2006－MPS－58（12）
2006／3／16

ピラミッド組織構造の階層間リエゾン配置モデル

澤田　清
流通科学大学 情報学部 経営情報学科

概要　本論文では，高さ H の完全 K 分木型ピラミッド組織構造に対して，異なる階層の 2 人のメンバー間にリエゾンを配置するモデルを提案する．そこでは，リエゾン頂点を深さ M の頂点およびその子孫である深さ N の頂点と隣接化させる場合に，総頂点間短縮経路長（全頂点対の最短経路の短縮長さの総和）を最大にする頂点深さの対 $(M,N)^*$ を求める．その結果，$K=2$ のとき，$H=3,4,5,6$ ならば $(M,N)^*=(0,3)$，$H=7,8,\cdots$ ならば $(M,N)^*=(0,5)$ であることが，また，$K=3,4,\cdots$ のときは，H に関係なく $(M,N)^*=(0,3)$ であることが示される．

A Model of Placing a Liaison between Two Levels in a Pyramid Organization Structure

Kiyoshi Sawada
Department of Information and Management Science, Faculty of Information Science,
University of Marketing and Distribution Sciences

Abstract　This paper proposes a model of placing a liaison which forms relations to two members of a different level in a pyramid organization structure which is a complete K-ary tree of height H. When the liaison node gets adjacent to a node with a depth M and its descendant with a depth N, an optimal pair of depth $(M,N)^*$ is obtained by maximizing the total shortening path length which is the sum of shortening lengths of shortest paths between every pair of all nodes. It is shown that $(M,N)^*=(0,3)$ for $H=3,4,5,6$ and $(M,N)^*=(0,5)$ for $H=7,8,\cdots$ when $K=2$ and $(M,N)^*=(0,3)$ when $K=3,4,\cdots$.

1.　はじめに

企業などの組織の構造には様々な種類があるが [1]，それらの基本となるものは上下間の一元的な命令系統に基づく階層構造（ピラミッド組織 [2] と呼ばれている）である．ピラミッド組織構造には，上司と直属の部下との間にのみ，情報のやりとりを行える関係が存在する．しかし，直接の上下関係を飛び越えた指示命令や他部門との協力が必要な場合には，事前に直接の上下間以外の関係形成を行うことが有効であると考えられる．

ピラミッド組織構造は，構成メンバーを頂点に，上下のメンバー間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内のメンバー間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に辺を追加することは，直接の上下関係以外の追加的関係の形成に相当する．筆者ら [3, 4] は，ピラミッド組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような，メンバー間の関係追加位置を求めるモデルをいくつか提案した．そこでは，完全 K 分木型のピラミッド組織構造に対して，全頂点対の最短経路長の総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）が最小となるような追加辺の位置を解析的に求めた．

組織内の上下関係以外の関係形成として，組織内の既存のメンバー間に関係を追加するのではなく，組織内の情報交換や調整を専門的に行う役職（リエゾンと呼ばれる [5]）を配置する方法がある．リエゾンを配置することの有効性は認識されているが，リエゾンをどこに配置すればよいか，すなわちリエゾンを組織内のどのメンバーと情報交換させればよいかについては，あまり議論されていない．

筆者 [6] は，高さ $H\,(H=2,3,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ 型のピラミッド組織構造にリエゾンを 1 人配置し，同じ階層内の 2 人のメンバーと情報交換を行うモデルを提案した．そこでは，すべての組織メンバー間の情報伝達が最も効率的となるような，リエゾンと情報交換を行う階層を求めた。

本論文では，高さ $H\,(H=3,4,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ 型のピラミッド組織構造にリエゾンを 1 人配置し，直系の関係を持つ異なる階層の 2 人のメンバーと情報交換を行うことを考える．このとき，すべての組織メンバー間の情報伝達が最も効率的となるような，リエゾンと情報交換を行う 2 人のメンバー

