

# ゆらぎ解析における最適な周波数帯域の推定法

田中 佑生子

お茶の水女子大学大学院 人間文化創成科学研究科

本研究では、離散 Fourier 変換により得られたパワースペクトル密度分布に対して直線回帰を施す場合の、適切な周波数帯域を計算機に推定させる手法を探る。推定の指標として直線回帰部分の長さ誤差分散を用いた式を提案し、シミュレーションおよび実データの解析による評価を試みた。

## On the optimal frequency band for a fluctuation analysis

Yukiko Tanaka

Graduate school of Humanities and Sciences, Ochanomizu University

We shall investigate on the method for an estimation of the optimal frequency band for a linear regression on a spectral density function obtained by DFT. In this study, we introduce a criterion based both on a width of frequency band for a linear regression and on the mean square error, and give some numerical simulation and application to the real data analysis.

### 1 はじめに

線形モデル化可能な部分を含むびつなグラフを得たとき、どの範囲が直線回帰を施すのに適しているかを推定するのは難しい。本研究では、このような問題が重要な位置を占めるスペクトル解析を例に挙げながら、一部分に回帰直線を施したいグラフに対し、その該当部分を計算機で推定させるための手法を提案する。

アナログ信号  $g(t)$  に含まれる周波数  $\frac{k}{NT}$  (第  $k$  高調波) の量は

$$G_k = \sum_{n=0}^{N-1} g[n] \exp\left(-\frac{2\pi}{N} \sqrt{-1}kn\right),$$
$$(k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2})$$

ここで、 $g[n]$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) はアナログ信号  $g(t)$  を間隔  $T$  秒 ( $\frac{1}{T}$  Hz) ごとに  $N$  個サンプルした数列である。ただし、 $g(t)$  の最大周波数を  $f_0$  Hz とすると、サンプリング定理より

$$\frac{1}{T} \leq 2f_0$$

### 2 スペクトル解析

#### 2.1 離散 Fourier 変換とパワースペクトル密度

ある信号系列にどのような周波数成分がどの程度含まれているかを調べることを一般にスペクトル解析という。その代表的手法に離散 Fourier 変換 (discrete Fourier transform: DFT) を用いた計算法があり、それは以下ようになる。

が成り立つことになる。

この  $G_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2}$ ) を周波数  $\frac{k}{NT}$  (第  $k$  高調波) のスペクトルという。  $G_k$  は複素数で得られるため、スペクトル解析では主にその絶対値の 2 乗で与えられるピリオドグラム  $|G_k|^2$  を調べることが多い。また、ピリオドグラムの時間平均 (期待値) をパワースペクトルという。しかし、ピリオドグラムもパワースペクトルの推定値のひとつと考えることができるため、ピリオドグラム自身をパワー

スペクトルと呼ぶ場合も多い。本稿ではそのような慣例に習い、 $|G_k|^2$  をパワースペクトル密度 (power spectral density: PSD) と呼ぶ。

## 2.2 周波数帯域指定に関する問題点

スペクトル解析の代表的な評価方法として、PSD と周波数の両対数プロット図をつくり、それに回帰分析を施すことより両者の関係を探るものがある。中でも直線を回帰させる手法をとることは多く、その傾きを  $\alpha$  とすると  $\alpha = -1$  程度の直線を得る、すなわち PSD が周波数 (frequency) に概ね反比例するという有名な  $1/f$  ゆらぎをはじめ、 $\alpha$  の値によって分類される様々なゆらぎ現象の多くはこのようにして見出されている。

このような解析の対象となる現象は非定常・非線形のものも多く、また計算法の性質上周波数の高低により解析精度にも違いが出ることから、得られた PSD プロット図の全域でその形状に一定の傾向がみられることは極めて稀である。そのため「 $1/f$  ゆらぎ」のように現象の特徴づけを行う場合は、「 $X \sim Y$  Hz 間で」というように該当する周波数帯域を同時に指定しておくことが一般的である。

しかし、その注目する周波数帯域の範囲決定は現在ほとんど経験則に委ねられており、計算法が DFT であるものに限らず、スペクトル解析において周波数帯域に関する定義はあいまいになっているともいえる。こうした問題を踏まえ、本研究では PSD プロット上で注目したい部分をできるだけ広範囲かつ経験則に合うように範囲指定する方法を探る。

