

複雑ネットワークの成長、摂動およびトポロジー

高田 智己、陳 昱、大橋 弘忠

本研究では、効率と耐性の間のトレードオフにより成長するネットワークモデルを研究した。このネットワークの成長メカニズムは、短い平均最短パス長と低い次数を持つノードへ新規ノードが次々と連結していくというものである。ここでは、ネットワークのトポロジーと、ランダムまたは狙って選んだネットワーク中のノードを次々と除去していくという摂動を与えたときのネットワークの耐性を求めた。結果として、このトレードオフ成長メカニズムが、次数 - 次数相関と次数分布において興味深い特性を持つネットワークを生成することが判った。耐性については、次数分布に起因する合理的な結果が得られた。

Growth, Perturbation and Topology of Complex Networks

Tomoki Takata, Chen Yu and Hirotsada Ohashi

In this study, we propose the network model which grows under a trade-off mechanism between efficiency and tolerance. In this model, a new node connects to the node which has a small mean shortest path and a low degree one after another. Here, we show topology of the network and its tolerance to the perturbation which removes a node, which is selected at random or targeted, one by one from the network. We found that the trade-off growth mechanism generates the network which has some interesting property which associated with the degree - degree correlation and the degree distribution. On the tolerance, we found reasonable results to be caused by that degree distribution.

1章 序論

近年、様々な複雑ネットワークの解析が進んでいる。これらの中には、一見全く関係の無い分野のネットワーク間で共通のトポロジーが共有されていることも多い。その一つとして、べき乗則が挙げられる。べき乗則は、古くは相転移における臨界指数と相関関数の関係、複雑系における自己組織化臨界状態、また最近では優先的結合を行いながら成長するネットワークの次数分布において見られることが知られている[1]。このように、べき乗則は臨界性と関連付けられて議論されてきた。一方、べき乗則を示す新たな枠組みとして、トレードオフによって最適化された系において見られることが判っている[2]。本研究ではこのトレードオフとべき乗則の関連にヒントを得て、これに成長を加味したネットワークモデルを考案した。このモデルのトレードオフは、ネットワークの効率を表す平均最短パス長、ネットワークの耐性を表す連結先の次数の間に働く。このトレードオフの下、新規ノードはネットワークから最適な既存ノードを選択し、エッジを繋いでいく。こうしてできたネットワークのトポロジーと、そのネットワークからランダムまたは狙ったノードを除去していったときの、ネットワークが示す耐性について、以下に報告する。

2章 モデル

本研究では平均最短パス長と連結先のノードの次数の間に働くトレードオフの下、ノードを次々と加えていくことによりネットワークを生成する。ここで、ネットワークを成長させるときに関与する平均最短パス長は、一般に用いられるネットワーク特性量の平均最短パス長ではなく、新規ノードを起点としたときの平均最短パス長 D_i とした。

今、 n 個のノードからなるネットワークに、 $n+1$ 個目のノードが加わろうとしているとする。このとき、新規ノードがどの既存ノードにエッジを連結すれば、新規ノードにとって、すべての既存のノードからの最短パス長の平均値が最小になるかを考える。ノード i を連結先の既存ノード、ノード j を新規ノードとする。すると、すべての既存のノードについて、

著者所属：

東京大学工学系研究科システム量子工学専攻大橋研究室

Ohashi Laboratory, Department of Quantum Engineering and Systems Science, University of Tokyo.

$$D_i = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n D_{kj}$$

が定義される。ここで D_{ij} は、既存ノード i を経由したときの、新規ノード j から既存ノード k への最短パス長である。この量は $d_i = D_i / D_{\max}$ のように規格化する。 D_{\max} は n 個のノードが直鎖状に並んでいるネットワークの一端に、新規ノード j が連結したときの量である。

トレードオフのもう一つの要素である次数は、連結先の既存ノードの次数 k_i である。次数も $k'_i = k_i / k_{\max}$ のように規格化する。ここで、既存のノードが取りうる最大次数 $k_{\max} = n - 1$ を用いている。

