

6. 数式処理の教育への応用

On the Efficient Use of Computer Algebra Systems in Mathematics Education by Akio FURUKAWA (SEG), Yoshihiko YAGI (Kobe College of Technology) and Tadashi TAKAHASHI (Kobe University).

古川 昭夫¹ 八木 善彦² 高橋 正³

¹ エス・イー・ジー

² 神戸市立工業高等専門学校

³ 神戸大学

近年、テクノロジーの進歩が著しい。数学教育においても、グラフ電卓の利用、図形ツールの利用、数式処理システムの利用など、さまざまなテクノロジーが利用されている。しかし、日本の教育におけるテクノロジーの利用は、その方向が必ずしも明確でない（独自の思想を持たず、欧米の追従になることが多い）。現状では個々の教師の試みとしての活動に近いと言える。教育へのテクノロジーの利用に対して、今後進むべき明確なビジョンを示し、学習者（生徒・学生）にも、社会的にも、さらには、教師自身にも納得できるような数学教育の目標と方法を持たなければならない。数式処理システムの教育への応用もこの状況で考えなければならない。

数式処理システムの教育への応用は、近年の数式処理システムの普及により、人々の興味を集めている。本稿においては、数式処理システムの教育への応用について、

- 教育利用の在り方
 - インタフェース
 - 国内・海外における利用の現状
 - Javaを用いた教育利用技術
- について紹介し、今後の教育への応用について考察する。

1. 数式処理の教育利用の在り方

教育の現場で、数式処理を利用することによって、次のようなことが新たに可能となる。

- 1) 手計算ではできなかった複雑な問題を、例題や演習問題として取り上げることが可能になる。
- 2) グラフ表示機能を利用して、数学をより視覚的・動的に理解することができる。
- 3) 新しい概念の習得に必要な計算技術を十分に習得していない生徒も、生徒自身が数式処理システムを利用することにより、新しい概念を習得できる。

4) 数式処理システムを通じて、大量の例を作ることができる。

これらのことによって、

計算機実験→観察→定理の予想→証明

あるいは、

予想→計算機実験→観察→証明

という形の数学の修得が可能になる。したがって、数式処理は、数学教育の教授法をより多様にできる強力な道具であり、数式処理が家庭や企業に普及していけば、数学教育を大きく変えることになるであろう。

数式処理の教育への応用といっても、中等教育（中学・高校）と高等教育（大学教育）では、使用方法や、要求される仕様も異なる。本稿では、紙面の関係のため、理科系の後期中等教育（高校レベル）、および前期高等教育（大学1～2年レベル）についてのみ論じる。ただし、現在、大学において後期中等教育の数学内容（高校レベルの数学内容）を扱う現状があるので、本稿で述べる中等教育と高等教育の区別は、必ずしも、高校・大学という教育機関の区別と対応されるべきではなく、教育内容で区別されるべきであろう。

中等教育（高校レベル）の数学教育の主目的および達成目標は、以下に代表される、高校数学で導入される数学の基本的概念の知識と技能の習得である。

関数とグラフの対応

陰関数とグラフの対応

パラメタを含む式の意味

微分の意味と導関数とグラフの対応

和の極限としての積分の意味の理解

求積計算と積分の対応

中等教育で利用される数式処理システムは、これらの基本的概念の知識と技能の習得に役立つことが必要である。それゆえ、中等教育に用いられる数式処理システムは、高度な数式処理機能や高速な数式処理機能は必ずしも必要でない。それよりも、入力の容易さと出

力表示の(教科書などの)親和性, 1ステップずつの計算, 数式(代数), 数値, 数表, グラフ表示間のインタフェースの容易さ, ハードも含めた価格の安さ, 携帯性などが重視される。

