

並列二閾値素子系による市場のモデル化とそのベキ則性

小崎元也[†] 佐藤彰洋^{††}

金融市場の価格時系列は、価格変動の間欠性と価格変動の分布のベキ則性という特徴的な性質を有することが知られている。この二つの特徴を説明する数理モデルとして、並列二閾値素子系モデルを提案する。まず、このモデルの数値シミュレーションを実行して価格時系列の統計的性質がある程度再現されることを確認し、さらに価格変動の分布のベキ指数(揺らぎの激しさの尺度)がモデルのパラメータに依存することを示す。次に、平均場近似により価格変動が従う時間発展方程式を導出し、価格変動の間欠性とベキ則性の存在がこの時間発展方程式によって説明できることを示す。最後に、この時間発展方程式が近似的に乗算ノイズと加算ノイズの両方を持つ線形な確率過程で表せることを示し、ベキ指数とモデルのパラメータとの関係を理論的に明らかにする。

Modeling financial markets based on the arrayed bithreshold noisy devices and their power-law scaling

MOTOYA KOZAKI[†] and AKIHIRO SATO^{††}

In this paper, we propose a mathematical agent-based model of financial markets, an arrayed bithreshold noisy devices model, which has two important statistical properties of markets: intermittency of price changes and power-law scaling in distributions of price changes.

First, we performed numerical simulations of the agent model and confirmed that the statistical features of the model are similar to empirical ones. Second, by meanfield approximation, we derived an equation of the price changes and found that the equation can explain both the intermittent behaviour and the power-law scaling of the distributions. Finally, by linear approximation of the equation, we clarified a relation between power-law exponents and model parameters.

1. 緒 論

統計物理学の分野では、これまで相互作用する多体系の研究に関心が払われてきた。磁性体や液体論、近年では自己組織化臨界やカオスなどがその一例である。近年、これらの研究で得られた知見を生物システム、社会システムに適用する研究が活発に行われている。

特に社会システムの領域において、金融市場は、市場の電子化により取引記録のデータベースが整備され統計的分析に耐えうる量のデータの蓄積が可能になったことから、多くの研究者の関心を集めている。

近年の研究で、統計的手法を用いたデータ解析がな

された結果¹⁾、(i) 価格の収益率(または対数差分)の確率密度関数の裾野がベキ則に従う(ii) 価格変動の絶対値(Volatility)が間欠性²⁾を示す、という統計的性質を持つことが明らかになった。

これら金融市場に特徴的な統計的性質を説明する数理モデルとして、これまでにIsingモデル^{3),4)}、決定論的ディーラモデル⁵⁾、マイノリティゲーム⁶⁾といったモデルが提唱されてきたが、これまでのモデル、特にIsingモデルとマイノリティゲームでは、エージェントは必ず「買い」または「売り」いずれかの状態を取らねばならず、「待つ」という状態は考慮されてこなかった。

本稿では、買い、売り、待ちの3状態を考慮し、外部からの入力がある閾値を超えたときに売買行動を起こすエージェントからなる市場を、並列二閾値素子系⁷⁾でモデル化する。

2. 市場の並列二閾値素子系モデル

図1に並列二閾値素子系のブロック線図を示す。この系は並列に配置された N 個の二閾値素子からなり、

[†] 2005年3月末まで: 京都大学工学部情報学科
School of Informatics and Mathematical Science, Faculty of Engineering, Kyoto University.
同年4月より: 京都大学情報学研究科数理工学専攻
Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University

^{††} 京都大学情報学研究科数理工学専攻
Department of Applied Mathematics and Physics, Graduate School of Informatics, Kyoto University

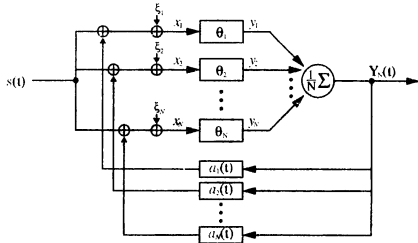


図 1 並列二閾値素子系のブロック線図
Fig. 1 A block diagram of arrayed bithreshold devices

各素子には共通の信号 $s(t)$ が入力される。並列配置された二閾値素子は、互いに独立に3つの投資行動のいずれかを行うエージェントに対応し、それらに対し共通の信号が入力されることは、エージェントが市場外部から同一の情報を受け取ることに対応する。

