2006－MPS－59 (22)
2006／5／26

完全K分木型組織構造の2階層リエゾン配置モデル

澤田 清
流通科学大学 情報学部 経営情報学科

概要 本論文では，高さ H の完全 K 分木型組織構造に，2人のリエゾンを配置し，それぞれ異なる2つの階層の全メンバーと関係を追加するモデルを提案する．ここでは，1つのリエゾン頂点を深さ M の全頂点と隣接化させ，他の1つのリエゾン頂点を深さ M（ただし，$M < N$）の全頂点と隣接化させる場合に，完全 K 分木の全頂点対の最短経路の短縮長さを合計した総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さの対 $(M, N)^*$ を求める．その結果，$(M, N)^* = (H-1, H)$ が示される．

A Model of Placing Liaisons in the Two Levels of an Organization Structure of a Complete K-ary Tree

Kiyoshi Sawada
Department of Information and Management Science, Faculty of Information Science,
University of Marketing and Distribution Sciences

Abstract This paper proposes a model of placing two liaisons which form relations to all members of each level in two different levels of a organization structure which is a complete K-ary tree of height H. When one liaison node gets adjacent to all nodes with a depth M and the other liaison node gets adjacent to all nodes with a depth N which is greater than M, an optimal pair of depth $(M, N)^*$ is obtained by maximizing the total shortening path length which is the sum of shortening lengths of shortest paths between every pair of all nodes in the complete K-ary tree. It is shown that $(M, N)^* = (H-1, H)$.

1. はじめに

企業などの組織の構造には様々な種類があるが [1]，それらの基本となるものは上下間の一元的な命令系統に基づく階層構造（ピラミッド組織 [2] と呼ばれている）である．ピラミッド組織構造には，上司と直属の部下との間にのみ，情報のやりとりを行える関係が存在する．しかし，直接の上下関係を飛び越えた指示命令や他部門との協力が必要な場合には，事前に直接の上下間以外の関係形成を行うことが有効であると考えられる．

ピラミッド組織構造は，構成メンバーを頂点に，上下のメンバー間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内のメンバー間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に辺を追加することは，直接の上下関係以外の追加的関係の形成に相当する．筆者ら [3, 4] は，ピラミッド組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような，メンバー間の関係追加位置を求めるモデルをいくつか提案した．そこでは，完全 K 分木型のピラミッド組織構造に対して，全メンバー間の最短経路長の総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）が最小となるような関係追加位置を解析的に求めた．

組織内の上下関係以外の関係形成として，組織内の既存のメンバー間に関係を追加するのではなく，組織内の情報交換や調整を専門的に行う役職（リエゾンと呼ばれる [5]）を配置する方法がある．リエゾンを配置することの有効性は認識されているが，リエゾンをどこに配置すればよいか，すなわちリエゾンを組織内のどのメンバーと情報交換させればよいかについては，あまり議論されていない．

筆者 [6] は，高さ $H\,(H = 2, 3, \cdots)$ の完全 K 分木 $(K = 2, 3, \cdots)$ 型ピラミッド組織構造にリエゾンを1人配置し，同じ階層内の全メンバーと情報交換を行う，すなわち同じ階層内の全メンバーと関係を追加するモデルを提案した．そこでは，すべての組織メンバー間の情報伝達が最も効率的となるような，リエゾンと関係追加を行う階層を求めた．

本論文では，リエゾンを1人配置するモデルを拡張し，リエゾンを2人配置して異なる2つの階層それぞれの全メンバーと関係追加を行うモデルを提案する．すなわち，高さ $H\,(H = 3, 4, \cdots)$ の完全 K 分木 $(K = 2, 3, \cdots)$ 型組織構造に，2つのリエゾン頂点を追加し，1つのリエゾン頂点を深さ $M\,(M = 2, 3, \cdots, H-1)$ の全頂点と隣接化させ，他の1つのリエゾン頂点を深さ $N\,(N = M+1, M+2, \cdots, H)$ の全頂点と隣接化させる場合に，総頂点間経路長を最小にする最適深さの対 $(M, N)^*$ を求める．ただし，リエゾンは組織内の情報交換や調整を専門的に行う役職であるため，リエゾンと他のメンバーとの間の情報伝達の効率は考

えない，すなわちリエゾンと完全 K 分木の各頂点との間の経路長は総頂点間経路長には含めない．ここで，完全 K 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の子の数が K である K 分木を指す [7]．また，深さは根からその頂点までの経路の長さを表す．

完全 K 分木の 2 頂点 v_i と v_j $(i,j=1,2,\cdots,(K^{H+1}-1)/(K-1))$ の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j}=l_{j,i}$，$l_{i,i}=0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したようなリエゾン頂点との隣接化を行った後の 2 頂点 v_i，v_j 間の最短経路の長さを $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j}-l'_{i,j}$ はリエゾン頂点との隣接化により 2 頂点間の最短経路の長さがどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを 2 頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j}-l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．

2. で本モデルの総頂点間短縮経路長の定式化を行い，3. で総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さの対 $(M,N)^*$ を解析的に求める．

