

2次元長方形セルラオートマトン上での最適時間一斉射撃アルゴリズムの設計と実装

秋口 俊輔[†]

前田 雅史[†]

梅尾 博司^{††}

概 要 — 2次元セル空間に対する一斉射撃アルゴリズムの設計例は、1次元アレイと比較して非常に少ない。2次元長方形アレイ上での一斉射撃アルゴリズムとして、Shinahr[1972]が28状態の最適時間アルゴリズムを設計している。これに対し、前田、道坂、梅尾[2002]らは、Shinahrのものとは異なる設計手法に基づき、14状態の最適時間アルゴリズムを設計した。本稿では前田、道坂、梅尾[2002]らのアルゴリズムをベースにさらに状態数を12に削減した最適時間アルゴリズムを提案する。ここで述べる最適時間アルゴリズムとは、サイズが $m \times n$ の長方形アレイに対して、 $m + n + \max(m, n) - 3$ ステップで動作するアルゴリズムである。

A Design of Time-optimum Firing Squad Synchronization Algorithm for Two-dimensional Rectangular-arrays and its 12-state Implementation

Shunsuke AKIGUCHI[†]

Masashi MAEDA[†]

Hiroshi UMEO^{††}

Abstract — The famous firing squad synchronization problem is stated as follows: Given a one-dimensional array of n identical cellular automata, including a "general" at the left end which is activated at time $t = 0$, we want to design the automata so that, at some future time, all the cells will simultaneously and, for the first time, enter a special "firing" state. The problem was originally proposed by J. Myhill in 1957 to synchronize all parts of a self-reproducing machine. In this paper, we develop a 12-state optimum-time synchronization algorithm on 2-D rectangular arrays. The algorithm can synchronize any $m \times n$ arrays in optimum $m + n + \max(m, n) - 3$ steps.

1 はじめに

1957年、Myhillにより一斉射撃問題(Firing Squad Synchronization Problem: FSSPと略す)が提唱されて以来、FSSPに関する研究はこれまでに数多くなされている。代表的な一斉射撃アルゴリズムとして、2次元セルラオートマトン(2-Dimensional Cellular Automata, 2次元CAと略す)上では、Shinahr[5], Szwedinski[6]のアルゴリズムが知られている。2次元アレイ上での一斉射撃問題は、 $t=0$ 時に与えられる初期信号(将軍状態と呼ばれる)の位置がセル空間上の左上隅の場合と、セル空間上の任意のセル上に配置される場合に大別される。前者に対しては、Shinahr[5]が28状態の最適時間アルゴリズムを設計し、また後者に対しては、Szwedinski[6]が25600状態の最適時間アルゴリズムを提案している。しかし、これらのアルゴリズムを実現するセルラオートマトンの内部状態数はそれぞれ28, 25600と比較的多い。一方、前田、道坂、梅尾[4]は、従来から知られているアルゴリズムとは違った設計手法に基づくアルゴリズムを用い、内部状態数を14に削減した2次元一斉射撃

アルゴリズムを提案した。しかし、将軍状態の右下斜め方向への伝播のために、ベースとして用いる12状態1次元一般化一斉射撃アルゴリズムに2つの内部状態を追加する必要があった。また、より少ない状態数での同期アルゴリズムの設計が可能かどうかは未知であった。

本稿では、2次元CA上においてより少ない内部状態数での同期アルゴリズムの設計を目的とし、サイズ $m \times n$ の長方形アレイ上で $m + n + \max(m, n) - 3$ ステップの最適時間で動作する12状態アルゴリズムを提案する。

2 2次元長方形アレイ上での一斉射撃問題

$m \times n$ 個の有限オートマトンを2次元整数格子状に配置したアレイを考える(図1)。オートマトンは境界を除き全て同一の構造を持つ。各オートマトンはセルと呼ばれる。全てのセルは同期して動作し、各セルの離散時刻 $t+1$ における状態は、時刻 $t(t \geq 0)$ における自分自身の状態と上下左右に隣接するセルの状態の計5つの状態により決定される。また境界上のセルは自身が端のセルであることを認識している。図1において m と n が等しくない場合を長方形CA、等しい場合を正方形CAと呼ぶ。 i 行 j 列に位置するセルを $C_{i-1, j-1}$ であらわす。本稿での一斉射撃問題の場合、時刻 $t=0$ における初期計算状況において、左上端のセルを将軍としたものである。