以上の二つの量を用いて、既存ノード $i = 1, \dots, n$ について次のように定義したエネルギーを計算する。

$$E_i = \lambda d_i + (1 - \lambda) k'_i \quad (1)$$

コントロールパラメータ λ は $0 \leq \lambda \leq 1$ であり、ネットワークが成長する際に d_i と k'_i の間の重みを調整する。

新規ノードの次数、すなわち既存ノードに連結させるエッジの本数 m は一定とする。 $m = 1$ の場合、新規ノードはエネルギー E_i が最小である既存ノードに連結する。 $m > 1$ のとき、新規ノードは E_i が小さい既存ノードから順にエッジを連結していく。

ネットワーク成長メカニズムを、ネットワークサイズが最大ノード数 N になるまで繰り返し実行していく。

3章 計算結果

以下の条件で計算を行った。

- ・ 最大ネットワークサイズ： $N = 1000$
- ・ 新規ノードの次数： $m = 1, m = 2, m = 4$
- ・ ネットワークの初期状態： m 個のノードからなる完全グラフ

トポロジーに関する計算結果は、 $m = 1$ の場合を除き、同様の計算を 10 回繰り返した平均である。 $m = 1$ の場合は複数回の計算で変化が無く、計算回数は 1 回とした。

まず、ネットワークのトポロジーを示す。なお、ここでの平均最短パス長は、2章で定義したものではなく、一般の平均最短パス長である。

λ の変化に対する平均最短パス長の変化を図 1 に、クラスタリング係数の変化を図 2 に示す。

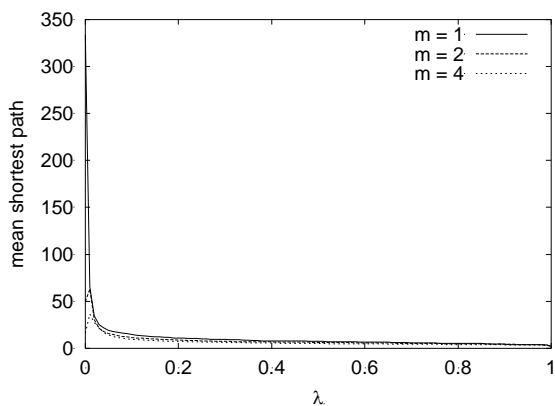


図 1 平均最短パス長

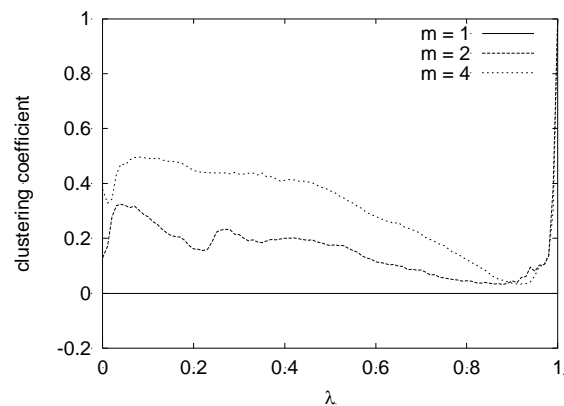


図 2 クラスタリング係数

平均最短パス長は $\lambda = 0.0 \sim 0.1$ で急激に短くなっている。また、 $m = 2, 4$ の場合、クラスタリング

係数は同じ領域において急増している。このことから、この λ 領域では、クラスター化によって平均最短パスが短くなっていると考えられる。なお、 $\lambda \geq 0.90$ における急激なクラスタリング係数の増加は、完全グラフである初期状態のネットワークに、新規ノードのエッジが集中して連結したため、このときスター状のネットワーク構造を持っている。

次数エントロピーは、次数分布 $P(k)$ が均等なほど大きく、偏りがあるほど小さくなる量で、次式で与えられる。

$$H = -\sum_{k=1}^{n-1} P(k) \log P(k)$$

次に、 λ の変化に対する次数エントロピーの変化を図3に示す。 $m=1, 2, 4$ それぞれで $\lambda = 0.48, 0.72, 0.88$ においてピークが見られる。一例として、 $m=2$ の場合のこのピークの近傍における次数分布を示す(図4)。ここでは、ネットワークが、新規ノードと同じ次数を持つノードが最も高い割合で存在するネットワークへ転移していることが示されている。つまり、次数エントロピーのピークより λ が大きい領域では、ネットワークの成長においてエッジの集中が生じていると考えられる。