一方, 前期高等教育(大学初年級レベル)の数学教育の主目的および達成目標は, 線形代数と微積分の基本法則の理解とその計算技術の習得であろう。とりわけ, 将来, 工学系の学科にいく学生にとって, 微積分の計算技術の習得は必須である。このレベルの教育においては, 将来, 技術者・研究者となった場合に役立つ, 数式処理の基本技能の習得も必要であろう。したがって, 前期高等教育において利用される数式処理システムは, 将来的にも使える, 高度な数式処理機能を備えたものが望ましい。できれば, 最先端のアルゴリズムが装備されたソフトウェアを用い, 十分に大きなメモリを搭載し, 大規模な代数演算が実行できるシステムであることが望ましい(そうでないと, むしろ数式処理に失望してしまう可能性がある)。大学初年級レベルでは, 優れた機能を見せて教育するべきである。彼らがあこがれるようなシステムを見せることができれば最高である。多くの大学で見られることであるが, 最先端のシステムは, ほとんど使われない部屋(ほとんど大学に来ていない教員の研究室など)の片隅にあり, 教育用のマシンは, 古いマシンが与えられている。これは逆である。教員は, 古いマシンでことが足りるのであれば, 古いマシンで使うべきである。一番よいマシンは, 大学初年級レベルに与えたい。

2. 教育用数式処理のインタフェース

現状において使用されている, 数式処理システムのインタフェースについて分析する。紙面の関係上, 代表的なものとして, DERIVE, Mathematicaのインタフェースの特徴について分析する。

DERIVEのインタフェースの特徴

DERIVEの優れている点

• DERIVEはパソコン版(MSDOS, Windows3.1, Windows95)とグラフ電卓版(TI92専用)がある。いずれもメニューによる操作方式を基本としている。メニューのポップアップおよびメニュー内での選択は, マウス(TI92では, 方向コントローラ)またはカーソルキーを利用する。関数名などはメニュー上で選択することができる。メニューは用途によって適切に分類されているので, 関数の名称などを覚えていない場合でも利用が十分可能である。文字は大文字・小文字を原則として区別しないので, キーボードから入力する場合も, シフトキーの使用を最小に抑えることができる。

• 電卓版も含めて, 式の入力が容易であり, また, 入力あるいは出力された式の全部または一部の再利用が容易な設計になっている。

• Windows3.1版は少ないメモリのハードウェア上で使用できる。さらに, 640KBのコンベンショナルメモリのみで動くMSDOS版も十分に実用的である。電卓版ですら, そこそこのスピードとそこそこの能力を備えている。Windows95版も, FD1枚で供給される。少ないメモリのハードウェア上で使用できるため, 中等教育の現場において, 1人1台の環境を実現することが容易であり, 中等教育の現場に向いている。中学・高校において死蔵されている古いパソコン上でも使用することができ, それらのマシンも活用可能となる。

また, 価格も他の数式処理システムに比べると安い。

• グラフィックが容易である。陽関数, 陰関数, パラメータ表示で表されるグラフ, あるいはグラフの列をその表示形式の区別を意識せずに, 同一の命令で描くことができる(電卓版では, その区別は意識が必要)。また, グラフに沿ったトレース機能が充実しているので, 生徒はグラフに沿ってカーソルを動かすだけで, 最大・最小問題の数値解を得ることができる。さらに, グラフのズーム機能がワンボタンなので, グラフの拡大・縮小が自由自在であり, 教育の現場に適している。

• 応用ソフトが充実している。世界中で最も使われている中等教育用の数式処理システムであり, 教育用に開発されたソフトがWebなどを通じて容易に入手できる。

DERIVEの劣っている点

- プログラム機能が弱い。プログラム言語ではないので, プログラムが書きにくい。
- 大規模計算には向いていない。
- ヘルプが英語版しかない。

Mathematicaの優れている点

• 操作はメニューとマウスを使用しキーボードから処理する関数を打ち込むだけでよい。システム定義の名称が必ず大文字で始まるなど操作の一貫性がある。GUIインタフェースに対応している。

• 式がきちんと書ける。式を見ながら考えをめぐらせることを考えればオプションで多彩な表現をもつていくことは重要である。入出力に容易な1次元のテキスト形式から数学標準表記に近い形, さらにTeXやFortranなど他のソフトでの使用も見越した設計がしてある。独自の出力形式も設定できる。

• 入力した数式を修正しようとした時すぐに直すことができる。1次元のテキスト形式で入力できるのでキーボードを利用しての素早い入力が可能である。関数

の名前やオプションはヘルプ機能によりさまざまな階層で調べることができ、関数名の補完や似た記号や関数を表示してくれる機能、ワイルドカードによる検索も可能である。

- 関数型言語であるため手続き型言語に比べわかりやすい。小規模のプログラムに限ればプログラムするのは非常に楽である。750個以上の組み込み関数を持ち、ほとんどの計算が組み込み関数だけで済んでしまうものに対しては実践的である。関数を適用した結果を別の関数に適用していくので、初心者に対してもいくつかの例を与えるだけで使えるようになる。集合、リスト、配列、ベクトル、行列などが同じ形式で表現されている。この高い抽象性とインタプリタ型言語であるためにプログラムを書いたりデバッグすることがたやすい。

