

事業の期待利益を最大化する初期投資額の借入形態

山田辰徳[†] 宮崎浩一[†] 野村哲史[†]

本論文では、事業の期待利益を最大化する借入形態の決定モデルを提案する。本論文では、借入形態を、資金借入れ時に設定される、利率、返済方法の組合せと考え、利率の決定には事業の信用リスクを加味した、社債の利回り評価法を用い、2期の分割返済を想定する。さらに事業の保有資本金、銀行の要求金利についての制約を考慮することで、経営情報により有用なモデルの提案を行う。数値例では、各初期投資金額での事業の期待利益と借入形態を算出する。また、事業の資本金、銀行の要求金利が事業の期待利益、借入形態に与える影響についても分析を行う。

What Type of Loan Structure Maximizes the Expected Profit of the Project

TATSUNORI YAMADA[†], KOICHI MIYAZAKI[†] and SATOSHI NOMURA[†]

This paper provides the model to derive the optimal loan structure that maximizes the expected profit of the project. We define loan structure as the combination of the payment schedule and the loan interest rate. Assuming two time epochs for the payment, we adopt the arbitrage-free pricing of corporate bond yield to evaluate the loan interest rate. With the restriction to initial capital to the project and the use of the appropriate loan interest rate, our model could provide valuable information to managerial decision making. In numerical examples, both optimal expected profit and the optimal loan structure are derived under each initial investment amount. The effect of the initial capital and the bank's requested premium to the optimal expected profit and the optimal loan structure is also analyzed.

1. はじめに

本研究では、事業の期待利益を最大化する初期投資金額の借入形態を決定するモデルを提案する。対象事業は倒産が借入形態に依存するコモディティ事業を想定する。コモディティ事業とは、コモディティを生産或いは採鉱し、市場で決定される価格で取引を行うことにより収益をあげる事業である。また、この事業が扱うコモディティとは大豆やコーヒー豆のような農作物から原油、金、パラジウムなどの原材料までの商品の総称であり、株式や債券と同様に市場で取引され価格が決定される金融商品である。コモディティ事業では単一のコモディティを取扱うケースが大半であるため、コモディティ事業の収益は、取引量が一定の場合、単一の市場価格に大きく依存し、不安定なものとなるため、借入の返済期間が短いほど、コモディティ事業の倒産確率が高くなる。このような特徴をもった、コモディティ事業の借入形態を表現するため、コモディ

ティ事業は設備投資金額に対して、保有する資本金では賸れない金額を初期時点で銀行から借入れ、生産設備を購入し、生産したコモディティを借入期日から借入満期まで日々売却して得られる累積利益で借入を返済する、という設定を考える。このような設定を考えることで、コモディティ事業独特の借入形態を表現することが可能となる。

コモディティ事業の倒産確率や借入形態に関する研究はいくつかあるが、D. Kluge and F. Lehrbass (2003)¹⁾ は借入により設備投資を行ったコモディティ事業が、商品を生産して借入満期に市場価格での売却代金を返済に充てるという設定において、借入満期での市場価格から、コモディティ事業の倒産確率を導出している。しかしながら、A) 倒産確率に見合う借入金利の影響が考慮されていない、B) 借入は一括返済のみを取り扱っており、借入形態に関する議論はなされていない、C) A), B) の理由から経営情報として有用な事業収益最大化のための借入形態や自己資本対比での借入額自体に関する議論がなされていない。そこで、本研究では、借入金利の決定方法として、信用リスクを加味した、社債の利回り評価法を用いた上で、

[†] 電気通信大学大学院システム工学専攻
Department of Systems Engineering, The University of
Electro-Communications

2期の分割返済を想定し、事業の期待利益を最大化する借入形態の決定モデルを提案する。更に、事業の資本金、銀行の要求金利を考慮に入れ、経営情報としてより有用なモデルの提案を試みる。

2. モデル

2.1 モデルの概要と用語及び記法のまとめ

本モデルでは、単純化のため次の3つの仮定を置く。
 仮定1. 資本金は全て設備投資に充てるとし、設備投資金額（設備投資金額 > 資本金）に対して、資本金では賸いきれない差額を銀行の借入で賸うとする。

仮定2. 借入の返済を2回の分割返済とする。

仮定3. 返済は、日々生産するコモディティを売却して得られる累積利益を返済原資とするのであるが、日々のコモディティの取引量を1とし、事業での日々の利益は日々の価格に等しいとする。