2. 総頂点間短縮経路長の定式化

ここではまず，リエゾンを 1 人だけ配置する場合の総頂点間短縮経路長の定式化 [6] を示し，その後でリエゾンを 2 人配置する場合の総頂点間短縮経路長の定式化を行う．

2.1 リエゾン 1 人配置モデル

ここでは，高さ $H\,(H=2,3,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ に，1 つのリエゾン頂点を追加し，深さ $L\,(L=2,3,\cdots,H)$ の全頂点と隣接化させたときの総頂点間短縮経路長の定式化を示す．

ここで，深さ L 以上の頂点間の短縮経路長の総和は，

$$\alpha_H(L)=\left\{W(H-L)\right\}^2 K^L(K-1)\sum_{i=1}^{L-1} iK^i \tag{1}$$

で与えられる．ただし，$W(h)(h=0,1,2,\cdots)$ は，高さ h の完全 K 分木の頂点数を表す．また，深さ L 以上の頂点と深さ L 未満の頂点との間の短縮経路長の総和は，

$$\beta_H(L)=2W(H-L)K^L(K-1)\sum_{i=1}^{L-2}(L-i-1)\,iK^i\,, \tag{2}$$

深さ L 未満の頂点間の短縮経路長の総和は，

$$\gamma(L)=K^L(K-1)\sum_{i=1}^{L-3}\sum_{j=1}^{i}(i-j+1)\,jK^j \tag{3}$$

となる．ただし，$\displaystyle\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$ と定義する．

以上より，深さ L の全頂点とリエゾン頂点を隣接化させたときの総頂点間短縮経路長 $\sigma_H(L)$ は，

$$\sigma_H(L)=\alpha_H(L)+\beta_H(L)+\gamma(L) \tag{4}$$

と定式化される．

2.2 リエゾン 2 人配置モデル

ここでは，2.1 のリエゾン 1 人配置モデルの定式化を拡張し，高さ $H\,(H=3,4,\cdots)$ の完全 K 分木 $(K=2,3,\cdots)$ に，2 つのリエゾン頂点を追加し，それぞれ深さ $M\,(M=2,3,\cdots,H-1)$ と深さ $N\,(N=M+1,M+2,\cdots,H)$ の各階層の全頂点と隣接化させたときの総頂点間短縮経路長の定式化を行う．ここで，深さ M 未満の頂点の集合を V_1，深さ M 以上 N 未満の頂点の集合を V_2，深さ N 以上の頂点の集合を V_3 と書くことにする．

このとき，V_3 内の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (1) を用いて，

$$A_H(N)=\alpha_H(N) \tag{5}$$

と与えられる．また，V_1 と V_3 の頂点間および V_2 と V_3 の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (2) を用いて，

$$B_H(N)=\beta_H(N) \tag{6}$$

となる．さらに，V_1 内の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (3) を用いて，

$$C(M) = \gamma(M)\,, \tag{7}$$

V_1 と V_2 の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (2) を用いて，

$$D(M,N) = \beta_{N-1}(M) \tag{8}$$

と定式化される．V_2 内の頂点間のうち，深さ M の頂点を根とする部分木内の頂点間の短縮経路長の総和は，式 (3) を用いて，

$$E(M,N) = \gamma(N-M)K^M \tag{9}$$

と与えられる．さらに，V_2 内の頂点間のうち，深さ M の頂点を根とする異なる部分木間の頂点間の短縮経路長は，次のように定式化される．すなわち，深さ M の頂点とリエゾン頂点との隣接化のみによる短縮経路長の総和は，式 (1) を用いて，

$$F(M,N) = \alpha_{N-1}(M)\,, \tag{10}$$

深さ M の頂点とリエゾン頂点との隣接化による経路長短縮後に，さらに深さ N の頂点とリエゾン頂点との隣接化により短縮される経路長の総和は，

$$G(M,N) = (K^M-1)\sum_{i=1}^{N-M-2} K^{N-i} \sum_{j=1}^{N-M-i-1} K^{N-M-j}(N-M-i-j) \tag{11}$$

となる．ただし，ここでも，$\sum_{i=1}^{0}\cdot = 0$，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot = 0$ と定義する．

以上より，2 つのリエゾン頂点をそれぞれ深さ M と深さ N の各階層の全頂点と隣接化させたときの総頂点間短縮経路長 $S_H(M,N)$ は，

$$\begin{aligned}
S_H&(M,N)\\
&= A_H(N) + B_H(N) + C(M) + D(M,N) + E(M,N) + F(M,N) + G(M,N)\\
&= \Big\{W(H-N)\Big\}^2 K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-1} iK^i + 2W(H-N)K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-2}(N-i-1)\,iK^i\\
&\quad + K^M(K-1)\sum_{i=1}^{M-3}\sum_{j=1}^{i}(i-j+1)\,jK^j + 2W(N-M-1)K^M(K-1)\sum_{i=1}^{M-2}(M-i-1)\,iK^i\\
&\quad + K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-M-3}\sum_{j=1}^{i}(i-j+1)\,jK^j + \Big\{W(N-M-1)\Big\}^2 K^M(K-1)\sum_{i=1}^{M-1} iK^i\\
&\quad + (K^M-1)\sum_{i=1}^{N-M-2} K^{N-i}\sum_{j=1}^{N-M-i-1} K^{N-M-j}(N-M-i-j)
\end{aligned} \tag{12}$$