[†]大阪電気通信大学大学院 工学研究科 情報工学専攻
Osaka Electro-Communication Univ., Graduate School of Engineering

^{††}大阪電気通信大学大学院 工学研究科 情報工学専攻
大阪電気通信大学 総合情報学部 情報工学科
Osaka Electro-Communication Univ., Graduate School of Engineering
Faculty of Information Science and Technolog

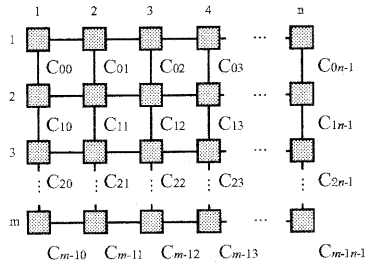


図 1: 2次元セルラオートマトン

一斉射撃問題はセルラオートマトンの同期に関する問題であり、局所的な通信のみが可能なモデルにおいて、モデル全体を制御することが可能なアルゴリズムの存在とその証明のための問題の一つである。時刻 $t = 0$ において、あるセルから同期を開始する信号を発生し、未来のある時刻 $t = \alpha$ において全てのセルが同一の状態に移るように遷移規則を決定する。ここで、初期状態において同期を開始する信号を発生するセルを将軍、それ以外のセルを兵士と呼び区別する。また最終的な同一状態を射撃状態と呼ぶ。将軍より発信された信号が到達する前のセルを静止状態と呼び、これも区別する。この問題は、さまざまな形状のセルラオートマトン上で議論されているが、本稿ではその中でもセルを直線的に配置した1次元CAと2次元整数格子点状に配置した2次元CAを取り扱う。また一斉射撃問題では通常、初期状態における将軍の位置は1次元CAでは左端、2次元CAでは左上端であるが、この位置を任意に変更できるものを一般化一斉射撃アルゴリズムと呼ぶ。

サイズ $m \times n$ の2次元セル空間で、初期状態において C_{00} を将軍セルとする一斉射撃アルゴリズムに関して、次のことが知られている。

[定理 1] ^[5] $m \times n$ 個のセルからなる2次元空間を $m + n + \max(m, n) - 3$ ステップの最適時間で一斉射撃に導く28状態一斉射撃アルゴリズムが存在する。

[定理 2] ^[3] $m \times n$ 個のセルからなる2次元空間を $2(m + n) - 4$ ステップで一斉射撃に導く6状態一斉射撃アルゴリズムが存在する。

3 2次元長方形アレイ上での最適時間一斉射撃アルゴリズム

本稿では、サイズ $m \times n$ の2次元長方形アレイを $m + n + \max(m, n) - 3$ ステップの最適時間で一斉射撃に導く12状態2次元CAを設計する。1次元CA上で最適時間で動作する一般化一斉射撃アルゴリズムの計算状況を2次元CA上に効率良く埋め込むことにより、2次元CA上での最適時間アルゴリズムを得る。

1次元CA上での一般化一斉射撃問題については、Moore and Langdon[2], Szwerinski[6], Varshavsky, Marakhovsky and Peschansky[9], Settle and Simon[7]らにより最適時間アルゴリズムが提案されている。Moore and Langdon[2] は17状態アルゴリズムを、Szwerinski[6] 並びに Varshavsky, Marakhovsky and

Peschansky[9] はそれぞれ10状態のアルゴリズム、Settle and Simon[7] は9状態のアルゴリズムを提案している。これらについて、次の定理にまとめる。

[定理 3] ^{[2][6][7][9]} 図2に示した $m + n - 1$ 個のセルからなる1次元セル空間を $m + n + \max(m, n) - 3$ ステップの最適時間で一斉射撃する1次元セルラオートマトンが存在する。但し、 C_0 を将軍セルとする。

サイズ $m \times n$ の2次元CA M を考える。 $t = 0$ 時における M の将軍セルを C_{00} とする。説明の便宜上、 $m \leq n$ とするがこれにより一般性は失われることはない。 M 上の $m \times n$ 個のセルを、 $m + n - 1$ 個のグループ g_k に分割する。但し、 $-(m - 1) \leq k \leq n - 1$ (図2参照)。 g_k は次式により定義される。