用語、記法については次の通りである。

- 返済元金 G_1, G_2 : 1, 2期目での返済元金
- 貸出金額 $G_1 + G_2$: 銀行が貸出す金額の総額
- 返済金額 D_1, D_2 : 1, 2期目の返済元金とそれにかかる利息の合計金額
- 返済期日 T_1, T_2 : 返済金額を返済する期日（1, 2期目の返済期日）
- 貸出利率 R : 銀行が信用リスクのある事業への貸出に適する金利
- 安全利率 r : 銀行が信用リスクの無い貸出先への貸出に適用する金利
- コモディティ事業での累積利益 $X_{T_i T_j}$: 時点 T_i ($T_i = 0$ の場合は借入時点) から時点 T_j までのコモディティ事業での累積利益
- 資本金 C : 設備投資に充てるコモディティ事業の資本金
- 銀行の金利プレミアム α : 銀行が利益を得るために安全利率に上乗せする金利

2.2 コモディティ価格過程の記述

現実のコモディティの値動きに注目すると、平均回帰的な変動をしているように読み取れるものが多く存在する。そこで本研究では、コモディティ価格過程を記述するために、次のO.U (Ornstein-Uhlenbeck) 過程を採用する。

$$dS_t = k(\bar{S} - S_t)dt + \sigma dZ(t) \quad (1)$$

\bar{S} はコモディティの平均価格、 k は平均回帰速度、 σ はコモディティ価格のボラティリティに関するパラメータであり、 dZ は標準ブラウン運動を表す。仮定3より、コモディティ事業の累積利益 X_{0t} はコモディティ

価格 S_t の累積値であり、定式化すると次のようになる。

$$X_{0t} = \int_0^t S_u du = \bar{S}t + \frac{1}{k}(\bar{S} - S_0)(e^{-kt} - 1) + \frac{\sigma}{k} \int_0^t (1 - e^{-ku}) dZ(u) \quad (2)$$

2.3 コモディティ事業の倒産、コモディティ事業及び銀行の期待利益の定式化

2.3.1 コモディティ事業の倒産の定式化

コモディティ事業は、借入期日から返済期日までの累積利益が、返済金額を下回る場合に倒産すると定義する。よって、コモディティ事業の倒産の有無は、(I) 時点 T_1 での倒産、(II) 時点 T_2 での倒産、(III) 倒産しない、の3通りに場合分けすることができ、次のように定式化される。

(I) の場合: $X_{0T_1} < D_1$

(II) の場合: $X_{0T_1} \geq D_1$ かつ $X_{0T_1} - D_1 + X_{T_1 T_2} < D_2$

(III) の場合: $X_{0T_1} \geq D_1$ かつ $X_{0T_1} - D_1 + X_{T_1 T_2} < D_2$ 但し、 D_1, D_2 は次のように表される。

$$D_1 = G_1 e^{RT_1} + G_2 (e^{RT_1} - 1) \quad D_2 = G_2 e^{R(T_2 - T_1)}$$

ここで、 $G_1 e^{RT_1}$ は1期目の元利返済金額、 $G_2 (e^{RT_1} - 1)$ は2期目の返済元金に関する1期目の支払利息であり、 $G_2 e^{R(T_2 - T_1)}$ は2期目の元利返済金額である。2期目での倒産の判定では、1期目の返済期日までの累積利益と1期目の返済金額の差額 $X_{0T_1} - D_1$ を1期目の返済期日から2期目の返済期日までの累積利益 $X_{T_1 T_2}$ に加算して、2期目の返済金額 D_2 との比較を行う。

2.3.2 コモディティ事業の期待利益

コモディティ事業の利益 p_C 、銀行の回収金額 c_B はコモディティ事業の倒産の有無に大きく依存する。本研究では、コモディティ事業の倒産時、銀行は倒産時点までのコモディティ事業の累積利益全てを回収するものとし、コモディティ事業は累積利益以上の債務は負わないものとする。このような設定の下では、コモディティ事業の利益 p_C 、銀行の回収金額 c_B は以下のように表すことができる。

(I) の場合

コモディティ事業: $p_C = -C$

銀行: $c_B = X_{0T_1} e^{r(T_2 - T_1)}$

(II) の場合

コモディティ事業: $p_C = -C$

銀行: $c_B = D_1 e^{r(T_2 - T_1)} + (X_{0T_1} - D_1) e^{r(T_2 - T_1)} + X_{T_1 T_2} = X_{0T_1} e^{r(T_2 - T_1)} + X_{T_1 T_2}$

(III) の場合

コモディティ事業: $p_C = X_{0T_1} - D_1 + X_{T_1 T_2} - D_2 = X_{0T_1} + X_{T_1 T_2} - (D_1 + D_2)$

銀行: $c_B = D_1 + D_2$

なお (I) から (III) は全て、借入満期 (T_2) 時点での

価値として表現されている。

3. コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態の決定手続き

2章に示したように、コモディティ事業の利益は倒産の有無によって大きく異なるため、コモディティ事業の期待利益 \hat{p}_C は借入形態に大きく依存する。本研究では、借入形態を1期目の返済期日 T_1 、1期目の返済元金の割合 $\frac{G_1}{G_1+G_2}$ 、借入金利 R の組合せと定義し、与えられた設備投資金額、借入満期 T_2 に対して、借入形態を変化させ、コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態について考える。具体的な借入形態の決定手続きは次の Step の通りである。

