2006－MPS－61（14）
2006／9／15

# 完全K分木型組織構造の多階層リエゾン配置モデル

澤田　清
流通科学大学 情報学部 経営情報学科

**概要**　本論文では，高さ $H$ の完全 $K$ 分木型組織構造に，$L\,(L=2,3,\cdots,H-1\,)$ 人のリエゾンを配置し，それぞれ異なる $L$ 個の階層の全メンバーと関係形成するモデルを提案する．ここでは，完全 $K$ 分木の全頂点対の最短経路の短縮長さを合計した総頂点間短縮経路長を最大化することによって，リエゾンと関係形成する最適な $L$ 個の階層を求める．

# A Model of Placing Liaisons in Multi-levels of an Organization Structure of a Complete K-ary Tree

Kiyoshi Sawada
Department of Information and Management Science, Faculty of Information Science,
University of Marketing and Distribution Sciences

**Abstract**　This paper proposes a model of placing $L\,(L=2,3,\cdots,H-1\,)$ liaisons which form relations to all members of each level in $L$ different levels of a organization structure which is a complete $K$-ary tree of height $H$. An optimal set of $L$ levels in which liaisons form relations is obtained by maximizing the total shortening path length which is the sum of shortening lengths of shortest paths between every pair of all nodes in the complete $K$-ary tree.

## 1.　はじめに

企業などの組織の構造には様々な種類があるが [1]，それらの基本となるものは上下間の一元的な命令系統に基づく階層構造（ピラミッド組織 [2] と呼ばれている）である．ピラミッド組織構造には，上司と直属の部下との間にのみ，情報のやりとりを行える関係が存在する．しかし，直接の上下関係を飛び越えた指示命令や他部門との協力が必要な場合には，事前に直接の上下間以外の関係形成を行うことが有効であると考えられる．

ピラミッド組織構造は，構成メンバーを頂点に，上下のメンバー間関係を辺に対応させると，根付き木であると考えることができる．このとき，各頂点間の経路は組織内のメンバー間の関係をたどる情報伝達経路に対応している．また，根付き木に辺を追加することは，直接の上下関係以外の追加的関係の形成に相当する．筆者ら [3, 4] は，ピラミッド組織構造を対象として，組織全体の情報伝達が最も効率的になるような，メンバー間の関係追加位置を求めるモデルをいくつか提案した．そこでは，完全 $K$ 分木型のピラミッド組織構造に対して，全メンバー間の最短経路長の総和（以後，総頂点間経路長と呼ぶ）が最小となるような関係追加位置を解析的に求めた．

組織内の上下関係以外の関係形成として，組織内の既存のメンバー間に関係を追加するのではなく，組織内の情報交換や調整を専門的に行う役職（リエゾンと呼ばれる [5]）を配置する方法がある．リエゾンを配置することの有効性は認識されているが，リエゾンをどこに配置すればよいか，すなわちリエゾンを組織内のどのメンバーと情報交換させればよいかについては，あまり議論されていない．

筆者 [6] は，高さ $H\,(H=2,3,\cdots)$ の完全 $K$ 分木 $(K=2,3,\cdots)$ 型ピラミッド組織構造にリエゾンを 1 人配置し，同じ階層内の全メンバーと情報交換を行う，すなわち同じ階層内の全メンバーと関係を追加するモデルを提案した．そこでは，すべての組織メンバー間の情報伝達が最も効率

的となるような，リエゾンと関係追加を行う階層を求めた．さらに筆者 [7] は，リエゾンを 2 人配置して異なる 2 つの階層それぞれの全メンバーと関係追加を行うモデルについても，リエゾンと関係追加を行う 2 つの最適な階層を求めた．

本論文では，モデルをより一般化するために，$L$ 人のリエゾンを配置し，それぞれ異なる $L$ 個の階層の全メンバーと関係形成するモデルを提案する．すなわち，高さ $H\,(H=3,4,\cdots)$ の完全 $K$ 分木 $(K=2,3,\cdots)$ 型組織構造に，$L\,(L=2,3,\cdots,H-1)$ 個のリエゾン頂点を追加し，それぞれ異なる $L$ 個の階層の全頂点と隣接化させるモデルを提案する．ここでも，すべての組織メンバー間の情報伝達が最も効率的となる，すなわち完全 $K$ 分木の総頂点間経路長が最小となる $L$ 個の階層を求める．ただし，リエゾンは組織内の情報交換や調整を専門的に行う役職であるため，リエゾンと他のメンバーとの間の情報伝達の効率は考えない，すなわちリエゾンと完全 $K$ 分木の各頂点との間の経路長は総頂点間経路長には含めない．ここで，完全 $K$ 分木は，すべての葉の深さが同じで，かつすべての内部頂点の子の数が $K$ である $K$ 分木を指す [8]．また，深さは根からその頂点までの経路の長さを表す．