各素子 i への入力は、

$$x_i(t) = s(t) + \xi_i(t) + z_i(t) \quad (1)$$

で表される。ここで、変数 $\xi_i(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ はエージェントの判断の揺らぎ、 $z_i(t)$ は系の出力 Y_N からのフィードバックである。

入力 $x_i(t)$ に対する素子 i の出力は、閾値 θ_i に対して、

$$y_i(t) = \begin{cases} +1, & x_i > \theta_i \\ 0, & -\theta_i \leq x_i \leq \theta_i \\ -1, & x_i < -\theta_i \end{cases} \quad (2)$$

で与えられる。素子の出力はエージェントの投資行動に対応し、 y_i の値 $+1, 0, -1$ は、それぞれ「買い」「待ち」「売り」の投資行動を表す。

系全体の出力は、素子の出力の算術平均

$$Y_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t) \quad (3)$$

である。これは個々のエージェントの投資行動の平均であるから、市場における需要と供給の差、すなわち超過需要を表している。従って、 $Y_N(t)$ は価格変動に比例する量である。

素子 i へのフィードバックは、

$$z_i(t) = a_i(t) Y_N(t-1) \quad (4)$$

で与えられる。これは、市場参加者の行動が過去の価格変動に影響を受けることを表現している。係数 $a_i(t)$ は、以下のように仮定する。

$$a_i(t) = a\zeta(t) + b_i\eta_i(t), \quad i = 1, \dots, N \quad (5)$$

ここで $\zeta(t)$ および $\eta_i(t)$, $i = 1, \dots, N$ は、互いに独立で区間 $(-1, 1)$ の一様分布に従う、時間的に無相関

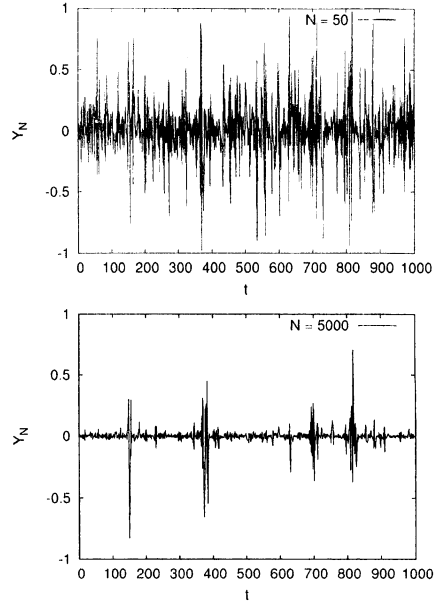


図 2 価格変動の時系列標本 (上: $N = 50$, 下: $N = 5000$)
Fig. 2 Samples of time series of Y_N (above: $N = 50$, below: $N = 5000$).

な確率変数とする。また、 a はエージェントに共通の揺らぎ (エージェント間の相互作用に起因するものと考えられる) の強度、 b_i はエージェント i の共通の揺らぎからのずれの強度を表現している。

3. 数値シミュレーション

前節で定式化した市場のモデルを計算機上に実装し、数値シミュレーションを行った。

3.1 時系列標本

はじめに、少数エージェント ($N = 50$) と多数エージェント ($N = 5000$) の場合それぞれにおける、モデルの価格変動 $Y_N(t)$ の時系列標本を図 2 に示す。モデルのパラメータは、 $\sigma = 1.0, a = 4.0, \theta_i, b_i = 4.0$ ($i = 1, \dots, N$), $s(t) \equiv 0$ とした。

少数エージェントの場合 (図 2 (下)) は、常に乱雑に振動する Y_N の時系列が得られたのに対し、多数エージェント (図 2 (上)) の時系列では、 $|Y_N| \ll 1$ での微弱な振動が続く状態の間に断続的に激しい振動が突発するという、Volatility Clustering に似た顕著な間欠性が観測された。

3.2 確率密度関数

次に、同じパラメータ設定の下で、多数エージェント ($N = 5000$) の場合の価格変動の確率密度関数 (度数分布) $\rho(Y_N)$ を計算した。

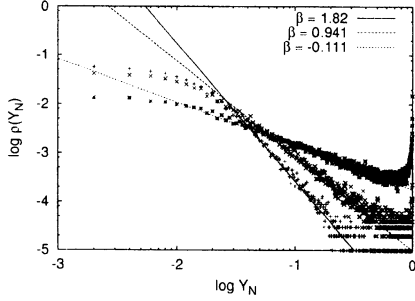


図3 価格変動の度数分布
Fig. 3 A histogram of price changes.

