

1ビット通信セルラ・オートマトン上での 非正則数列生成アルゴリズムについて

上川 直紀

梅尾 博司

大阪電気通信大学大学院 工学研究科 情報工学専攻

概要

セルラ・オートマトンは、John von Neumann によって考案された。自己複製機械の研究で考案されたセルラ・オートマトンであるが、現在では複雑系などの多くの分野で研究がなされている。これらの研究では、セル間の通信量については言及されていない。Mazoyer, Umeo らにより、セル間通信量を1ビットに制限されたモデルである $CA_{1\text{-bit}}$ が考案され、従来のモデルで考察されている問題に対して、同一時間で解決できる $CA_{1\text{-bit}}$ のアルゴリズムが存在することを明らかにした。 $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$, Fibonacci などいくつかの non-regular な数列が、 $CA_{1\text{-bit}}$ 上で実時間で生成可能なことが知られている。本稿では、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムを $CA_{1\text{-bit}}$ 上に実装し、それぞれ内部状態が 3, 3, 遷移規則数が 7, 8 の $CA_{1\text{-bit}}$ で実現可能なことを示す。また、パーソナルコンピュータを使用して、これらのアルゴリズムが内部状態数についての最適解であることを示す。

キーワード

セルラ・オートマトン, セル間通信量, 1ビット通信セルラ・オートマトン, 実時間数列生成問題

Some algorithms for real-time generation of non-regular sequences on 1-bit inter-cell-communication cellular automata

Naoki Kamikawa and Hiroshi Umeo

Osaka Electro-Communication Univ., Graduate School of Engineering

Abstract

A model of cellular automata(CA) was devised for studying self-reproduction by John von Neumann. It is studied in many fields such as complex systems. However, inter-cell-communication is not so studied. Mazoyer and Umeo devised 1-bit inter-cell-communication cellular automata ($CA_{1\text{-bit}}$). We study some algorithms on $CA_{1\text{-bit}}$. It is shown that infinite non-regular sequences such as sequences $\{2^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ and Fibonacci sequences can be generated in real-time by $CA_{1\text{-bit}}$. In this paper, we study real-time sequence generation problem on $CA_{1\text{-bit}}$. We show that sequences $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ can be generated by a $CA_{1\text{-bit}}$ with 3 internal states and 7 transition rules in real-time, sequences $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ can be generated by a $CA_{1\text{-bit}}$ with 3 internal states and 8 transition rules in real-time and these sequences can't be generated by a $CA_{1\text{-bit}}$ with 2 internal states in real-time.

key words

cellular automata, 1-bit inter-cell-communication cellular automata, real-time sequence generation problem

1 はじめに

セルラ・オートマトン(CA)は、従来から網目結合を持つ並列計算モデルとして、また最近では複雑系、人工生命など数多くの分野で精力的に研究がなされている。これらのセルラ・オートマトンにおいて、隣接する2つのセル間の通信量は $O(1)$ ビットであるが、セル間通信量は有限状態記述というオートマトンの定義には明示的には現われない。Mazoyer [2],[3] ならびに Umeo [4]-[6] らは、

セル間の通信量を1ビットに制限したセルラ・オートマトン・モデル $CA_{1\text{-bit}}$ を考案し、従来のモデルで考察されている問題に対して、同一時間で解決できる $CA_{1\text{-bit}}$ のアルゴリズムが存在することを明らかにした。 $CA_{1\text{-bit}}$ は最も単純で、計算能力の低いモデルの1つと考えられている。

本稿では、 $CA_{1\text{-bit}}$ 上での数列生成問題を考察する。数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$, 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムを $CA_{1\text{-bit}}$ 上に実装し、それぞれ内部

状態数 3, 3, 遷移規則数 7, 8 の $CA_{1\text{-bit}}$ で実現可能なことを示す。また、パーソナルコンピュータを使用して、これらのアルゴリズムが内部状態数についての最適解であることを示す。