と定式化される．

式 (12) に

$$W(h) = \frac{K^{h+1}-1}{K-1} \tag{13}$$

を代入して整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
S_H&(M,N)\\
&= \frac{1}{2(K-1)^3}\Bigg[2(NK-K-N)K^{2H+2} + 2K^{2H-N+3} - 4K^{H+N+2} + 4(NK-N+1)K^{H+2}\\
&\quad + 2(N-M)(K-1)K^{N+M+1} + (N-M)\Big\{(N-M-1)K^2 - 2(N-M)K + N - M + 1\Big\}K^{N+1}\\
&\quad + M(M-1)(K-1)^2K^{M+1}\Bigg].
\end{aligned} \tag{14}$$

以下では，式 (14) の $S_H(M,N)$ を最大にする最適深さの対 $(M,N)^*$ を求める．

3. 最適深さ対

ここでは，M を与えた場合に総頂点間短縮経路長を最大にする深さ N^* を求めた後で，総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さの対 $(M,N)^*$ を求める．

3.1 M を与えた場合の最適深さ N^*

M を与えた場合の総頂点間短縮経路長を最大にする深さ N^* を求める.

$$R_{H,M}(N) = S_H(M,N) \tag{15}$$

とおき, $R_{H,M}(N)$ の N に関する差分をとると,

$$\begin{aligned}
&\Delta R_{H,M}(N) \\
&\equiv \; R_{H,M}(N+1) - R_{H,M}(N) \\
&= \; \frac{1}{2(K-1)^2}\Big[\Big(2K^2 - 2K^{-N+2}\Big)K^{2H} + \Big(4K^2 - 4K^{N+2}\Big)K^H + 2\Big\{(N-M)(K-1)+K\Big\}K^{N+M+1} \\
&\quad + \Big\{(N-M)(N-M+1)(K-1)^2 - 2K\Big\}K^{N+1}\Big] > 0
\end{aligned} \tag{16}$$

を得る. ただし, $N = M+1, M+2, \cdots, H-1$ である.

以上より, M を与えた場合の総頂点間短縮経路長を最大にする深さ N は, $N^* = H$ である.

3.2 最適深さ対 $(M,N)^*$

総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さの対 $(M,N)^*$ を求める.

式 (14) の $S_H(M,N)$ に $N = H$ を代入した式を $Q_H(M)$ とおくと,

$$\begin{aligned}
&Q_H(M) \\
&\equiv \; S_H(M,H) \\
&= \; \frac{1}{2(K-1)^3}\Big[2(HK-K-H-2)K^{2H+2} + 2(2HK+K-2H+2)K^{H+2} \\
&\quad +2(H-M)(K-1)K^{H+M+1} + (H-M)\Big\{(H-M-1)K^2 - 2(H-M)K + H - M + 1\Big\}K^{H+1} \\
&\quad + M(M-1)(K-1)^2K^{M+1}\Big]
\end{aligned} \tag{17}$$

を得る. $Q_H(M)$ の M に関する差分を計算すると,

$$\begin{aligned}
&\Delta Q_H(M) \\
&\equiv \; Q_H(M+1) - Q_H(M) \\
&= \; \frac{1}{2(K-1)}\Big[2\Big(H-M-1-\frac{1}{K-1}\Big)\Big(K^M-1\Big)K^{H+1} + \Big\{(K-1)M^2 + (K+1)M\Big\}K^{M+1}\Big] \\
&> \; 0
\end{aligned} \tag{18}$$

となる. ただし, $M = 2, 3, \cdots, H-2$ である.

以上より, 総頂点間短縮経路長を最大にする最適深さ対は, $(M,N)^* = (H-1, H)$ である.

参考文献

[1] Y. Takahara, M. Mesarovic, Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003.

[2] N. Takahashi, "Sequential analysis of organization design: a model and a case of Japanese firms", European Journal of Operational Research, vol.36, pp.297–310, 1988.

[3] 澤田 清, "総頂点間経路長を最小にする完全 2 分木の階層間隣接化," 日本応用数理学会論文誌, vol.13, no.3, pp.353–360, 2003.

[4] K. Sawada, R. Wilson, Models of adding relations to an organization structure of a complete K-ary tree, European Journal of Operational Research, in press.

[5] 沼上 幹, 組織デザイン, 日本経済新聞社, 東京, 2004.

[6] 澤田 清, "総頂点間経路長を最小にする組織構造の同階層内リエゾン配置モデル," 日本応用数理学会 2005 年度年会講演予稿集, pp.382–383, 2005.

[7] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, Introduction to Algorithms, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, Mass., 2001.