社団法人　情報処理学会　研究報告
IPSJ SIG Technical Report

2005－MPS－53（7）
2005／3／10

ラグランジュ目的緩和法を用いた組合せ最適化問題の解法

田村　宏樹 †　唐　政 †　石井　雅博 †　山下　雅史 ††

† 富山大学　工学部
†† 九州大学 大学院システム情報科学研究科
† 〒 930-8555　富山市五福 3190
†TEL: 076-445-6886
†E-mail: tamura@iis.toyama-u.ac.jp

あらまし 本論文では，ラグランジュ緩和法を改良し，制約条件の緩和だけでなく目的関数の緩和を行うことで組合せ最適化問題を効率よく解くことができるラグランジュ目的緩和法を提案する．本提案法を局所探索法と遺伝的アルゴリズムに適用し，組合せ最適化問題の 1 つであるスケジューリング問題に対して，数値シミュレーションを行う．数値シミュレーションでは，guided local search 法，guided genetic algorithm の解法と比較を行い，提案法が優れていることを主張する．

キーワード：ラグランジュ緩和, 局所探索法, 遺伝的アルゴリズム，guided local search, guided genetic algorithm, スケジューリング問題, 極小値問題

A Method of Solving Combinatorial Optimization Problem Using Lagrangian Object Relaxation Technique

Hiroki TAMURA†, Zheng TANG†, Masahiro ISHII† and Masafumi YAMASITA††

†Faculty of Engineering, Toyama University
††Graduate School of Information Science and Electrical Engineering,kyushu University
† 〒 930-8555　GOFUKU 3190,Toyama-shi, japan
†TEL: 076-445-6886
†E-mail: tamura@iis.toyama-u.ac.jp

Abstract

In this paper, we propose lagrangian object relaxation technique which performs a more nearly optimal solution. This proposed method is consisted of two stages. In one stage a feasible solution is calculated, and in the other, the more nearly optimal solution is calculated by local search method or genetic algorithm. Using the local minimum escaping technique, it can escape from the local minimum by correcting parameters when it falls into a local minimum. We tested our proposed method on scheduling problem. Simulations are performed to scheduling problem using this proposed method, and the validity is shown that proposed method is superior to guided local serach and guided genetic algorithm.

keywords : *lagrangian relaxation, local search, genetic algorithm, guided local search, guided genetic algorithm, scheduling problem, local minimum problem*

1　はじめに

スケジューリング問題，輸送計画，配送計画など，現実の企業活動に現れる様々な問題は，制約の多い組合せ最適化問題を解くことであり，非常に難しい問題である [1]. 厳密な最適解を求めることについては，組合せ最適化問題の多くが NP 困難な問題であることから，コンピュータであっても高速化することは難しい．そこで近年，近似解法や発見的解法を組合せ最適化問題に取り入れ，最適解である保証はないが，かなり近いと思われる解を短時間で求める研究が行われている [2]．しかしこれらの解法でも，複雑な組合せ最適化問題を解くことは大変難しいため，最近では多少時間がかかっても，より精度の高い解を求めるメタヒューリスティックスの研究が盛んである．

組合せ最適化問題は，複数の制約関数と目的関数から構成されており，メタヒューリスティックスは，複数ある解の状態から制約関数を満たし，目的関数が最適な解を探索することを目的とする．実行可能解を導き出す解法として，従来から提案されているラグランジュ緩和法 (Lagrangian Relaxation，LR) という解法は，ラグランジュ乗数というパラメータを用いて，制約条件が満たされていないときに，ラグランジュ乗数を調整して制約条件を満たした解を探索するようにする解法である [3]．しかし，ラグランジュ緩和法は，制約条件を満たした極小値から抜け出すことはできない．また，陥った極小値から脱出する解法として，guided local search 法 (GLS) が提案されている [4]．GLS は, 局所探索法などの探索法を用いて，極小値を探索し，陥った極小値から脱出するアルゴリズムを持つ解法である．これは，解を構成する目的関数にペナルティ項を加算したもので，まず探索法によって解の探索を行った後，極小値に陥ったと判断された場合，ペナルティ項の値を更新する．これにより目的関数を変化させ，極小値からの脱出を図るものである．その結果，極小値の近傍解のなかで，ペナルティ項の大きな解を含まないような探索をする．しかし，GLS は極小値から脱出することを重要視しており，制約条件に関しては考慮していない．

本論文では，ラグランジュ緩和法を改良したラグランジュ目的緩和法を提案する．本論文では，ラグランジュ緩和法を改良し，制約条件の緩和だけでなく，制約条件を満たした極小値では，目的関数の緩和を行うことで組合せ最適化問題を効率よく解くことができるラグランジュ目的緩和法を提案する．本提案法の概念は，GLS に近いが，ペナルティ関数を用いることなく，ラグランジュ乗数を調整することで同様以上の効果を得ることが可能である．本提案法を局所探索法と遺伝的アルゴリズム (GA) に適用し，組合せ最適化問題の 1 つであるスケジューリング問題に対して，数値シミュレーションを行う．数値シミュレーションでは，GLS，guided genetic algorithm(GGA[5]:GLS のアルゴリズムを GA に適用した解法) の解法と比較を行い，本提案法の有効性を示す.