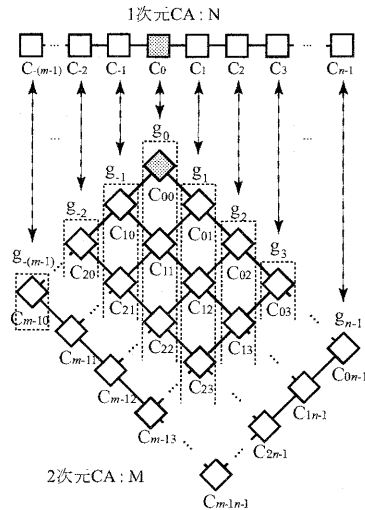


図 2: 2次元CAのグループ化と1次元CAとの対応

$$\begin{aligned}
 g_k &= \{C_{ij} \mid j - i = k\}, \quad -(m - 1) \leq k \leq n - 1. \quad \text{すなわち,} \\
 g_0 &= \{C_{00}, C_{11}, \dots, C_{m-1, m-1}\}, \\
 g_{-1} &= \{C_{10}, C_{21}, \dots, C_{m-1, m-2}\}, \\
 g_1 &= \{C_{01}, C_{02}, \dots, C_{m-1, m}\}, \\
 &\vdots \\
 g_{-(m-1)} &= \{C_{m-1, 0}\}, \\
 &\vdots \\
 g_{n-1} &= \{C_{0, n-1}\}.
 \end{aligned}$$

$m > n$ の場合も同様に定義される。

M に対して、 $m + n - 1$ 個のセルより構成される1次元CA N を考える。説明の都合上、 N 上のセルを左端から順に $C_{-(m-1)}, C_{-(m-2)}, \dots, C_{-1}, C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$ で表す。 $t = 0$ 時 C_0 に将軍セルを配置する。任意の整数 i , $-(m - 1) \leq i \leq n - 1$, に対して、 g_i は C_i の動作を模倣するように M の遷移関数を作成する。図2は g_i と C_i の対応を示す。

次に N 上の計算状況を M のセル空間上に埋め込む手法を示す。以下の説明では理解を容易にするため、具体

例として $m = 7, n = 9$ とした時の埋め込み手法を示す。図 3 は $m = 7, n = 9$ の場合における N 上の $t = 0$ 時より一斉射撃に至るまでの計算状況である。ここで、 S_i^t は時刻 t におけるセル C_i の状態を意味する。 S_0^0 は将軍状態、 $S_i^{22} (-6 \leq i \leq 8)$ は射撃状態である。

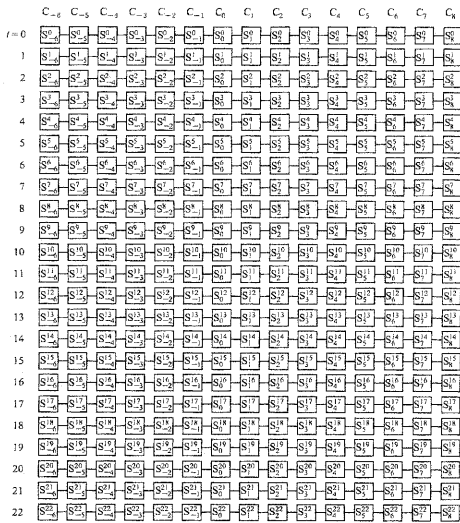


図 3: C_0 に将軍を配置した最適時間一般化一斉射撃アルゴリズムの計算状況 ($m = 7, n = 9$)

図 4 は N の計算状況をアレイ上で生成する過程を示している。静止状態は省略されている。アレイの左上端から右下斜め方向にステップ数の増加とともに波が拡大し、 N 上の有効な計算状況が生成されている。

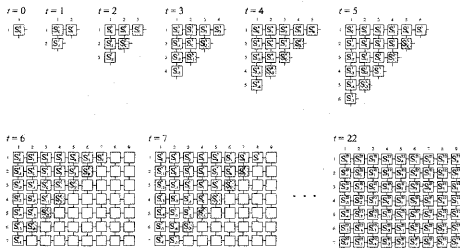


図 4: 1次元一般化一斉射撃アルゴリズムの計算状況の2次元アレイへの埋め込み

各時刻において波の先頭部分に位置する状態に注目する。ここでは例えば $t = 2$ 時は S_0^2 、 $t = 3$ 時は S_1^3, S_{-1}^3 、 $t = 4$ 時は S_2^4, S_0^4, S_{-2}^4 である。図 4 ではこれらの状態にハッチングが施されている。これらの状態の遷移に必要な情報は、各セルの上下左右に位置するセルからの局所情報として1ステップでは入手できない。なぜなら、例えば S_0^2 の計算に S_{-1}^1, S_0^1, S_1^1 の3つの状態を必要とし、 $t = 1$ 時 C_{11} は C_{00} に存在する S_0^0 を入手できないからである。同様な理由で波の先頭部分に位置する状態