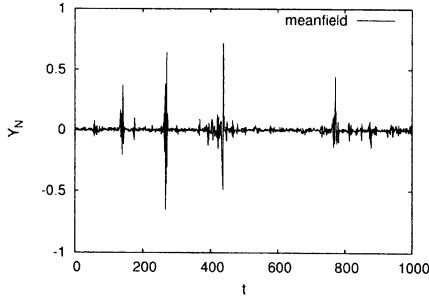


図4 価格変動の時系列標本 (平均場近似)
Fig. 4 A typical time series of Y_N (meanfield approximation).

計算の結果を図3に示す。図中の分布は、下から $a = 3.6(+, \beta = 1.8), a = 4.2(x, \beta = 0.9), a = 5.8(*, \beta = 0.06)$ の場合である。おおよそ $Y_N \approx 10^{-2}$ から1の範囲で、分布がベキ則 $\rho(Y_N) \propto Y_N^{-(\beta+1)}$ に従うことが分かる。

4. 平均場近似

4.1 時間発展方程式の導出

平均場近似を行うために、 $\theta_i \equiv \theta, a_i(t) \equiv a\zeta(t), i = 1, \dots, N$ とすると、 $Y_N(t)$ に関する時間発展方程式

$$Y_N(t) = f(s(t) + a\zeta(t)Y_N(t-1)) \quad (6)$$

を導くことができる。ただし、

$$f(x) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta - x}{\sqrt{2}\sigma} \right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\theta + x}{\sqrt{2}\sigma} \right) \quad (7)$$

である。

4.2 平均場近似の有効性

平均場近似による出力 $Y_N(t)$ の時間発展方程式(6)式が、元のモデルの出力を近似していることを確認するため、数値計算を実行した。

図4に、(6)式の時系列標本を示す。パラメータは $\theta = 1, \sigma = 1, a = 4.2$ 、入力信号は $s(t) = h\chi(t)$ とし

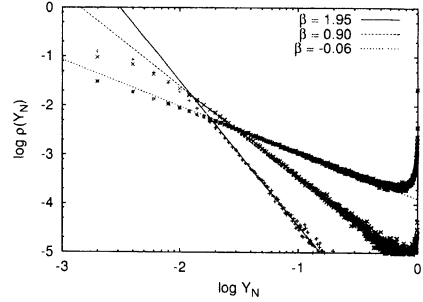


図5 価格変動の度数分布 (平均場近似)。各パラメータの値は、 $h = 10^{-2}, a = 3.6(x, \beta = 1.95), a = 4.2(*, \beta = 0.9), a = 5.8(\square, \beta = -0.05)$ である。
Fig. 5 Histograms of price changes (meanfield approximation)

た。 $(\chi(t))$ は区間 $(-1, 1)$ の時間的に無相関な一様乱数、 $h = 0.02$ 。

図4と数値シミュレーションの時系列標本(図2(下))とを比較すると、平均場近似は N が十分大なるときのモデルの価格変動を上手く近似していることが分かる。

平均場近似より得られた Y_N の度数分布と図3と図5について、パラメータ σ, a が等しい分布同士を比較すると、ほぼ同じベキ指数になることが確認できる。

5. ベキ指数のパラメータ依存性

5.1 線形近似によるベキ指数の導出

$|a\zeta(t)Y_N(t-1) + s(t)| \ll 1$ なるとき、平均場近似した $Y_N(t)$ の時発展方程式である(6)式を $Y_N(t-1) = 0$ の周りで展開し、次の線形化方程式を得る。

$$Y_N(t) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\sigma} e^{-\frac{\theta^2}{2\sigma^2}} \zeta(t) Y_N(t-1) \quad (8)$$

仮定より、無視した高次の項は $|Y_N| \ll 1$ で十分小さいとする。

(8)式は、ランダム乗算過程と呼ばれる以下の形の離散型 Langevin 方程式と同型である。

$$x_{t+1} = b_t x_t + f_t \quad (9)$$

(9)式のランダム乗算過程が定常分布を持つ場合に、乗算ノイズとベキ指数の間に以下の関係が成り立つことが知られている⁸⁾。

もし x_t が $t \rightarrow \infty$ で定常分布を有するならば、そのベキ指数 β は、

$$\langle |b_t|^\beta \rangle = 1, \quad 0 < \beta < 2 \quad (10)$$

で与えられる。

今の場合 $b_t \equiv \sqrt{2/\pi}(a/\sigma) \exp(-\theta^2/2\sigma^2) \zeta(t)$ であるから、