の階層を求める．すなわち，高さ H の完全 K 分木に頂点（リエゾン）を 1 つ追加し，その頂点を，深さ $M\,(M=0,1,\cdots,H-3)$ の頂点およびその子孫である深さ $N\,(N=M+3,M+4,\cdots,H)$ の頂点と隣接化させる場合に，総頂点間経路長を最小にする頂点深さの対 $(M,N)^*$ を求める．ただし，リエゾンは組織内の情報交換や調整を専門的に行う役職であるため，リエゾンと他のメンバーとの間の情報伝達の効率は考えない，すなわちリエゾンと完全 K 分木の各頂点との間の経路長は総頂点間経路長には含めない．ここで，完全 K 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の子の数が K である K 分木を指す [7]．また，深さは根からその頂点までの経路の長さを表す．

完全 K 分木の 2 頂点 v_i と $v_j\,(i,j=1,2,\cdots,(K^{H+1}-1)/(K-1))$ の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j}=l_{j,i}$，$l_{i,i}=0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したようなリエゾン頂点との隣接化を行った後の 2 頂点 v_i，v_j 間の最短経路の長さを $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j}-l'_{i,j}$ はリエゾン頂点との隣接化により 2 頂点間の最短経路の長さがどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを 2 頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j}-l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．

2. で本モデルの総頂点間短縮経路長の定式化を行い，3. で M を与えた場合の総頂点間短縮経路長を最大にする（すなわち，総頂点間経路長を最小にする）頂点深さ N^* を解析的に求める．さらに，4. で総頂点間短縮経路長を最大にする頂点深さの対 $(M,N)^*$ を求める．

2. 総頂点間短縮経路長の定式化

リエゾン頂点と隣接化される深さ M の頂点と深さ N の頂点をそれぞれ v_M，v_N とし，v_N の子孫の集合を V_1 とする．ただし，子孫はその頂点自身も含む．また，v_M の K 個の部分木のうち v_N を含む部分木の頂点集合から V_1 を除いた頂点の集合を V_2 と書く．また，V_1，V_2 以外の頂点の集合を V_3 とする．

このとき，V_1 と V_3 の頂点間の短縮経路長の総和は，

$$A_H(M,N)=W(H-N)\Big\{W(H)-W(H-M-1)\Big\}(N-M-2) \tag{1}$$

と表される．ただし，$W(h)\,(h=0,1,2,\cdots)$ は高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．次に，V_1 と V_2 の頂点間と，V_3 と V_2 の頂点間の短縮経路長の総和は，それぞれ，

$$B_H(M,N)=W(H-N)\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N-M-1}{2}\right\rfloor-1}\Big\{(K-1)W(H-M-i-1)+1\Big\}(N-M-2i-2)\,, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} C_H(M,N) &= \Big\{W(H)-W(H-M-1)\Big\}\sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N-M-1}{2}\right\rfloor-1}\Big\{(K-1)W(H-N+i-1)+1\Big\} \\ &\quad \times (N-M-2i-2) \end{aligned} \tag{3}$$

で与えられる．ただし，$\lfloor\cdot\rfloor$ は $\cdot$ を超えない最大の整数を表す．また，$\displaystyle\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$ と定義する．さらに，V_2 内の頂点間の短縮経路長の総和は，

$$\begin{aligned} D_H(M,N) &= \sum_{i=1}^{\left\lfloor\frac{N-M-1}{2}\right\rfloor-2}\Big\{(K-1)W(H-M-i-1)+1\Big\} \\ &\quad \times \sum_{j=1}^{\left\lfloor\frac{N-M-1}{2}\right\rfloor-i-1}\Big\{(K-1)W(H-N+j-1)+1\Big\}(N-M-2i-2j-2) \end{aligned} \tag{4}$$

となる．ただし，$\displaystyle\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$ と定義する．