2 1ビット通信セルラ・オートマトン

CA のセル間通信量は $O(1)$ ビットであるが、ここではセル間通信量を 1 ビットに制限した CA のモデル $CA_{1\text{-bit}}$ を考える。 $CA_{1\text{-bit}}$ はセルと呼ばれる有限状態オートマトン A の有限個のアレイで構成される。図 1 の様に、各セルは隣接セルへの 1 ビット信号の出力ラインと、隣接セルから 1 ビット信号の入力ラインで接続される。セルは左端から $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$ と呼ぶ。

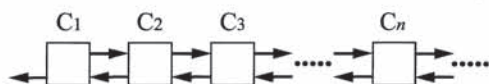


図 1: 1次元接続セルラ・オートマトン

有限状態オートマトン A を定式化すると、 $A = (Q, \delta)$ となる。Q は内部状態の有限集合である。 δ は状態遷移関数であり、次のように定義される。

$$\delta: Q \times \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow Q \times \{0,1\} \times \{0,1\}$$

この場合の状態遷移関数 δ は次の意味を持つ。

$$\delta(p, x, y) = (q, x', y') \\ p, q \in Q, x, y, x', y' \in \{0,1\}$$

あるステップ t 時に、セル C_i の内部状態が p であり、左側のセル C_{i-1} から 1 ビットの信号 x 、右側のセル C_{i+1} から 1 ビットの信号 y が入力されると、次のステップ $t+1$ 時にセル C_i の内部状態が q に遷移し、左側のセル C_{i-1} に 1 ビットの信号 x' 、右側のセル C_{i+1} に 1 ビットの信号 y' を出力する。

M を $CA_{1\text{-bit}}$ とし、 $\{t(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を無限に単調増加する正整数の数列とする。任意の n について、時刻 $t = t(n)$ 時にセル C_1 から左側に信号 '1' が出力されると、M は実時間で、数列 $\{t(n) | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成すると言う。上記の条件に満足な M を、実時間数列生成機と呼ぶ。

3 $CA_{1\text{-bit}}$ 上での数列生成問題

3.1 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$

数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムの時間-空間図式を図 2 に示す。

このアルゴリズムは、内部状態数 3 の $CA_{1\text{-bit}}$ で実現している。使用している内部状態は Q, N0, R である。このアルゴリズムの遷移規則を表 1 に示す。

内部状態 Q は静止状態であり、内部状態 Q のセルは信号 '1' が入力されない限り、内部状態 Q を維持し続ける。内部状態 R のセルは信号 '1' が入力されると、入力方向と反対側に信号 '1' を出力する。また、セルは内部状態 R を保持し続ける。内部状態 R のセルが伝わる、右方向に進む信号 '1' を A 波、左方向に進む信号 '1' を B 波とする。A 波、B 波は共に、信号 '1' を隣接するセルに伝えるのに 1 ステップ必要となる。よって、A 波、B 波は速さ 1/1 の波である。

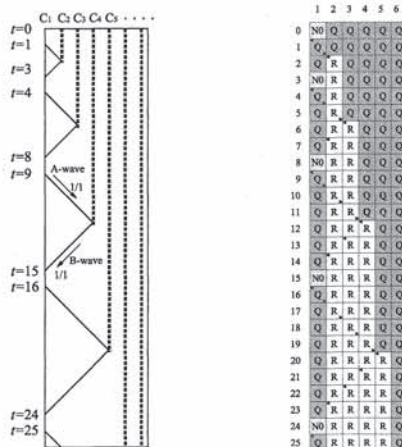


図 2: n^2 の生成を表す時間-空間図式

図 3: シミュレーション結果 ($t = 25$ まで)

| Q | R=0 | R=1 | Q | R=0 | R=1 | Q | R=0 | R=1 |
|-----|---------|----------|-----|---------|-----|-----|---------|---------|
| L=0 | (Q,0,0) | (N0,0,0) | L=0 | (Q,1,1) | - | L=0 | (R,0,0) | (R,1,0) |
| L=1 | (R,1,0) | - | L=1 | - | - | L=1 | (R,0,1) | - |

