$F = -V + V_{max} \tag{15}$$

を計算する．ただし，V_{max} は雑音分散の最大値である．

STEP 6: GA ルーチンへ適応度 F を返す．

以上の操作を必要な個体数だけ繰り返す．

5. 実験結果

文献 [4] で取り上げらた数値例（自己相関係数）を考える．

ここでは，誤差 FB 回路の次数を $(M_1, M_2) = (3,3)$ として設計を行った．この時，係数の数は 16 であるから，グループの分け総数は

$$\Phi(16) = 10762752000 \simeq 10^{10}$$

である．まず，文献 [2] に従って無制約の場合と 4 分対称・奇対称係数の雑音利得 V を計算した結果が Table 1 に示されている．

次に GA のパラメータを $N_P = 100$, $P_{cross} = 0.8$, $P_{mut} = 0.1$ とし，異なった初期集団で 5 回の試行を行った．なお，連続係数の場合が Table 2, 離散係数（3 ビット）の場合の設計結果が Table 3 に示されている．なお，従来法より良い結果が得られた場合，太字体としている．

離散係数の場合，最も雑音利得が小さい誤差 FB 回路（雑音利得 0.6720）の係数は，次のように設計された．

$$\begin{bmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & \beta_{02} & \beta_{03} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{20} & \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{30} & \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1.0000 & -1.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ -1.0000 & 0.5000 & 0.2500 & 0.2500 \\ 0.0000 & 0.2500 & 0.2500 & -0.5000 \\ 0.0000 & 0.5000 & -1.0000 & 0.5000 \end{bmatrix}$$

Table 2 Design results using proposed method (continuous valued coefficients).

	V	計算時間
1 回目	**0.7552**	97.99 [s]
2 回目	**0.6252**	98.04 [s]
3 回目	**0.6382**	98.31 [s]
4 回目	**0.6230**	97.82 [s]
5 回目	**0.8927**	97.82 [s]
平均値	0.70686	98.00 [s]

Table 3 Design results using proposed method (discrete valued coefficients).

	V	計算時間
1 回目	1.1050	99.19 [s]
2 回目	1.2766	99.14 [s]
3 回目	**0.8275**	99.14 [s]
4 回目	**0.6720**	98.43 [s]
5 回目	**0.6810**	98.86 [s]
平均値	0.9124	98.95 [s]

以上の結果から，無制約の場合の約 4 分の 1 のパラメータ数で従来の 4 分対称・奇対称係数よりも雑音利得が小さい誤差 FB 回路が設計できることが分かる．また，連続係数だけでなく，3 ビットの離散係数でも良好な結果が得られており，本設計法の有効性が実験的に確認できる．

今後は，3 次元誤差 FB 回路に対しても本手法を拡張してみたい．

参考文献

[1] T. I. Laakso and I. O. Hartimo, "Noise Reduction in Recursive Digital Filters Using High-order Error Feedback", IEEE Trans, Signal Processing, vol.40, no.5, pp.1096-1107, May 1992.

[2] T. Hinamoto, S. Karino, N. Kuroda and T. Kuma, "Error Spectrum Shaping in Two-Dimensional Recursive Digital Filters", IEEE Trans, Circuits Syst. , vol.46, no.10, pp.1203-1215, Oct. 1999.

[3] D. E. Goldberg, "Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning", Addison Wesley, 1989.

[4] 中本昌由，雛元孝夫, "GA による係数のペアリングに基づく誤差フィードバック回路の設計法", 情処学論：数理モデル化と応用, (掲載予定).