以上より，総頂点間短縮経路長 $S_H(M,N)$ は，

$$S_H(M,N)=A_H(M,N)+B_H(M,N)+C_H(M,N)+D_H(M,N) \tag{5}$$

と定式化される．

3.　最適子孫深さ

ここでは，M を与えた場合の総頂点間短縮経路長を最大にする頂点深さ N^* を解析的に求める．

深さ N を $N = M + 2L + 1$（ただし，$L = 1, 2, \cdots, \lfloor \frac{H-M-1}{2} \rfloor$）と $N = M + 2L + 2$（ただし，$L = 1, 2, \cdots, \lfloor \frac{H-M-2}{2} \rfloor$）の 2 通りの場合に分けて考えると，$S_H(M, M+2L+1)$ と $S_H(M, M+2L+2)$ の関係について，次の定理 1 が成り立つ．

定理 1

$$S_H(M, M+2L+1) \; > \; S_H(M, M+2L+2) \tag{6}$$

ただし，$L = 1, 2, \cdots, \lfloor \frac{H-M-2}{2} \rfloor$ である．

定理 1 より，M が与えられた場合に総頂点間短縮経路長 $S_H(M, N)$ を最大にする N^* を求めるためには，$N = M + 2L + 1$ の場合だけを考えればよい．すなわち，$S_H(M, M+2L+1)$ を最大にする L^* を求めて，$N^* = M + 2L^* + 1$ とすればよい．

$$R_{H,M}(L) = S_H(M, M+2L+1) \tag{7}$$

とおいて，整理すると，

$$\begin{aligned} R_{H,M}(L) \quad = \quad & \frac{1}{(K-1)^3}\Big\{K^{2H-2M-3L+1} - 2 \cdot K^{2H-M-2L+1} - K^{2H-2M-L} + (K+1)K^{2H-M-L} \\ & - (K+1)K^{H-M-L+1} + 2 \cdot K^{H-M+1} - (2L-1)(K-1)K^{H+1}\Big\} \end{aligned} \tag{8}$$

が得られる．ただし，$L = 1, 2, \cdots, \lfloor \frac{H-M-1}{2} \rfloor$ である．以下では，$R_{H,M}(L)$ を最大にする L を求める．

$R_{H,M}(L)$ の L に関する差分を $\Delta R_{H,M}(L)$ とおくと，

$$\begin{aligned} \Delta R_{H,M}(L) \quad \equiv \quad & R_{H,M}(L+1) - R_{H,M}(L) \\ = \quad & \frac{1}{(K-1)^2}\Big[\Big\{-(K^2+K+1)K^{-2M-3L-2} + 2(K+1)K^{-M-2L-1} + K^{-2M-L-1} \\ & -(K+1)K^{-M-L-1}\Big\}K^{2H} + \Big\{(K+1)K^{-M-L} - 2K\Big\}K^H\Big] \end{aligned} \tag{9}$$

を得る．ただし，$L = 1, 2, \cdots, \lfloor \frac{H-M-1}{2} \rfloor - 1$ である．

$\Delta R_{H,M}(L)$ について解析した結果，次の (i)，(ii) が成り立つ．

(i) $K = 2$ かつ $L = 1$ のとき，$H \leq 2M + 6$ ならば $\Delta R_{H,M}(1) < 0$，$H \geq 2M + 7$ ならば $\Delta R_{H,M}(1) > 0$ である．

(ii) $K = 2$ かつ $L = 2, 3, \cdots, \lfloor \frac{H-M-1}{2} \rfloor - 1$，または $K = 3, 4, \cdots$ のとき，$\Delta R_{H,M}(L) < 0$ である．

(i)，(ii) より，次の定理 2 が得られる．

定理 2

(1) $K = 2$ のとき，$H \leq 2M + 6$ ならば $N^* = M + 3$，$H \geq 2M + 7$ ならば $N^* = M + 5$ である．