2　問題の定式化

2.1　定式化

本論文では，スケジューリング問題を実行可能なスケジュールを作成するために守るべき制約条件からなる関数 (本論文では制約関数 C と呼ぶ) と最適化をすることを目的とする関数 (本論文では目的関数 O と呼ぶ) に区別し，下式のように定式化する．なお，式で用いられる記号の意味を表 1 に示す.

表 1: 記号の説明

Code	Meaning
X_n	The number of products
$J_n(i)$	The number of job processes of product i
$T(i)$	Time for delivery of product i
$F_1(i,j)$	The number of time to which job j of product i overlaps other job simultaneously by the same machine
$F_2(i)$	Time which production of product i completes
$L(i)$	The shortest time until product i is completed

$$\begin{aligned} \text{制約関数}\,C &= \sum_{i=1}^{X_n}\sum_{j=1}^{J_n(i)} F_1(i,j) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{X_n} max(F_2(i)-T(i),0) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\text{目的関数}\,O = \sum_{i=1}^{X_n}(F_2(i)-L(i)) \tag{2}$$

ここで，定式化されたスケジューリング問題の制約関数 C(式 (1)) は，機械の重複利用の禁止と納期の制約で構成されている．処理順序の制約は，本論文で使用する解法では必ず満たすように処理する．本論文での目的関数は，各製品の完成時間の総和で構成する (式 (2))．製品の完成時間は，製品完成にかかる時間を最短時間にすることを目的としている．ここで，制約関数は $C=0$ のときが最適値であるが，目的関数の最適値は不明である．各関数は全て 0 以上の値をとる．

2.2　エネルギー関数

本論文では，スケジューリング問題をエネルギー関数で表現し，エネルギー関数の値（本論文ではエネルギーと呼ぶ）を最適化することで最適なスケジューリング結果を導くことを目的とする．定式化したスケジューリング問題を次のようなエネルギー関数 E で定義する．

$$E = E_1+E_2+E_3 \tag{3}$$

$$E_1(\text{作業の重複}) = \sum_{i=1}^{X_n}\sum_{j=1}^{J_n(i)} \lambda_1(i,j)\cdot F_1(i,j) \tag{4}$$

$$E_2(\text{納期}) = \sum_{i=1}^{X_n} \lambda_2(i)\cdot max(F_2(i)-T(i),0) \tag{5}$$

$$E_3(\text{最短完成時間}) = \sum_{i=1}^{X_n} \lambda_3(i)\cdot(F_2(i)-L(i)) \tag{6}$$

ここで，λ はパラメータであり，ラグランジュ緩和におけるラグランジュ乗数と同様である. 本論文ではこの λ を調整することで極小値からの脱出を可能にする．

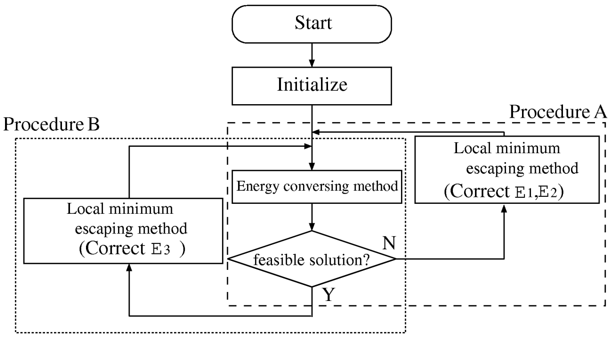

図 1: 提案する解法の手順

3 ラグランジュ目的緩和法を用いた極小値脱出

3.1 ラグランジュ目的緩和法

制約条件を満たした解を得る方法であるラグランジュ緩和法は罰金法ともよばれる．ラグランジュ緩和法は，制約式を破るような解にはペナルティ（罰金）がかかるように，目的関数に制約式を繰り込む方式である [3]．制約条件を表す制約関数を C_k，目的関数を O_l, 制約関数のラグランジュ乗数 λ_k^c で表すと，ラグランジュ緩和法を用いたエネルギー関数 E は式（7）のようになる．

$$E = \sum_l O_l + \sum_k \lambda_k^c \cdot C_k \tag{7}$$

しかし，局所探索法のように減少する方向にしか進まない解法にラグランジュ緩和法を適用して解の探索を行うと，一度制約条件を満たした極小値を得るとその解から改善される事はない．本論文では，目的関数を構成する各関数にもラグランジュ乗数を乗算し，制約条件を満たした後も効率的に最適解を探索する改良型ラグランジュ緩和法を提案する（式（8））．

$$E = \sum_l \lambda_l^o O_l + \sum_k \lambda_k^c \cdot C_k \tag{8}$$

このように目的関数の各項にもラグランジュ乗数 λ_l^o を持たせることにより，制約条件を満たしている状態である制約関数が 0 の場合でも，エネルギー関数を修正することができる．本提案法は，ラグランジュ乗数を用いて目的関数における極小値から脱出させることができる解法である．本論文では，本提案法をラグランジュ目的緩和法と呼ぶ.