完全 $K$ 分木の 2 頂点 $v_i$ と $v_j\,(i,j=1,2,\cdots,(K^{H+1}-1)/(K-1))$ の間の最短経路の長さを $l_{i,j}$ とすると（ただし $l_{i,j}=l_{j,i}$，$l_{i,i}=0$），$\sum_{i<j} l_{i,j}$ は総頂点間経路長を表す．また，上述したようなリエゾン頂点との隣接化を行った後の 2 頂点 $v_i$，$v_j$ 間の最短経路の長さを $l'_{i,j}$ とすると，$l_{i,j}-l'_{i,j}$ はリエゾン頂点との隣接化により 2 頂点間の最短経路の長さがどれだけ短縮されたかを表す．ここでは，これを 2 頂点間の短縮経路長と呼ぶ．さらに，全頂点間の短縮経路長の総和 $\sum_{i<j}(l_{i,j}-l'_{i,j})$ を，総頂点間短縮経路長と定義する．

2. でリエゾン 1 人配置モデルにおける総頂点間短縮経路長を最大にする階層を示し，3. でリエゾン $L$ 人配置モデルへの一般化を展開する．

## 2.　リエゾン 1 人配置モデル

リエゾン 1 人配置モデル [6] は，高さ $H\,(H=2,3,\cdots)$ の完全 $K$ 分木 $(K=2,3,\cdots)$ 型組織構造に，1 つのリエゾン頂点を追加し，深さ $N\,(N=2,3,\cdots,H)$ の全頂点と隣接化させるモデルである．

このモデルの総頂点間短縮経路長 $S_1(N)$ は，

$$\begin{aligned} S_1(N) &= \Big\{W(H-N)\Big\}^2 K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-1} iK^i + 2W(H-N)K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-2}(N-i-1)\,iK^i \\ &\quad + K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=1}^{i}(i-j+1)\,jK^j \qquad (1) \end{aligned}$$

と定式化される．ただし，$W(h)\,(h=0,1,2,\cdots)$ は高さ $h$ の完全 $K$ 分木の頂点数を表す．また，$\displaystyle\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$，$\displaystyle\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$ と定義する．

式 (1) の $S_1(N)$ の $N$ に関する差分 $S_1(N+1)-S_1(N)$ が常に正になることから，次の定理 1 が得られる．

**定理 1**　$S_1(N)$ を最大にする $N$ は，$N^*=H$ である．

## 3.　リエゾン L 人配置モデル

リエゾン $L$ 人配置モデルは，高さ $H\,(H=3,4,\cdots)$ の完全 $K$ 分木 $(K=2,3,\cdots)$ 型組織構造に，$L\,(L=2,3,\cdots,H-1)$ 個のリエゾン頂点を追加し，それぞれ異なる $L$ 個の階層の全頂点と

隣接化させるモデルである．

ここで，$L-1$ 個のリエゾン頂点が $L-1$ 個の階層の全頂点とそれぞれ隣接化されているとし，$L-1$ 個の階層の中で最も上の階層の深さを $N$ とする．ただし，$N=3,4,\cdots,H-L+2$ である．ここで，さらに 1 個のリエゾン頂点を追加し，深さ $N$ の階層より上の深さ $M$ の階層の全頂点と隣接化させる．すなわち，$M=2,3,\cdots,N-1$ とする．

このとき，深さ $M$ の階層の全頂点と隣接化させるリエゾン頂点を追加することによる総頂点間短縮経路長の増加長 $T(N,M)$ を定式化する．ここで，深さ $N$ 以上の頂点間の経路長と深さ $N$ 以上の頂点と深さ $N$ 未満の頂点との間の経路長は変化しないので，深さ $N$ 未満の頂点間の短縮経路長のみを考えればよい．深さ $M$ の階層にリエゾン頂点を追加する前の深さ $N$ 未満の頂点間の短縮経路長の総和を $S_2(N)$，深さ $M$ の階層にリエゾン頂点を追加した後の深さ $N$ 未満の頂点間の短縮経路長の総和を $S_3(N,M)$ とすると，それぞれ次のように定式化される．

$$S_2(N)=K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-3}\sum_{j=1}^{i}(i-j+1)\,jK^j\,, \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&S_3(N,M)\\
&= K^M(K-1)\sum_{i=1}^{M-3}\sum_{j=1}^{i}(i-j+1)\,jK^j+2\,W(N-M-1)K^M(K-1)\sum_{i=1}^{M-2}(M-i-1)\,iK^i\\
&\quad +K^N(K-1)\sum_{i=1}^{N-M-3}\sum_{j=1}^{i}(i-j+1)\,jK^j+\Big\{W(N-M-1)\Big\}^2K^M(K-1)\sum_{i=1}^{M-1}iK^i\\
&\quad +(K^M-1)\sum_{i=1}^{N-M-2}K^{N-i}\sum_{j=1}^{N-M-i-1}K^{N-M-j}(N-M-i-j)\,.
\end{aligned} \tag{3}$$