Step1. コモディティ事業の累積利益の導出

コモディティ価格過程の初期値、パラメータとして S_0, \bar{S}, k, σ 、返済期日 T_1, T_2 を与え、(1)式に従うサンプルパスを発生させ、コモディティ事業の累積利益 $X_{0T_1}, X_{T_1T_2}$ を導出する。

Step2. コモディティ事業の期待利益 \hat{p}_C 、銀行の期待回収金額 \hat{c}_B の算出

設備投資金額、保有資本金 C 、金利プレミアム α 、安全利率 r 、借入金利 R を与え、各サンプルパスから得られた、コモディティ事業累積利益から節2.3.2で示したコモディティ事業の利益 p_C 、銀行の回収金額 c_B を算出し、その期待値をとり、コモディティ事業の期待利益 \hat{p}_C 、銀行の期待回収金額 \hat{c}_B を得る。

Step3. 1期目の返済元金割合の設定

1期目の返済元金割合 $\frac{G_1}{G_1+G_2}$ のみを変化させ、コモディティ事業の期待利益を最大化する、1期目の返済元金割合 $\frac{G_1}{G_1+G_2}$ を決定する。

Step4. 借入金利の決定

Step2で与えた借入金利 R とは別に、Step3で得られた返済元金割合の下、銀行が無裁定条件(3)式を満たすような借入金利 R' を算出する。無裁定条件式の下では、倒産リスクのある企業に貸出した場合の期待回収金額と倒産リスクのない企業に安全利率 r で貸出した場合の回収金額は等しい。

$$D_1 e^{-(R'-\alpha)T_1} + D_2 e^{-(R'-\alpha)T_2} = \hat{c}_B e^{-rT_2} \quad (3)$$

Step5. 借入金利の決定

$R = R'$ であれば、Step6へ進み、そうでなければ、Step4で求めた借入金利 R' を借入金利 R に代入し、Step2に戻る。

Step6. 借入形態の導出

これまで固定していた1期目の返済期日 T_1 として異なる期日を与え、Step1からStep5を実行す

ることで借入形態を導出する。また、設備投資金額についても同様に变化させ、各設備投資金額での借入形態を導出する。

Step7. コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態の決定

各設備投資金額において、コモディティ事業の期待利益を最大化する借入形態とそのときのコモディティ事業の最大期待利益 $\max \hat{p}_C$ を選出する。なお、期待返済期日 \hat{T} を、1期目の返済元金割合 $\frac{G_1}{G_1+G_2}$ と、2期目の返済元金割合 $\frac{G_2}{G_1+G_2}$ を重みとした1期目返済期日 T_1 と2期目返済期日 T_2 の期待値とする。

4. 数値実験

本章では、3章で示した方法に基づき、数値例によってコモディティ事業の最大期待利益 $\max \hat{p}_C$ 、及び借入形態を決定する。また、コモディティ事業の資本金や金利プレミアムがコモディティ事業の利益に与える影響についても分析を行う。

(1) データ、シミュレーションの設定

シミュレーションの設定は次の通り。

4.1 データ、シミュレーションの設定

シミュレーションの設定は次の通り。

- (1)式に従うコモディティ価格のサンプルパスを10000本発生させる。また、各サンプルパスのサンプリング間隔は100日とし、コモディティ事業の累積利益導出に際しては、台形近似を利用する。
- T_1 は500, 1000, 1500, 2000日後 ($T_1 = 2000$ 日後の場合は一括返済)の4通りを考え、設備投資金額はコモディティ事業の資本金に10000を加えたものから、150000を加えたものまで10000刻みで変化させる。
- コモディティ価格の初期値、コモディティ価格過程のパラメータ、安全利率 r 、借入満期 T_2 は表2に示すように、また、コモディティ事業の資本金、金利プレミアムも表2に示すように3通りずつ与え(全部で9通りの組合せ)、借入形態について分析する。

4.2 実験結果と考察

まず、金利プレミアムがコモディティ事業の期待利益

表1 コモディティ価格過程の初期値、パラメータ、安全利率、借入満期とコモディティ事業の資本金、金利プレミアム

S_0	\bar{S}	k	σ	$r(\%)$	T_2 (日後)
100	100	0.001	10	5	2000
コモディティ事業の資本金 C			金利プレミアム α		
20000	40,000	60,000	0.0%	2.5%	5.0%