- グラフィックスが簡単に得られる。PSやEPSでの出力のため、特に印刷したときのグラフィックは綺麗である。グラフィックスを他のソフトを用いて修正できる。

- ノートブック型のユーザインタフェースを持ち書式が豊富。計算を記録するだけでなく、説明や見出しをつけ、独立した文章にできる。さらにセルという単位でグループを作り細かい部分をその下の階層の中へ隠すことができる。スクロールは自由にでき、前の結果を再利用したり取り込んだりできる。

- 種々のパッケージが付属しており、道具として使用するのに便利である。

- 市販の関連本も多い。

Mathematicaの劣っている点

- 膨大なファイルが必要でHDDにインストールする必要がある。公式をメモリに読み込んで処理するため、容量の大きいメモリを搭載したハードウェアを必要とする。

- 多機能である分、価格的にも高価である。

- 公式を機械的に適用するため、結果の信頼性に疑問が残る。結果の適正さを判断するための数学の素養が必要である。

教育用インタフェースの在り方、備えるべき機能について考察する。

一般的には、教育用インタフェースとしては、初心者やたまにしか使わないユーザのために、容易に習い覚えらるるものでなければならない。ソフトを立ち上げたときにどう操作してよいか迷うものではない。メニューが表示されるであろうが、そのメニューが何を意図したものかわかるのがよい。コマンドの入力を要求するタイプのソフトでは入力できるコマンドが一覧できる必要があり、そのコマンドの機能、使

方などがすぐわかるようになっているのがよい。また、使用者は、それぞれ、独自の方法で計算をさせたいのであるから、その計算方法に応じた使用方法がわかるようになっているのがよい。教育として使用する際には、ユーザ（学習者）が行っている作業（考えること）の障害になってはいけない。したがって、できるだけ入力も出力も教科書や参考書の記述と同じ様式で処理できるものが望ましい。しかしながら、数式の記述の入力方法はいまだに初心者用、熟練者用共に簡単でわかりやすい方法はない。出力に関しては、かなり正式な数学的記述に似るように変更されてきた。しかし、今までなかったような記号や記述を行おうとすると、とたんに難しかったり不可能であったりする。また数学的記述に似せた出力のために結果の再利用を妨げるようであってはならない。計算を組み立てたり考えを進めていく上で結果の一部を次の計算に使うことや一部の値を変更して計算し直すことは当然起こる。そのための入力をはじめからやり直さなくてよいことは、コンピュータを、道具として使う利点の1つである。データは一括して入力し保存しておけるものがよい、そして必要なときはいつでも呼び出して使える。さらに、その一群のデータに対して同じ計算方法を指示できる機能やメモのような図を書きながらそれをもとに計算していけるような機能を備えているのが望ましい。図形に関しては、交点、中点、接点などを検出でき、長さや角度を指定した測定できる機能を持ちアニメーションによって軌跡や状態の変化を観察できるようなものができた。教育を目的として使用する際には、学習者の理解度、目的などに応じて、初心者用のシステムから上級者用システムまで、多様なインタフェースを必要とする。

たとえば、初心者にとっては、電卓の代わりに使えることが必要である。この場合他の機能は隠されているほうがよい。ただし、数学教育の観点からは分数計算（因数分解や約分）ができなければ、小学生の使用にもたえられないので通分や約分の指示方法がすぐわかるようになっていなければならない。大学初年級レベルの使用では、式変形ができ、因数分解や約分、微分積分、級数展開、代数演算、行列、群環素…など、通常、学校で教わる計算を実行し確認できなければならない。この場合すべての機能の一覧ではかえって種類が多すぎてわかりにくいことになる。計算の種類や場面に応じて使える機能を調べることができなければならない。さらに、頻繁に使う機能をキーに割り当てたり登録できるとよい。教育用としては答をだす際、途中の過程を必要であれば示すという機能を持つ必要がある。上級者は、プログラムし計算させるための最

適化や計算アルゴリズムの変更, 他の言語とのリンクなど内部構造に立ち入った解析が必要になる. そのためのツールや機能組み込み拡張や他のソフトとの協調した動作を可能にするための仕組みをもっていなければならない.