3.2 アルゴリズム [6]

本論文で提案するラグランジュ目的緩和法は，エネルギー収束法と極小値脱出を組合せてより最適な実行可能解を探索する解法である．本論文では，エネルギー収束法として局所探索法と GA を用いる．本節では，3.1 で説明したラグランジュ目的緩和法のスケジューリング問題への適用方法について述べる．

提案する解法の流れ図を図 1 に示す．初期解に対してエネルギー収束法を適用しエネルギーを減少させ，制約条件を満たしていない極小値に陥った場合に極小値脱出法を用いて極小値を脱出させる．ここで本提案法はまず，極小値に陥ったとき，制約条件 (式 (1)) を満たした実行可能解を求めるようラグランジュ乗数 $\lambda_1(i,j), \lambda_2(i)$ に対してのみ極小値脱出法を適用する (図 1 の A 処理)．このときのラグランジュ乗数の更新式は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,s+1}(i,j) &= \lambda_{1,s}(i,j) + \Delta\lambda_{1,s}(i,j) && (9)\\
\lambda_{2,s+1}(i) &= \lambda_{2,s}(i) + \Delta\lambda_{2,s}(i) && (10)\\
\Delta\lambda_{1,s}(i,j) &= \eta_1 \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \lambda_{1,s}(i,j)} && (11)\\
\Delta\lambda_{2,s}(i) &= \eta_2 \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \lambda_{2,s}(i)} && (12)
\end{aligned}$$

これらの式より E_1 および E_2 が上昇し，制約条件に関する極小値から脱出することができる．

次に，実行可能解の状態で極小値 ($E_1 + E_2 = 0$ の状態) に陥ったら，次は目的関数のラグランジュ乗数 $\lambda_3(i)$ に対して極小値脱出法を適用する (図 1 の B 処理)．このときのラグランジュ乗数の更新式は次のとおりである．

$$\begin{aligned}
\lambda_{3,s+1}(i) &= \lambda_{3,s}(i) + \Delta\lambda_{3,s}(i) && (13)\\
\Delta\lambda_{3,s}(i) &= \eta_3 \cdot \frac{\partial E_s}{\partial \lambda_{3,s}(i)} && (14)
\end{aligned}$$

この式により，目的関数のラグランジュ乗数 $\lambda_3(i)$ の値が変化することにより，極小値より脱出し，より目的関数の小さい実行可能解を求めることができる．このように段階的に極小値脱出法を繰り返し適用することで多くの実行可能な解を探索し，より目的関数の小さい実行可能解が求められると考えられる．

また，本論文では，エネルギー収束法を用いて制約条件を満たした極小値に陥り，そして，極小値脱出法を用いて陥った極小値から脱出したとき，制約関数のラグランジュ乗数 $\lambda_1(i,j), \lambda_2(i)$ の値を初期化する．この処理により，極小値に陥る前の制約関数のラグランジュ乗数 $\lambda_1(i,j), \lambda_2(i)$ の値に影響されることなく，更新された目的関数のラグランジュ乗数 $\lambda_3(i)$ の値を重要視して別の極小値を探索することが可能になる．

4 数値シミュレーション

本章では，2 章で説明したスケジューリング問題で，製品数が $X_1 \sim X_4$ の 4 製品問題から，製品数が $X_1 \sim X_{10}$ の 10 製品までのフローショップ問題を扱う．局所探索法にラグランジュ目的緩和法を用いた解法，ラグランジュ緩和法，GLS で行った数値シミュレーション結果と GA にラグランジュ目的緩和法を用いた解法，GA，GGA で行った数値シミュレーション結果の比較を行う．本論文で使用した局所探索法単体では，本論文で数値シミュレーションの対象としたフローショップ問題に対してほとんど成功することが出来ていない．そのため，本論文で行った GLS は，ラグランジュ緩和法で実行可能解を取得し，制約条件を満たした極小値に陥ったらペナルティ項を更新する解法とした．数値シミュレーションでは，局所探索法を使用した解法では終了条件は実行回数 1 万回，GA を使用した解法では終了条件は世代数 10 万世代としている．各解法で使用した局所探索法，GA の条件は統一している．