表 1: 数列 n^2 生成アルゴリズムの遷移規則表

セル C_1 の内部状態が Q、セル C_2 からセル C_{i-1} の内部状態が R、セル C_i の以降の内部状態が Q の 1 次元セルラ・オートマトンを考える。 $t = j$ の時セル C_1 から左右両方向に信号 '1' が出力される。これにより、A 波が生成され、A 波はセル空間を右方向に進む。A 波がセル C_i に到達する時刻は $t = j + i - 1$ である。A 波は反射し左方向に進む波、B 波に変化する。セル C_i の内部状態は R に遷移する。B 波がセル C_1 に到達する時刻は、 $t = j + 2(i - 1)$ である。セル C_1 の内部状態は N0 に遷移する。次のステップでセル C_1 の内部状態は Q に遷移し、左右両方向に信号 '1' を出力する。このときの時刻は $t = j + 2(i - 1) + 1 = j + 2i - 1$ である。 C_1 から右両方向に出力された信号 '1' により、A 波が生成される。A 波がセル空間を進み、状態 Q のセルと衝突し、B 波が生成され、B 波が C_1 に達し、 C_1 が左右両方向に出力する時刻は、 $t = j + 2i + 1 + 2i + 1 = 4i + 2$ となる。これは、内部状態 Q のセルの範囲が、狭まるからである。これらより、 C_1 から左側に信号 '1' が出力される時刻は、

$t = j + n^2 + 2(i-2)n - 2i + 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)となる。初期状態で、セル C_1 の内部状態は $N0$ で、その他のセルの内部状態は Q とすると、 $j = 1, i = 2$ となる。よって、 C_1 が左右両方向に出力する時刻は、 $t = n^2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となる。以上より、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成することができる。このアルゴリズムを計算機上へ実装し、 $t = 2000$ までシミュレーションを行ない、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成できることを確認した。以下に定理を示す。

[定理 1] 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成する CA_{1-bit} M が存在する。 M の内部状態数は 3、遷移規則数 7 である。

$t = 25$ までの数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果を図 3 に示す。

3.2 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$

実時間で数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成するには、図 4 に示しているように、3 種類の波、A 波、B 波、C 波を用いる。

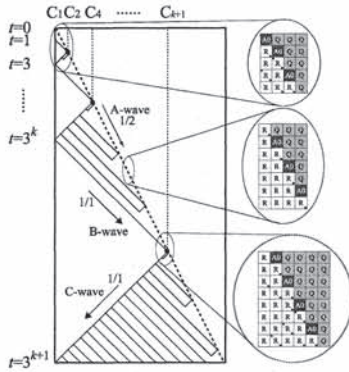


図 4: 3^n の生成を表す時間-空間図式

このアルゴリズムは、内部状態数 3 の CA_{1-bit} で実現している。使用している内部状態は $Q, A0, R$ である。このアルゴリズムの遷移規則表を表 2 に示す。

| | | | | | | | | | | | |
|---|-----|---------|-----|---|-----|---------|---------|---|-----|---------|-----|
| 1 | Q | R=0 | R=1 | 2 | R | R=0 | R=1 | 3 | A0 | R=0 | R=1 |
| | L=0 | (Q,Q,0) | - | | L=0 | (R,R,0) | (R,L,1) | | L=0 | (R,A,1) | - |
| | L=1 | (A0,0) | - | | L=1 | (R,R,1) | (R,R,0) | | L=1 | (R,L,1) | - |

表 2: 数列 3^n 生成アルゴリズムの遷移規則表

初期状態では、セル C_1 の内部状態が $A0$ で、右側のセルに信号 '1' を出力する。その他のセルの内部状態は Q である。内部状態 Q は静止状態であり、内部状態 Q のセルは信号 '1' が入力されない限り、内部状態 Q を維持し続ける。時刻 $t = 0$ にセル C_1 が出力した信号 '1' により、セル C_2 の内部状態が $A0$ に遷移する。内部状態 $A0$ のセルは、次のステップに内部状態が R に遷移し、右側のセ