3. 数式処理システムを用いた数学教育の現状

DERIVEとMathematicaを用いた数学教育の事例を紹介し, 今後の動向を考察する.

DERIVEを用いた数学教育

DERIVEが販売された1993年の直後から, ヨーロッパのDERIVE User Groupを中心としてDERIVEを利用した中等数学教育の研究および実践が始まった. オーストラリア文部省の後援により, 1994年には, Kremsにおいて第1回の“DERIVE International Congress”がヨーロッパ・アメリカ・日本から約50名の高校数学教師・大学数学教師が集まって行われた. 以後, ドイツ・オーストラリアを中心に, 着実に数式処理を利用した数学教育が広まった. 特に, 中部オーストラリアでは, 全中学・高校にDERIVEが配布され, 一部の学校では, 数学の授業や試験における計算のほとんどすべてに対して, DERIVEを利用する実践が行われ,

数式処理システムを使っても, 手計算の能力は落ちることはないこと数式処理を利用することにより, 新しい概念の獲得に生徒の意識を集中できることなどの肯定的な結果および, 女子生徒の方が男子生徒に比べて, コンピュータの利用に関心を示さない傾向が高いこと

などの研究成果を得た. 日本でも, 数理専門塾SEG(東京)において, 授業中いつでも数式処理システムが使用可能な環境で, 数学の授業を継続的に1年間行う実験授業が3年間にわたって行われ, 上記の実験結果が確認された. ただし, この種の実験では, 比較対照とするクラスに比べて実験クラスの方が教師の教授能力・教師の意欲が高い傾向があり, 上記の結果は, 「教師が十分に注意して教育を行うのであれば, 数式処理を数学教育にとり入れても何ら否定的な影響はない」ことが証明された程度に受け止める方がよいであろう.

一方, アメリカでは, オハイオ州を中心にグラフ電卓を利用した数学教育の研究・実践が以前より進んでおり, Ohio州立大学のWaits, Demana両教授らを中心に, Teaching Teachers with Technology (T cubedあるいはT³と略称)の活動が盛んだ. 最近, 日本にも一松 信を代表としてその支部ができ, (連絡先T³Japan@isola.co.jp, <http://www.isola.co.jp/T³Japan/>)なる教師集団が形成された. 米国では,

それらの実践・研究成果をとり入れる形で教授法の開発と(Texas Instruments社との協同作業として)教育用グラフ電卓の設計が進められてる. その流れの中で, 1995年, 数式処理DERIVEを内蔵したTI92が開発され, 同時にTI92を用いた数学教授法の研究が始まった.

1995年以後, ヨーロッパのDERIVEグループとアメリカのT cubeグループの交流が進み, DERIVE Conferenceは, 1996年“DERIVE & TI92 CONGRESS”と改称された. ヨーロッパにもT cube Europeが設立された. 中等教育の現場では,

電池で動く電卓の方が使い勝手がよいこと

TI92内蔵レベルの数式処理システムで十分に役に立つこと

があり, 従来パソコン上のDERIVEを利用して数学の授業を行っていた教師の大半はTI92を用いた授業に移行している. 数式処理を利用した高校教師の研究集団は, アメリカ・ヨーロッパ・日本のすべてにおいて, 事実上, T cubeに統合されつつあるとあって過言ではない(文献1)を参照).

Mathematicaを用いた数学教育

Illinois大学の数学科では, Calculus and Mathematicaという講義および演習(以下, 講義とする)があり, Mathematicaを使った微積分の講義を行っている. 教材は, 日本の大学における微積分とほぼ同様の構成である. 教材の構成は, 解説, 例題の提示, 問題の3段階の構成がすべての項目(各々の単元)に設けられていた. 1年間で微分方程式の前まではほぼ全員が演習するようになっているとのことである. この講義の内容の一部は, インターネット上に公開されている. URLは, <http://www-cm.math.uiuc.edu/>からたどることができる. このような形式の講義では, その前後の学習の方法をいかに確立するかが大きな問題となる. なぜならば, ただマシンを相手に, この時間だけ学習するのでは, 学習の定着も効果的とは言えない. 単なる学習ゲームに終わってしまう. Calculus and Mathematicaでは, 講義および演習の前後に, 個人のペースに合わせて学習できるように工夫されている.