ただし，ここでも，$W(h)\,(h=0,1,2,\cdots)$ は高さ $h$ の完全 $K$ 分木の頂点数を表し，$\sum_{i=1}^{0}\cdot=0$，$\sum_{i=1}^{-1}\cdot=0$ と定義する．以上より，$T(N,M)$ は，

$$T(N,M)=S_3(N,M)-S_2(N) \tag{4}$$

となる．

式 (4) に

$$W(h)=\frac{K^{h+1}-1}{K-1} \tag{5}$$

を代入して整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}
T(N,M) &= \frac{1}{2(K-1)^2}\Big[2(N-M)K^{N+M+1}+M(M-1)(K-1)K^{M+1}\\
&\quad +\Big\{(-2NM+M^2+M)K+2NM-M^2-2N+M\Big\}K^{N+1}\Big].
\end{aligned} \tag{6}$$

以下では，式 (6) の $T(N,M)$ を最大にする $M$ と $N$ について考える．

$T(N,M)$ の $M$ に関する差分をとると，

$$\begin{aligned}
\Delta T(N,M) &\equiv T(N,M+1)-T(N,M)\\
&= \frac{1}{2(K-1)^2}\Big[2\Big(K^M-1\Big)\Big\{(N-M-1)K-(N-M)\Big\}K^{N+1}\\
&\quad +M(K-1)\Big\{(K-1)M+K+1\Big\}K^{M+1}\Big]\ >\ 0
\end{aligned} \tag{7}$$

を得る．ただし，$M=2,3,\cdots,N-2$ である．
このことから，次の定理 2 が得られる．

**定理 2** 各 $N$ に対して $T(N,M)$ を最大にする $M$ は，$M^*=N-1$ である．

式 (6) の $T(N,M)$ に $M=N-1$ を代入した式を $R(N)$ とおくと，

$$\begin{aligned} R(N) &\equiv T(N,N-1) \\ &= \frac{1}{2(K-1)^2}\Big[2K^{2N}+\Big\{(-N^2+N)K^2+(2N^2-4N)K-(N^2-3N+2)\Big\}K^N\Big] \end{aligned} \tag{8}$$

を得る．さらに，$R(N)$ の $N$ に関する差分を計算すると，

$$\begin{aligned} \Delta R(N) &\equiv R(N+1)-R(N) \\ &= \frac{1}{2(K-1)}\Big[\Big(2K^{N-1}+2K^{N-2}-N^2-N\Big)K^{N+2} \\ &\quad +\Big\{2(N^2-N-1)K-(N^2-3N+2)\Big\}K^N\Big] > 0 \end{aligned} \tag{9}$$

となる．ただし，$N=3,4,\cdots,H-L+1$ である．
以上より，次の定理 3 が得られる．

**定理 3** $R(N)$ を最大にする $N$ は，$N^*=H-L+2$ である．

定理 1，定理 2，定理 3 より，次の定理 4 が得られる．

**定理 4** 総頂点間短縮経路長を最大にする $L$ 個の階層の深さは，$(H,H-1,\cdots,H-L+1)$ である．

# 参考文献


[1] Y. Takahara, M. Mesarovic, Organization Structure: Cybernetic Systems Foundation, Kluwer Academic/Plenum Publishers, New York, 2003.

[2] N. Takahashi, “Sequential analysis of organization design: a model and a case of Japanese firms”, European Journal of Operational Research, vol.36, pp.297–310, 1988.

[3] 澤田 清, “総頂点間経路長を最小にする完全 2 分木の階層間隣接化,” 日本応用数理学会論文誌, vol.13, no.3, pp.353–360, 2003.

[4] K. Sawada, R. Wilson, Models of adding relations to an organization structure of a complete $K$-ary tree, European Journal of Operational Research, vol.174, pp.1491–1500, 2006.

[5] 沼上 幹, 組織デザイン, 日本経済新聞社, 東京, 2004.

[6] 澤田 清, “総頂点間経路長を最小にする組織構造の同階層内リエゾン配置モデル,” 日本応用数理学会 2005 年度年会講演予稿集, pp.382–383, 2005.

[7] 澤田 清, “完全K分木型組織構造の 2 階層リエゾン配置モデル,” 情報処理学会研究報告, 2006-MPS-59, pp.85–88, 2006.

[8] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest, C. Stein, Introduction to Algorithms, 2nd ed., MIT Press, Cambridge, Mass., 2001.