ルに信号 '1' を出力する。これにより、信号 '1' を右方向に 2 ステップにつき 1 セル伝搬させる、すなわち、速さ $1/2$ の波が生成される。この波を A 波と呼ぶ。図 4 参照。A 波が通過したセルは、内部状態が R に遷移する。内部状態 R のセルは入力が無ければ、自らの内部状態を保持し続ける。左側から信号 '1' が入力されると、自らの内部状態を保持し、右側に信号 '1' を出力する。セルに右側から信号 '1' が入力されると、自らの内部状態を保持し、左右に信号 '1' を出力する。左右両側から信号 '1' が入力されると、自らの内部状態を保持する。内部状態が R のセルの領域を右方向に速さ $1/1$ で進む信号 '1' を B 波、左方向に速さ $1/1$ で進む信号 '1' を C 波とする。また、C 波は左方向に進む際には、毎ステップ B 波を生成する。これは、C 波は左方向に進む際、すなわち、内部状態 R のセルに右側から信号 '1' が入力された場合には、次のステップには左右両方向に信号 '1' が出力される為である。A 波が B 波に衝突した際には、A 波はそのままセル空間を右方向に進行する。B 波は反射して、C 波となる。反射した C 波は 1 ステップ遅れて伝播している B 波と衝突して消滅する。これは、内部状態 R のセルに左右両側から信号 '1' が入力された場合、信号を出力せずに自らの内部状態を保持する為である。A 波と B 波が衝突して生成された C 波セル空間を左方向に進み、セル C_1 に達するのは、セル C_1 で生成された B 波が A 波に到達した場合のみである。

ある時刻 $t = s$ にセル C_1 で生成された B 波が内部状態 R のセルを伝わり、A 波と衝突する。A 波と B 波が衝突するセルをセル C_d とおく。B 波の速さは $1/1$ であるので、時刻 $t = s + d - 1$ に A 波と B 波が衝突する。また、 $1/2$ の速さである A 波は、時刻 $t = s + d - 1$ 時にセル C_d で B 波と衝突する。図 5 参照。よって、 $d = \lfloor \frac{1}{2}(s + d - 1) \rfloor + 1$ が成立する。この式を解くと、 $d = s + 1$ となる。以上より、A 波と B 波はセル C_{s+1} の位置で衝突する。

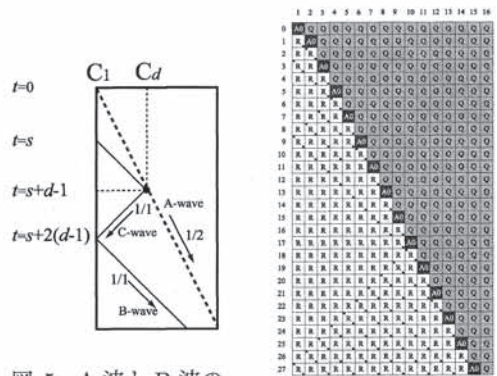


図 5: A 波と B 波の衝突

図 6: シミュレーション結果 ($t = 27$ まで)

A 波と B 波が衝突、すなわち、内部状態 $A0$ がであるセル C_{s+1} に左側から信号 '1' が入力されると、セル C_{s+1} の内部状態は R に遷移し、左右両方向に信号 '1' を出力する。右方向に出力した信号 '1' は隣接する C_{s+2} 、に入力される。セル C_{s+2} の内部状態は Q であるので、A 波

はそのままセル空間を右方向に進み続ける。左方向に出力した信号'1'により、C波が生成される。図4参照。C波は状態Rのセルを伝わりセルC₁に信号'1'を伝える。セルC₁に信号'1'が到達し、セルC₁が左右に信号'1'を出力する時刻は図4より $t = s + 2\{(s+1) - 1\} = 3s$ となる。次に、最初にセルC₁が左右に信号'1'を出力する時間を考える。t=0時に、セルC₁の内部状態がA0で、右側のセルに信号'1'を出力する。セルC₂以降のセルは内部状態がQである。t=1時に、セルC₁の内部状態がRに遷移し、右側のセルに信号'1'を出力する。セルC₂は内部状態がA0に遷移する。これにより、A波が生成される。本来、内部状態A0が内部状態Rに遷移する際に右側のセルに出力する信号'1'は、A波を生成するための信号であるが、t=1時にセルC₁が出力する信号'1'は内部状態がA0であるセルC₂に入力されるので、B波として扱われる。t=2時に、セルC₁の内部状態はRを維持する。セルC₂は前ステップで信号'1'が入力されたので、内部状態はRに遷移し、左右に信号'1'を出力する。セルC₂が左側に出力された信号により、t=3時に、セルC₁は左右に信号'1'を出力する。よって、セルC₁が最初に左右に信号'1'を出力するのは、t=3時となる。図4参照。以上より、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成することができる。このアルゴリズムを計算機上に実装し、t=2000までシミュレーションを行ない、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成できることを確認した。以下に定理を記す。