(2) $K = 3, 4, \cdots$ とき，$N^* = M + 3$ である．

4.　最適頂点対深さ

ここでは，総頂点間短縮経路長を最大にする頂点深さの対 $(M, N)^*$ を求める．

まず，$N = M + 3$，および $N = M + 5$ のそれぞれの場合について，総頂点間短縮経路長を最大にする M^* を求める．

$N = M + 3$ のときの総頂点間短縮経路長を $Q_{1,H}(M)$ とおくと，

$$\begin{aligned} Q_{1,H}(M) \quad \equiv \quad & S_H(M, M+3) \\ = \quad & R_{H,M}(1) \\ = \quad & \frac{1}{(K-1)^2}\left(-K^{2H-2M-2} + K^{2H-M-1} + K^{H-M} - K^{H+1}\right) \end{aligned} \tag{10}$$

を得る．ただし，$M=0,1,\cdots,H-3$ $(H=3,4,\cdots)$ である．

$Q_{1,H}(M)$ の M に関する差分を $\Delta Q_{1,H}(M)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\Delta Q_{1,H}(M) &\equiv Q_{1,H}(M+1)-Q_{1,H}(M)\\ &= \frac{1}{K-1}\left\{(K+1)K^{2H-2M-4}-K^{2H-M-2}-K^{H-M-1}\right\} \ < \ 0 \qquad (11)\end{aligned}$$

となる．ただし，$M=0,1,\cdots,H-4$ である．

また，$N=M+5$ のときの総頂点間短縮経路長を $Q_{2,H}(M)$ とおくと，

$$\begin{aligned}Q_{2,H}(M) &\equiv S_H(M,M+5)\\ &= R_{H,M}(2)\\ &= \frac{1}{(K-1)^2}\left\{-(K^2+K+1)K^{2H-2M-5}+(K+2)K^{2H-M-3}+(2K+1)K^{H-M-1}\right.\\ &\quad \left.-3K^{H+1}\right\} \qquad (12)\end{aligned}$$

を得る．ただし，$M=0,1,\cdots,H-5$ $(H=5,6,\cdots)$ である．

$Q_{2,H}(M)$ の M に関する差分を $\Delta Q_{2,H}(M)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\Delta Q_{2,H}(M) &\equiv Q_{2,H}(M+1)-Q_{2,H}(M)\\ &= \frac{1}{K-1}\left\{(K+1)(K^2+K+1)K^{2H-2M-7}-(K+2)K^{2H-M-4}-(2K+1)K^{H-M-2}\right\}\\ &< 0 \qquad (13)\end{aligned}$$

となる．ただし，$M=0,1,\cdots,H-6$ である．

以上より，次の定理 3 が得られる．

定理 3

(1) $N=M+3$ のとき，$M^*=0$ である．

(2) $N=M+5$ とき，$M^*=0$ である．

定理 2，定理 3 より，次の定理 4 が得られる．

定理 4

(1) $K=2$ のとき，$H=3,4,5,6$ ならば $(M,N)^*=(0,3)$，$H=7,8,\cdots$ ならば $(M,N)^*=(0,5)$ である．

(2) $K=3,4,\cdots$ とき，$(M,N)^*=(0,3)$ である．

参考文献

[1] Y. Takahara, M. Mesarovic, Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003.

[2] N. Takahashi, “Sequential analysis of organization design: a model and a case of Japanese firms”, European Journal of Operational Research, vol.36, pp.297–310, 1988.

[3] 澤田 清, “総頂点間経路長を最小にする完全 2 分木の階層間隣接化,” 日本応用数理学会論文誌, vol.13, no.3, pp.353–360, 2003.

[4] K. Sawada, R. Wilson, Models of adding relations to an organization structure of a complete K-ary tree, European Journal of Operational Research, to appear.

[5] 沼上 幹, 組織デザイン, 日本経済新聞社, 東京, 2004.

[6] 澤田 清, “ピラミッド組織構造のリエゾン配置モデル,” 情報処理学会研究報告, 2005-AL-101, pp.67–73, 2005.

[7] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, Introduction to Algorithms, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, Mass., 2001.