## 3 周波数帯域の推定法

### 3.1 判断基準

本研究では周波数帯域推定の指標として、直線回帰したい部分の長さの誤差分散を用いた次の式を提案する。

$$A * \log(\text{誤差分散}) - B * \log(\text{直線回帰部分の長さ}),$$

$A, B$  : 定数

これはそれぞれの値に  $A, B$  のべき乗の重みをつけた

$$\frac{(\text{誤差分散})^A}{(\text{回帰部分の長さ})^B}$$

の対数をとったものであるが、グラフ上でできる限り長く、かつ直線性のよい部分を推定するには、回帰直線をとった際にこの値をできる限り小さくするような範囲を求めればよい。

### 3.2 重みの調節について

長さを重視しすぎると明らかに直線性が認められない範囲にまで回帰直線が及び、逆に誤差分散に重きを置きすぎると極めて範囲の狭い範囲 (極端な場合では 2 点間) で直線回帰が行われてしまう。よって両者をどの程度の荷重で扱うかの兼ね合いはトレードオフの関係にあり難しい問題である。

そこで本研究では、 $A$  と  $B$  の値は実際に解析を行いながら調整することとする。ただし、直線の当てはまりの良さを表す誤差分散に関しては、その値が基本的に小さなものであることが求められているため、それに制限をつける処置はあまり適切ではない。それゆえ誤差分散がどれほど小さくならうとも直線回帰部分の長さはそれ以下に短くならない、という下限を設けた上での解析が望ましい。

ここでは直線回帰のデータ数は「PSD データ数の何分の 1 以上」というような条件をつけることにした。これはできる限り長い直線回帰区間を見つけるという目的にも見合ったものであり、その点から考えても、この制限は妥当と思われる。

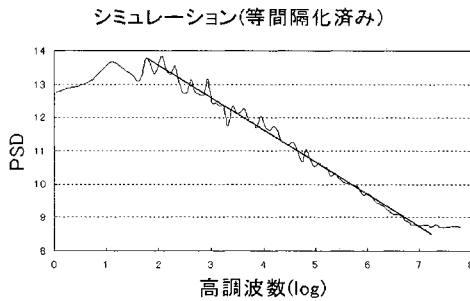
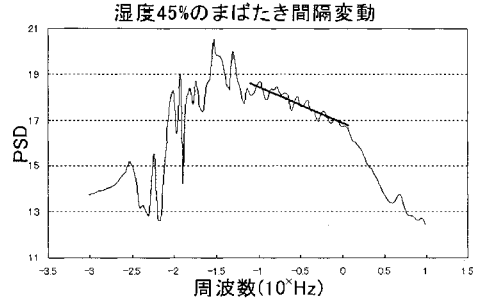
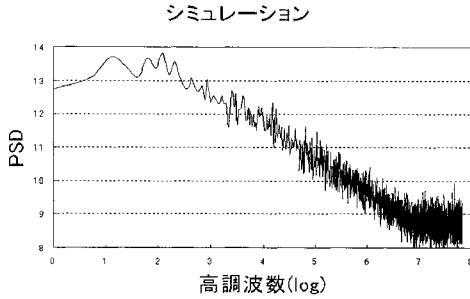
以上の方法で、PSD プロット上で 2 点を動かしながら様々な場所と様々な長さで直線回帰を行い、先に導入した指標値が最小となる 2 点の位置を求める。

### 3.3 シミュレーションデータでの実験

周波数軸の中間部分に  $1/f$  ゆらぎをもつものに適当にノイズを加えたシミュレーションデータを作成し実験したところ、次のような結果を得た。実際

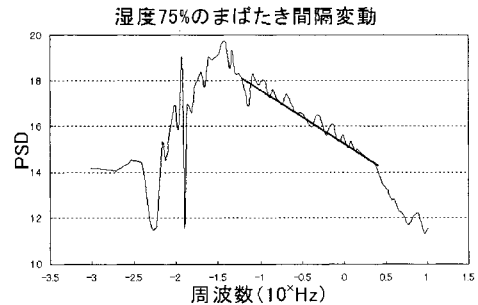
の解析では、回帰用のプロット図には、DFTで直接得たデータを任意の点数で周波数軸上に等間隔化されたものを使用する(下図参照)。なお、本研究ではデータ加工法には平均と線形補間を用い、点数100で等間隔化を行っている。ここでは $A:B=1:2.3$ として解析を行った。