[定理 2] 数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成するCA_{1-bit} Mが存在する。Mの内部状態数は3、遷移規則数8である。

t = 27までの数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 生成アルゴリズムのシミュレーション結果を図6に示す。

4 パーソナルコンピュータを用いた最適解の探索

前節では数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ が内部状態数3のCA_{1-bit}上で生成可能であることを示した。本節では、パーソナルコンピュータを使用して、前節で示したアルゴリズムが、内部状態数についての最適解であることを示す。

4.1 探索方法

数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムの内部状態数は3である。内部状態数2のCA_{1-bit}で数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ が生成できなければ、前節で示したアルゴリズムが内部状態数についての最適解の1つである事が導かれる。内部状態数2のCA_{1-bit}では、取り得る遷移規則の組み合わせが2097152通り、初期状態の組み合わせが4通りとなり、合計8388608通りの組み合わせが存在する。パーソナルコンピュータを使用して、8388608通りの全ての組み合わせで、シミュレートを行ない、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成可能な組み合わせが存在するか探索を行なう。

4.2 探索結果

8388608通りの全ての組み合わせでシミュレートを行なった結果、数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を生成可能な組み合わせは存在しなかった。

以上より、前節で示した数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムは、内部状態についての最適解の1つである。以下に定理を示す。

[定理 3] 数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ および、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ を実時間で生成する内部状態数2のCA_{1-bit} Mは存在しない。

5 おわりに

本稿では、セル間通信量を制限したセルラ・オートマトン上での数列生成問題について考察した。数列 $\{n^2 | n = 1, 2, 3, \dots\}$ 、数列 $\{3^n | n = 1, 2, 3, \dots\}$ の生成アルゴリズムをそれぞれ内部状態が3, 3、遷移規則数が7, 8のCA_{1-bit}上で実現し、パーソナルコンピュータを使用して、これらのアルゴリズムが内部状態数についての最適解の1つであることを示した。

今後の課題として、CA_{1-bit}上で生成可能な数列の特徴付けが挙げられる。

参考文献

- [1] M. Inada; "Sequence generation algorithms on cellular automata with 1-bit inter-cell communications", Master Thesis(in Japanese), Osaka Electro-Communication Univ.,(1997).
- [2] J. Mazoyer; "A minimal time solution to the firing squad synchronization problem with only one bit of information exchanged", Ecole Normale Supérieure de Lyon, Technical report No. 89-03 ,p.51, April (1989).
- [3] J. Mazoyer; "On optimal solutions to the firing squad synchronization problem", Theoretical Computer Science, 217, pp.53-80(1999).
- [4] H. Umeo; "Cellular Algorithms with 1-Bit Inter-Cell Communications", Proc. of MFCS'98 Satellite Workshop on Cellular Automata(Eds. T. Worsch and R. Vollmar), pp.93-104, Interner Bericht 19/98, University of Karlsruhe,(1998).
- [5] H. Umeo and M. Inada; "A Design of Cellular Algorithms for 1-Bit Inter-Cell Communication", Proc. of Fifth International Workshop on Parallel Image Analysis IWPIA'97, pp.51-62,(1998).
- [6] H. Umeo, J. Nishimura and T. Sogabe; "1-Bit Inter-Cell Communication Cellular Algorithms(Invited Lecture)", Proc. of the Tenth International Colloquium on Differential Equations,(1999).
- [7] 上川, 梅尾; "実時間数列生成アルゴリズムの1ビット通信セルラ・オートマトン上での実装について", 数理モデル化と問題解決 32-11, pp.37-40, (2000).
- [8] 上川, 梅尾; "1ビットセルオートマトン上での数列生成問題", 日本機械学会 [No.01-63] セルオートマトンシンポジウム講演論文集, pp.96-101, (2001).
- [9] N. Kamikawa and H. Umeo; Sequence Generation Problem on Communication-restricted Cellular Automata, NOLASC '06, pp.143-148, (2006).