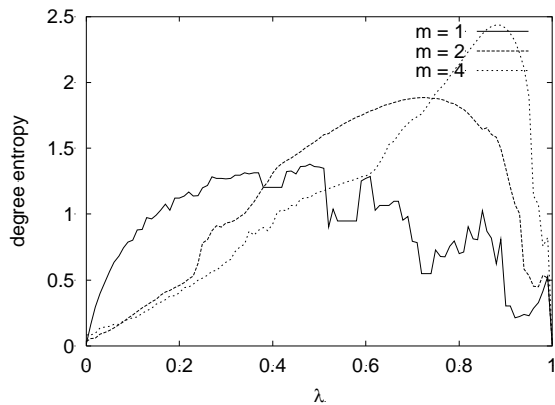


図3 次数エントロピー

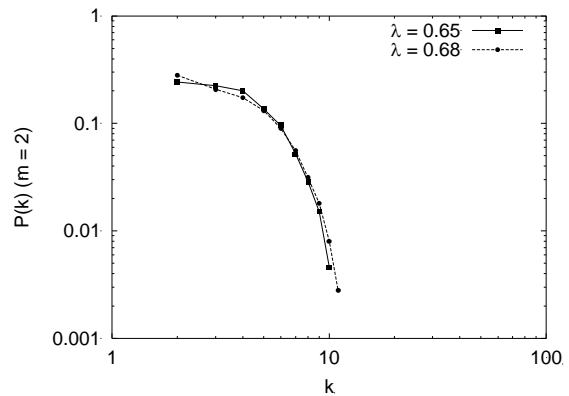


図4 $m=2$ の次数分布の転移

次に、 λ の変化に対する次数の相関係数の変化を図7に示す。なお、次数の相関係数は、M. E. J. Newman による定義式を用いた[3]。ここで $m=1$ の場合は $\lambda = 0.69, 0.75, 0.85$ で、 $m=2$ の場合は $\lambda = 0.88$ で、そして $m=4$ の場合は $\lambda = 0.94$ で、相関係数が正から負に転じている。ここで、 $m=2, 4$ の各場合について、それぞれ $\lambda = 0.88, 0.94$ における次数分布を示す(図8, 図9)。これらの図より、次数間の相関がゼロであるときの本モデルは、二つのべき乗分布が並存する次数分布を示すことが判る。