1回のまばたきに要される時間は約0.1秒(10Hz)であるため、本研究のまばたき観測においてサンプリング定理によるNyquist間隔の条件は満たされている。グラフの概形より、グラフの中央に位置する直線部分の範囲を推定するように実験を行った。また、ここでは $A:B=1:2.5$ として解析した。



|         |      | 推定値                   |
|---------|------|-----------------------|
| 回帰直線左端  | 周波数  | 0.069608~0.075490Hz   |
|         | 高調波数 | 71~77                 |
|         | 座標   | (4.305363, 18.607871) |
| 回帰直線右端  | 周波数  | 1.115686~1.223529Hz   |
|         | 高調波数 | 1138~1248             |
|         | 座標   | (7.083016, 16.766247) |
| 回帰直線の傾き |      | -0.663015             |

|         |      | 推定値                   | 設定値                   |
|---------|------|-----------------------|-----------------------|
| 回帰直線左端  | 高調波数 | 6                     | 10                    |
|         | 座標   | (1.760320, 13.788091) | (2.302585, 13.582980) |
| 回帰直線右端  | 高調波数 | 1337~1445             | 1000                  |
|         | 座標   | (7.236872, 8.507980)  | (6.907755, 8.848994)  |
| 回帰直線の傾き |      | -0.96413              | -1                    |



#### 4 実データへの応用

実データへの応用として、まばたきの間隔変動時系列の解析を行った。ここで使用したデータは、気温24℃、湿度45%および75%の状況下にてサンプリング間隔0.04秒(25Hz)で記録された、15分間にわたるまばたきの間隔変動である。また、一般に

|         |      | 推定値                   |
|---------|------|-----------------------|
| 回帰直線左端  | 周波数  | 0.077451~0.084314Hz   |
|         | 高調波数 | 79~86                 |
|         | 座標   | (4.41375, 18.112299)  |
| 回帰直線右端  | 周波数  | 2.405882~2.639216Hz   |
|         | 高調波数 | 2454~269              |
|         | 座標   | (7.851828, 14.293874) |
| 回帰直線の傾き |      | -1.110628             |

## 5 まとめ

$A, B$  の値を調節することにより、グラフの概形より直線回帰を施すべきと思われる部分に適合する形で、その範囲を推定することができた。

シミュレーションデータの場合でも設定との大幅なずれはなく、同じ現象による実データから得られた2つの PSD プロット図に対しても同じような位置および範囲を指定させることが可能だった。したがって、本研究で提案した手法はある程度の実用性があるものと思われる。しかし、誤差分散と直線回帰部分の長さの重み  $A, B$  を実際に与えられたデータを解析しながら決定しなければならない点は大いに改良の余地があり、これは今後の課題である。

## 謝辞

本研究を進めるにあたって、お茶の水女子大学の 富樫雅文 博士より貴重なご助言を頂きましたことに感謝いたします。

## 参考文献

1. 佐和隆光, 回帰分析, 朝倉書店 (1979).
2. 北川源四郎, 時系列解析入門, 岩波書店 (2005).
3. 中尾光之, 山本光璋, 生体リズムとゆらぎ, コロナ社 (2004).
4. 杉山和彦, 水野守倫, 中野倫理, 山本新, 画像方式を用いたまばたき計測による意識低下検知, 豊田中央研究所 R&D レビュー, **31**, (1996) 51-60.
5. Kobayashi, M. and Musha, T., 1/f Fluctuation of Heartbeat Period, IEEE Trans. BME, **29**, (1982), 456-457.
6. Meesmann, M. and Boese, J. et.al., Demonstration of 1/f fluctuations and white noise in the human heart rate by the variance-time-curve: Implications for self-similarity, Fractals, **1**, (1993) 312-320.