は1ステップでは計算不可能である。ハッチングを施した上記の状態が決められた時刻に生成可能であれば、それ以外の状態は、左及び上に位置するセルの局所情報から容易に1ステップで計算可能である。したがって図 4 に示した計算状況の生成は仮に波の先頭部分に位置する状態がそれぞれの時刻に計算可能であると仮定したうえのものである。このような波の先頭部分に関する問題は、将軍セルからの同期信号が未到達なセルが存在する間、すなわち時刻 $t = m + n - 2$ の間において発生する。後に N 上の一斉射撃アルゴリズムにある特定の性質を持たせることによって、図 4 に示した計算状況の生成が可能であることを示す。

図 5(a) は1次元 CA 上における一般化一斉射撃アルゴリズムの時間・空間図式である。 $t = 0$ 時に、 C_0 に位置する将軍セルより左右の方向にスピード $1/1$ の信号が発せられ、両者は左右の両端で反射した後、同じスピードでそれぞれ右、左の方向に進み、セル C_{n-m} 上で出会う。上記の2つの信号に囲まれた部分を本稿では領域 A と呼ぶ(図 5(a))。ここではこの領域 A が形成されるまでの時間に注目する。その時刻は $t = m + n - 2$ であり、2次元 CA 上における波の先頭部分に関する問題の発生する時刻と同一であることが理解できる。つまり1次元 CA 上における領域 A 内での状態遷移が、前述の2次元 CA 上における波の先頭部分の問題に関係していると考えられる。

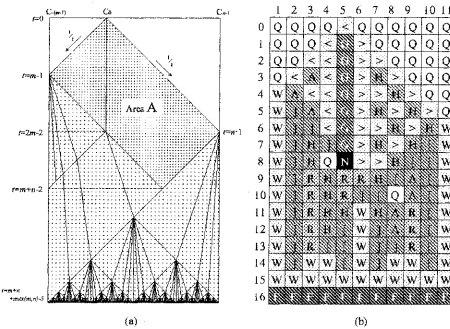


図 5: 最適時間一般化一斉射撃アルゴリズムの時間・空間図式 (a) と 12 状態セルオートマトンによる同アルゴリズムの実装 (b)

そこで本稿では、1次元 CA 上における領域 A 内での状態遷移において、自分自身の状態に関わらず、隣接する左右のセルの内部状態のみでの状態遷移が可能な 12 状態 1次元一般化一斉射撃アルゴリズムを設計した(図 5(b))。このような性質を持つアルゴリズムを、本稿では性質 S を有する一斉射撃アルゴリズムと呼ぶ。1次元 CA 上における一般化一斉射撃アルゴリズムとして、Moore and Langdon[2], Szwerninski[6], Varshavsky, Marakhovsky and Peschansky[9], Settle and Simon[7] が知られているが、性質 S を有し、尚且つ最適時間で動作するのは本稿で示す 12 状態アルゴリズムのみである。ここで以下の定理を得る。

[定理 4] $m + n - 1$ 個のセルからなる 1次元セル空間を $m + n + \max(m, n) - 3$ ステップの最適時間で一斉射

撃に導き、性質 S を有する 12 状態一般化一斉射撃アルゴリズムが存在する。ここで、 C_0 は $t=0$ 時における将軍の位置である。

このようなアルゴリズムをベースとして用いた場合、図 4 に示した計算状況の生成は可能である。具体例として $t=1$ 時における C_{00} と C_{11} の状態遷移について考える。 $t=1$ 時における C_{11} の状態を S_0^1 とした場合、 S_{-1}^1, S_0^1, S_1^1 と S_{-1}^1, S_0^1, S_1^1 は隣接セルの状態が同じである。ベースとして性質 S を有する 1 次元一般化一斉射撃アルゴリズムを用いた場合、 $t=2$ において C_{00} と C_{11} は同一の状態 S_0^2 に遷移することが可能となる。つまり波の先頭部分に位置するセルも上下左右に位置するセルを持つ局所情報を参照するだけで状態遷移が可能となる。よって本稿では上記のような性質 S を有する 12 状態 1 次元一般化一斉射撃アルゴリズムを効率的に埋め込み、2 次元 CA 上で最適時間で動作する一斉射撃アルゴリズムを 12 状態で実現した。以上のことにより以下の定理を得る。