まず, 講義の前には, 自分の来られるときに来て, マシンを使い, 予習することになっている. そのため, この部屋のドアには, TA (Teaching Assistant)として大学院生の写真が36人も貼ってある. 学生はこの写真のTAを見つけてわからないことを質問していた(TAにも人気のTAがいた). TAも丁寧に教え, アルバイトでありながらその意識の高さには驚いた. そして, 講義後には, 一般教室で, マシン相手に学習し

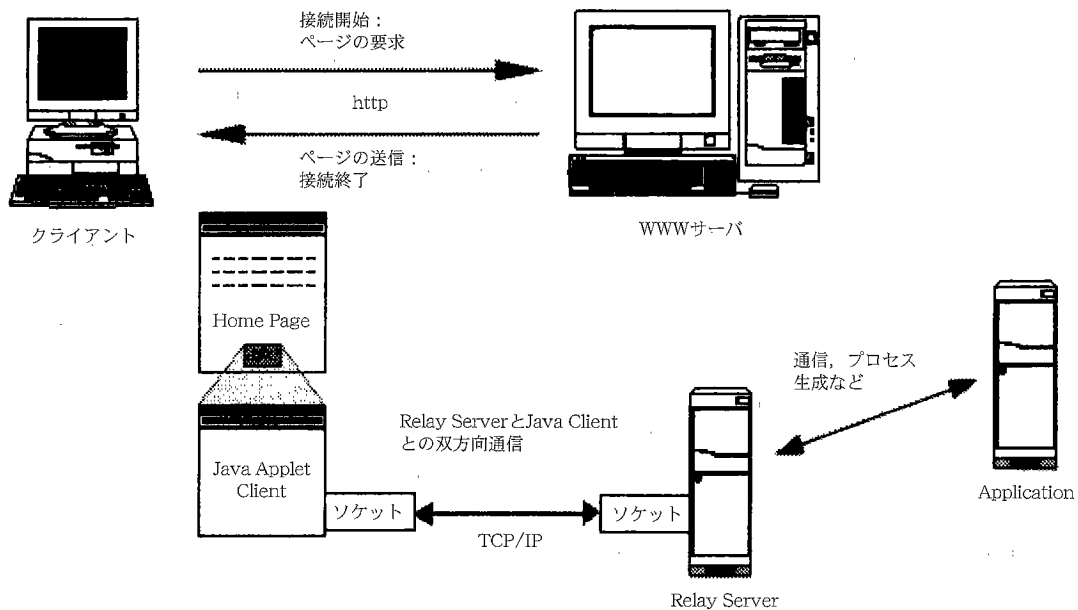


図-1 Javaを用いた数式処理システムの利用例

た内容をドクタコースの学生が解説し、数学としての記号などを教える。この数学としての記号を教えるのは、あたりまえのことであるが、重要なことである。コンピュータ相手に学習してきた学生は、Mathematicaの入力記号で黒板に書いていた。ドクタコースの学生は、「それは数学記号では、こう書きます」と解説し、さらに、数学の概念を話した。この授業は進度によって選択性になっていた。数式処理システムを効果的に用いるためには、数学を理解しなければならない。卵が先か鶏が先かの議論ではないが、使える数学が高度になればなるほど、それを数学として使うための授業設計が大切である（文献2）を参照）。

4. Javaを用いた数式処理の教育利用技術（インターネット技術の視点から）

近年、インターネットは急激に普及しており、多くの人々がインターネットを通じて情報を提供・享受している。最近ではマルチメディア化されたホームページも増加してきている。旧来のクライアント・サーバモデルではクライアントすべてにクライアントプログラムをインストールしておかなければならなかったが、Javaを用いてブラウザ上で動かすことにより、その必要がなく、Javaの動くブラウザさえ入手すればよいということになる。クライアントプログラムにJava Appletを用い、サーバと通信することにより、常時対話が成立する。中継サーバを経由して、クライアントはサーバ側のアプリケーションをリモート処理できる。Javaを利用したクライアント／サーバ型のアプリ