表 2 最大期待利益とそのときの借入形態

設備投資金額	30000	40000	50000	60000	70000	80000	90000	100000
最大期待利益 $\max \hat{p}_c$	169291	158582	147873	136466	123316	111180	98805	85653
借入金率 $R(\%)$	5.00	5.00	5.00	5.01	5.02	5.03	5.03	5.03
1 期目返済期日 T_1 (日後)	500	500	500	500	500	1000	1000	1000
1 期目返済元金 G_1	10000	20000	30000	37759	37151	60000	68065	66500
2 期目返済元金 G_2	0	0	0	2241	12849	0	1935	13500
期待返済期日 \hat{T} (日後)	500	500	500	584	885	1000	1028	1169

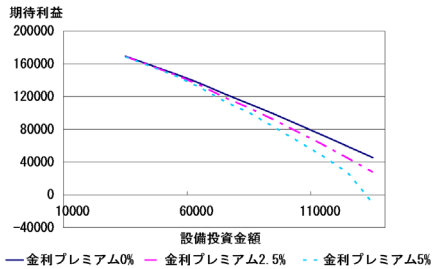


図 1 金利プレミアム別コモディティ事業期待利益 ($C=20000$)

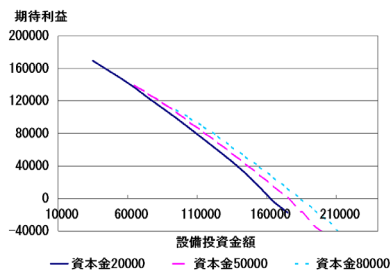


図 2 資本金別コモディティ事業期待利益 ($\alpha=0\%$)

に与える影響を見ていく。図 2 は、資本金 C を 20000 とし、各設備投資金額の下、金利プレミアム α を変化させた場合の、コモディティ事業の最大期待利益 $\max \hat{p}_c$ を表している。図 2 を見ると、金利プレミアムが小さいほど、コモディティ事業の期待利益は大きく、また設備投資金額が大きくなるにつれてその差も広がっていることがわかる。金利プレミアムが大きいほど、利率が高くなることに加え、設備投資金額が大きくなるほど、借入金額も増えるため、支払利息が増加し、倒産確率も増加する。そのため、設備投資金額が大きいほど、金利プレミアムの変化による、コモディティ事業の期待利益の差が大きくなる。

次にコモディティ事業の資本金の影響に注目する。図 3 は、金利プレミアム α を 0% とし、各設備投資金額の下、資本金 C を変化させた場合の、コモディティ事業の期待最大利益 $\max \hat{p}_c$ を表している。コモディティ事業が保有する資本金が多いほど、コモディティ事業の期待利益は大きく、また、その差は設備投資金額が大きくなるにつれて、拡大していることがわかる。設備投資金額が増加するほど、資本金では賅いきれずに、銀行からの借入金額は増加するため、倒産確率、

利息負担が増加する。よって、資本金が多いほど、借入金額が少なくてよく、倒産確率も小さくなり、また、支払利息の負担も小さくなるため、コモディティ事業の期待利益は大きくなる。

最後に、実際のコモディティ事業の最大期待利益 $\max \hat{p}_c$ とその時の借入形態について分析する。表 3 は金利プレミアムを 0%，資本金を 20000 とした時の、設備投資金額 30000 から 100000 における、コモディティ事業の最大期待利益とその時の借入形態、期待返済期日を表している。表 3 を見ると、設備投資金額が 30000 から 50000 までは 500 日後での一括返済であるが、設備投資金額が増加するにつれて、1 期目の返済期日 T_1 が遅くなる、或いは、2 期目の返済元金割合 $\frac{G_2}{G_1+G_2}$ が大きくなることにより、実質的に、返済期間が長くなっており、設備投資金額が 100000 以上の場合も同様な結果を示した。実際に、1 期目、2 期目の返済期日と 1 期目、2 期目の返済元金割合から算出した期待返済期日 \hat{T} を見ると、設備投資金額が増えるほど、長くなっている。つまり、設備投資金額が小さい場合は、返済期間を短くすることで、支払利息を小さくし、また、設備投資金額が大きい場合は、返済期間を長くし、倒産する可能性を少なくすることで、コモディティ事業の期待利益の最大化が行われることが確認できた。

5. まとめと結語

本論文では、借入れ形態に倒産が依存する事業の期待利益を最大化する初期投資額の借入形態を決定するモデルを提案した。数値実験では、各制約がコモディティ事業に与える影響、コモディティ事業の各設備投資金額での最大期待利益 $\max \hat{p}_c$ 及び、その時の借入形態を確認できた。

参考文献

- 1) D.Kluge and F.Lehrbass.: Default Probabilities in Structured Commodity Finance, Credit Risk, Physica-Verlag, pp.139-147 (2003)