[定理 5] $m \times n$ 個のセルからなる 2 次元空間を $m+n + \max(m, n) - 3$ ステップの最適時間で一斉射撃に導く 12 状態一斉射撃アルゴリズムが存在する。

図 6 に $m=7, n=9$ の場合における 2 次元最適時間一斉射撃アルゴリズムの動作状況を示す。

4 おわりに

サイズ $m \times n$ の 2 次元 CA 上において最適時間で動作する 12 状態の $m+n + \max(m, n) - 3$ ステップ一斉射撃アルゴリズムの設計と実装を行った。従来から知られている Shinar[5] のアルゴリズムと比較すると内部状態数は 28 から 12、前田、道坂、梅尾[4] のアルゴリズムと比較しても 14 から 12 へと減少した。

参考文献

- [1] 久岡, 前田, 藤原, 梅尾, "2 次元一般化一斉射撃アルゴリズムについて", 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, COMP200-96, pp.25-32, (2002).
- [2] F. R. Moore and G. G. Langdon, "A generalized firing squad problem", Information and Control, 12, pp. 210-220, (1968).
- [3] 前田, 梅尾, "2 次元セルオートマトン上での一斉射撃アルゴリズム", 情報処理学会アルゴリズム研究会, 第 81 回アルゴリズム研究会, 81-1, pp. 1-8, (2001).
- [4] 前田, 道坂, 梅尾, "2 次元一斉射撃アルゴリズムのための新しい設計手法", 電子情報通信学会 コンピューテーション研究会, COMP2001-97, pp.33-40, (2002).
- [5] I. Shinar, "Two- and three-dimensional firing squad synchronization problems", Information and Control, 24, pp. 163-180, (1974).
- [6] H. Szwedinski, "Time-optimal solution of the firing-squad-synchronization-problem for n-dimensional rectangles with the general at

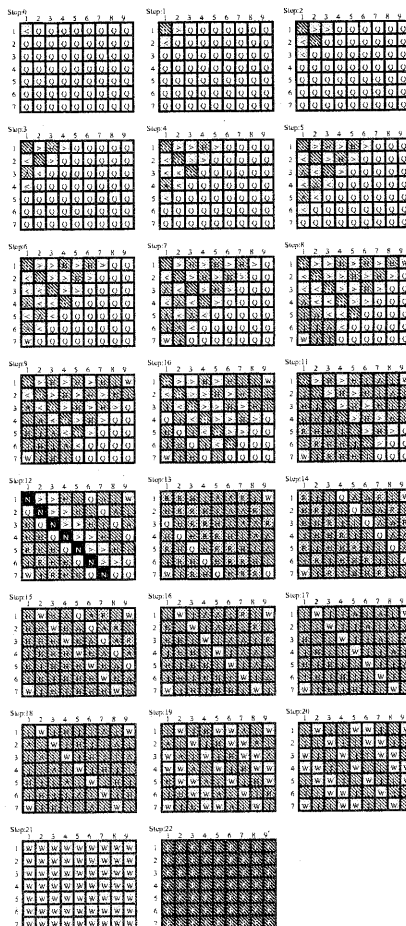


図 6: 12 状態 2 次元セルオートマトンによる最適時間一斉射撃アルゴリズムの計算状況 ($m=7, n=9$)

- an arbitrary position", Theoretical Computer Science, 19, pp. 305-320, (1982).
- [7] A. Settle and J. Simon, "Smaller solutions for the firing squad", Theoretical Computer Science, 276, pp. 83-109, (2002).
- [8] H. Umeo, M. Maeda, and N. Fujiwara, "An Efficient Mapping Scheme for Embedding Any One-Dimensional Firing Squad Synchronization Algorithm onto Two-Dimensional Arrays", Proc. of The 5th International Conference Cellular Automata for Research and Industry, pp. 69-81, (2002).
- [9] V. I. Varshavsky, V. B. Marakhovskiy and V. A. Peschansky, "Synchronization of Interacting Automata", Mathematical Systems Theory, Vol.4, No.3, pp. 212-230, (1969).