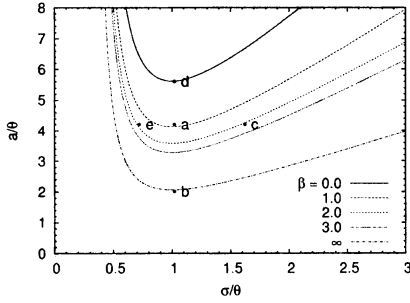


図 6 β -等高線
Fig. 6 β -Contour on σ - a plane.

$$(|b_t|^\beta) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\sigma} e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}} = (1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} \quad (11)$$

を得る。

5.2 β -等高線図

(11) 式で得られたベキ指数とパラメータ σ, a の関係から、 β を σ, a の関数と見て σ - a 平面上に等高線で示したのが、図 6 である。

この等高線図の有効性を検証するため、図 6 中に示した点 a, b, c, d, e それぞれにおける度数分布と累積分布を調べた。これにより、点 a~d では線形近似により求めたベキ指数が実際の累積分布のそれと高い精度で一致するが、点 e では数値シミュレーション結果は 2 つのベキを持つような累積分布を示しており、線形近似によるベキ則とは一致しないことが分かった。

これは、 $Y_N = 0$ まわりの線形近似 (8) 式が時間発展方程式の局所的な近似にしかならず、大域的な写像の形と一致しないことによるものである。

6. 結 論

本稿では、「買い」と「売り」に加えて「待つ」という行動を考慮に入れた市場のエージェントモデルについて考察した。

幾つかの市場に関する仮定の下、市場の並列二閾値素子系モデルを導入し、数値シミュレーションと理論的解析とによって、このモデルの価格時系列が間欠性を有し、その分布の裾野がベキ則性を有することを示した。

さらに、この双方の統計的性質が存在するための必要条件を示した。それは以下のものである。

- フィードバックループが存在し、フィードバックの強さが時間変化すること
- 内性因子による不確実性あるいは外性因子による不確実性のいずれかが少なくとも存在する。

本稿で定式化した単純なエージェントモデルを、現

実の市場に適用できるかは議論の余地があるが、金融市場のベキ則揺らぎはフィードバックの強さのみならず、エージェントの意思決定の揺らぎの強さにも依存している可能性がある。

また、時間変化するフィードバックを持つ並列二閾値素子系は、金融市場のモデルだけでなく神経ネットワーク、ベキノイズ発生器等にも応用可能な系である。従って、5 節で明らかにした系のパラメータとベキ指数の関係は、これら並列二閾値素子系で記述できる様々な系に対しても示唆に富む結果であると考えられる。

謝辞 最後になりましたが、本研究を遂行する上で多くのご指導とご助言を賜りました。京都大学情報学研究所数理工学専攻物理統計学分野の宗像豊哲教授、五十嵐頭人助教授に深甚な感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) Mantegna, R. N. and Stanley, H. E.: *An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge University Press (1999). (中嶋真澄 訳: 経済物理学入門 ファイナンスにおける相関と複雑性, エコノミスト社 (2001)).
- 2) Fujisaka, H. and Yamada, T.: Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems, *Prog. Theor. Phys.*, Vol. 69, No. 1, pp. 32-47 (1983).
- 3) Kaizoji, T.: Speculative Bubbles and Crashes in Stock Markets: An Interacting-agent Model of Speculative Activity, *Physica A*, Vol. 287, pp. 493-506 (2000).
- 4) Krawiecki, A., Hołyst, J. A. and Helbing, D.: Volatility Clustering and Scaling for Financial Time Series due to Attractor Bubbling, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 89, No. 15, pp. 158701-1 - 158701-4 (2002).
- 5) Takayasu, H., Miura, H., Hirabayashi, T. and Hamada, K.: Statistical Properties of Deterministic Threshold Elements — the Case of Market Price, *Physica A*, Vol. 184, pp. 127-134 (1992).
- 6) Zhang, Y.-C.: Evolving Models of Financial Markets, *Europhys. News*, Vol. 29, pp. 51-54 (1998).
- 7) Sato, A.-H., Ueda, M. and Munakata, T.: Signal Estimation and Threshold Optimization using an Array of Bithreshold Elements, *Phys. Rev. E*, Vol. 70, pp. 021106-1 - 021106-5 (2004).
- 8) Takayasu, H., Sato, A.-H. and Takayasu, M.: Stable Infinite Variance Fluctuations in Randomly Amplified Langevin Systems, *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 79, No. 6, pp. 966-969 (1997).