表 3，4 の値は各フローショップ問題を 100 回異なる初期状態から実行したときの平均目的関数の値である．各

表 2: 局所探索法を用いた場合との比較

X_n	LR	GLS	Proposed method
4	26	20	**20**
5	50	46	**46**
6	80	72	**71**
7	130	114	**111**
8	192	173	**170**
9	272	246	**240**
10	363	334	**332**

表 3: GA を用いた場合との比較

X_n	GA	GGA	Proposed method
4	333	53	**34**
5	1028	108	**78**
6	1821	163	**122**
7	2595	270	**185**
8	3251	392	**267**
9	3925	540	**368**
10	3404	739	**496**

解法は，対象問題に対して 100 %の成功率 (実行可能解を得る率) を得ている．表 3 ，4 から，全ての条件において，ラグランジュ目的緩和法を適用した解法が有効であることが分かる．特に，GA にラグランジュ目的緩和法を用いた解法では，GA と比べて本提案法の有効性が大きく見られる．これらのことから本提案法は効率よく制約条件を満たした目的関数を探索できたことがわかる．また，GA の場合，ラグランジュ目的緩和法を用いたときの計算時間と GA 単体のときの計算時間とではほとんど差が生じなかった．

ここで，局所探索法にラグランジュ目的緩和法を用いた解法を 9 製品のフローショップ問題に適用した際の各関数の値 (エネルギー関数，目的関数，制約関数) の推移の様子を図 2 に示す．図 2 の縦軸は関数の値，横軸は実行回数を表している．図 2 より，エネルギーが極小値脱出によるラグランジュ乗数の更新による増加，局所探索法による減少を繰り返しながら，制約条件 (制約関数 C=0) を満たした解を探索していることがわかる．つまり，制約条件を満たした極小値からの脱出に成功しているといえる．

5　おわりに

本論文では，組合せ最適化問題の解を効率的に探索する解法として，ラグランジュ目的緩和法を提案し，スケジューリング問題の一種であるフローショップ問題に適用して数値シミュレーションを行った．その結果，フローショップ問題に対して，GLS，GGA で行った場合よりより良い最適解を発見できている．このように本提案法が有効であった理由は，従来では，制約条件と目的関数をそ

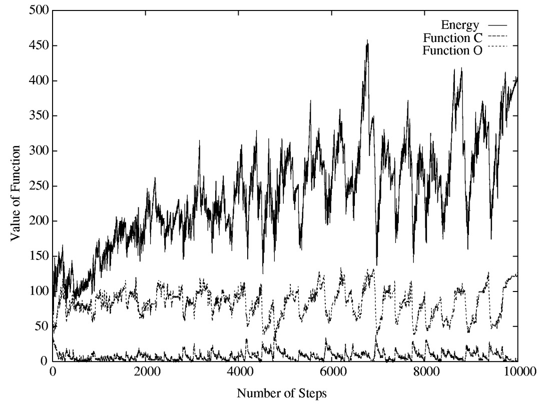

図 2: 関数値の推移

れぞれに関して最適化する解法が提案されてきたが，本論文では制約条件を満たしていない場合は制約関数を優先的に最適化しつつ，実行可能解となったあとは，目的関数を最適化するという解法であるため，効率的に最適解の探索が行われていると考えられる．提案したラグランジュ目的緩和法は，本論文で行ったように問題をエネルギー関数で表現できる問題の多くに適用可能であると考えられる．さらに，ラグランジュ乗数を加え，それを更新することで極小値から脱出する解法なので，少ないパラメータで且つ少ない計算量で容易に適用できるメリットがある．

参考文献

[1] 柳浦　睦憲，茨木　俊秀: ”組合せ最適化問題に対するメタ戦略について”．電子情報通信学会論文誌 D-I，Vol.J83-D-I，No1，pp.3-25 (2000).

[2] 黒田　充，村松　健児: ”生産スケジューリング”．朝倉書店，2002.

[3] 森　雅夫，松井　知己: ”オペレーションズ・リサーチ”．朝倉書店，2004.

[4] Voudouris, C. & Tsang, E.P.K. ”Function Optimization using Guided Local Search”. Technical Report CSM-249, University of Essex, Colchester, UK, September, (1995).

[5] Lau, T.L. & Tsang, E.P.K. ”Solving the radio link frequency assignment problem with the guided genetic algorithm”. Proceedings, NATO Symposium on Radio Length Frequency Assignment, Sharing and Conservation Systems, Aalborg, Demark, October (1998).

[6] 田村 宏樹，唐 政，石井 雅博, ”段階的に極小値脱出法を用いたスケジューリング問題の解法”. 電子情報通信学会論文誌 D- I Vol.J86-D- I , No.5 , pp.345-350 (2003).