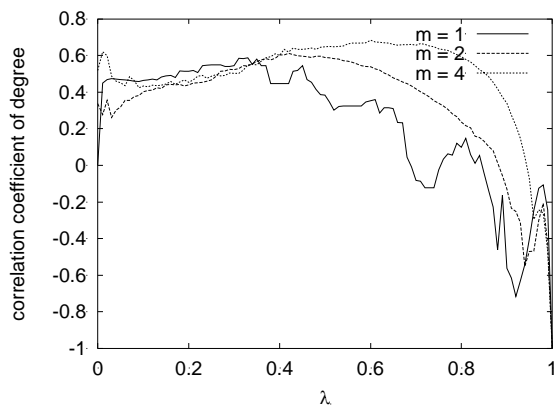


図7 次数の相関係数

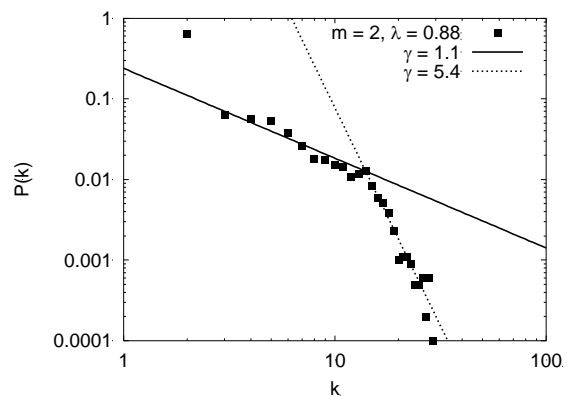


図8 $\lambda = 0.88, m=2$ の次数分布



図9 $m = 4$ 、 $\lambda = 0.94$ の次数分布

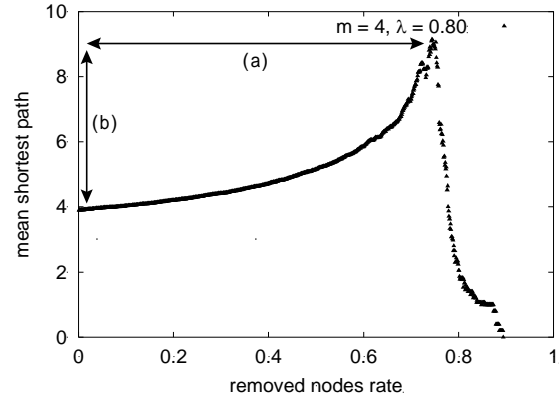


図10 効率の耐性の定義

次にネットワークの効率の耐性を考える。ネットワークは、フラグメント化せずに平均最短パス長が低く抑えられているほど、効率の耐性が高いと考えられる。ここで図10、ノード除去率 (a) と平均パス長の増加率 (b) から、効率の耐性を次式で定義した。

$$T_e = \text{ノード除去率 (a)} / \text{平均最短パス長の増加率 (b)}$$

図11に $m = 2, 4$ のエラー耐性における T_e を示し、図12に $m = 2, 4$ のアタック耐性における T_e を示す。ノード除去のメカニズムは[4]による。

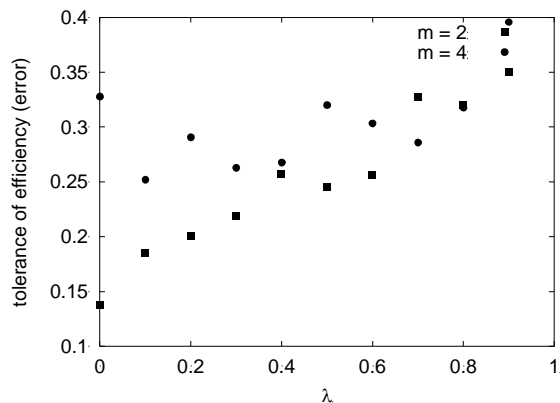


図11 エラー耐性における効率の耐性

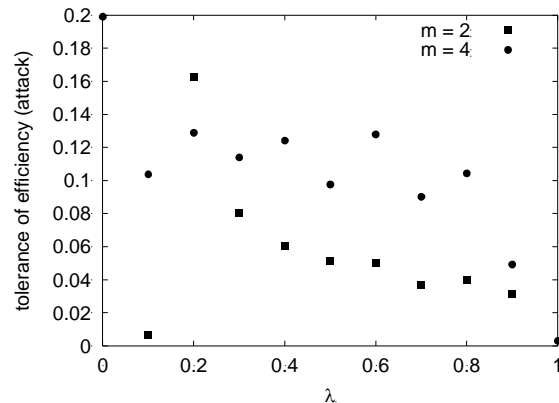


図12 アタック耐性における効率の耐性

以上により、次数が集中する高 λ 領域ではエラー耐性が高く、次数が分散する低 λ 領域ではアタック耐性が高いことが判った。

4章 結論

- ・ 次数エントロピーのピークより λ が大きい領域では、ネットワークの成長においてエッジの集中が生じている。
- ・ 次数間の相関がゼロであるとき、二つのべき乗分布が並存する次数分布を示す。
- ・ 高 λ 領域ではエラー耐性が高く、低 λ 領域ではアタック耐性が高い。

Reference

1. A.-L. Barabási, and R. Albert, *Emergence of scaling in random networks*, Science 286, 509-512 (1999), A.-L. Barabási, R. Albert, and H. Jeong, *Mean-field theory for scale-free random networks*, Physica 272, 173-187 (1999).
2. J. M. Carlson and John Doyle, *Highly Optimized Tolerance: A Mechanism for Power Laws in Designed Systems*, Phys. Rev. E 60 (2), 1412-1427 (1999).
3. M. E. J. Newman, *Assortative Mixing in Networks*, Phys. Rev. Lett. 89(20), 208701-1-208701-4
4. R. Albert, H. Jeong and A.-L. Barabási, *Error and attack tolerance of complex networks*, Nature 406, 378-382 (2000).