ケーション利用方法が注目を集めている。

この技術を用いることで、数式処理システムをネットスケープやインターネットエクスプローラーなどのブラウザ上で使用することが可能になる。

Mathematicaを例として、その技術の応用事例を図で紹介する（図-1参照）。

2章で述べたように、教育用システムの有用性はユーザインタフェースの善し悪しに大きく依存する。ホームページ上でのアプリケーション利用技術は、ユーザレベルでのインタフェース作りを可能にする。この技術は、数式処理の教育への応用に関して、注目されるものになるであろう（文献3）を参照）。

5. まとめ

「数式処理の教育への応用」それは、多くの人々の要望であり、それぞれの人々の立場でのエゴであり、かつ、次世代の教育における大きな問題である。しかし、教育として考える限り、教育を受ける生徒、学生のことを中心に考えなければならない。彼らは、どのような教育を受けることがよいのか。このことを考えた時、数式処理が必要であれば、設備的、人的に困難なところを是正し、教育に取り入れるべきである。“数式処理は、教育として敷居が高い”とか“現状ではカリキュラムとして確立できない”などの要因は、目的に対しての問題である。現在の教育の枠組み（カリキュラムなど）では、取り入れることが難しいことは事実である。しかし、数式処理の有効性を多くの分野で生かし、発展させていくためには、教育において

多大な投資をしなければならない。また、いつまでも欧米後追いの教育システムではなく、どのような生徒、学生を育てるのかについて明確なビジョンを提示するべきである。

考え方さえ柔軟にすれば、現在の教育の枠組みにおいても、部分的に取り入れることは十分に可能である。当面、数式処理の利用が大いに有効な分野では、積極的に導入し、その試行的導入の中で、数式処理を活用した数学教育に関する教授法（それは、現在の数学教育を、より生徒主体のものに変革することになろう）の開発と人材の育成をはかるべきである。そのことによって、教育への新たな投資が無駄にならず、財政赤字の中でも、新たな投資への国民的合意も可能になるであろう。そして新しいカリキュラムの開発を通じて、どんな能力を持った生徒・学生を育てるのかについて明確なビジョンを教師と国民が作りあげなければならない。

このような教育を実践するには、「数式処理の教育への応用」を前向きに扱い、熱意を持った教育者、指導者が必要である。硬直化した、頭の固い偉い方々には、柔軟な発想はできない。その意味でも、任期制などの導入に際して、このような取り組みを前提とした教育者、指導者の活躍の場を設ける必要がある。ただ首が危ないから反対では、だだっこである。リスクの先に、明確な目標があればよい。日本は、「数式処理の教育への応用」に賭けてよいのではないか。

これらのことを考える時、「数式処理の教育への応用」は、日本の教育界全体にとって必要かつ重要な今日的課題である。

参考文献

- 1) Monaghan, J.: Teaching and Learnign in a Cumputer Algebra Environmnet: Some Issues Relevant to Sixth-forn Teachers in the 1990s, The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education (1997).

2) 高橋 正: Illinois大学における数式処理を用いた教育, 第30回数学教育論文発表会論文集, pp. 517-522 (1997).

3) 杉山武志, 高橋 正: Javaによるネットワーク・アプリケーション, 神戸大学発達科学部研究紀要第5巻第2号, 印刷中.

(平成9年12月1日受付)



古川 昭夫

1981年東京大学理学部数学科卒業, 1987年東京都立大学理学研究科博士課程単位取得. 現在, SEG数学科講師. 新しい数学教育技術の開発を通じて数学教育の改革に取り組む. 日本数式処理学会, 日本数学会, 日本応用数理学会, 日本数学教育学会各会員. e-mail:fakio@seg.co.jp



八木 善彦

1977年京都大学理学部物理学科卒業. 1990年神戸市立工業高等専門学校一般科数学講師, 1993年神戸市立工業高等専門学校一般科数学助教授. 数学一般の研究のほか数学教育における電子機器の利用や数学教育法の研究に取り組む. 日本数式処理学会, 電子情報通信学会, 人工知能学会各会員. e-mail:yagi@kobe-kosen.ac.jp



高橋 正

1980年中央大学理工学部数学科卒業, 1985年早稲田大学大学院理工学研究科後期博士課程中退. 現在, 神戸大学発達科学部助教授. 特異点構造の研究および数学教育への数式処理システムの応用に関する研究に取り組む. 日本数式処理学会, 日本数学会, 日本数学教育学会, 日本科学教育学会各会員. e-mail:takahasi@kobe-u.ac.jp