アルゴリズム 5−15
（1989. 1. 26）

アスペクトグラフについて

上野 修一　宮野 浩　福原 近

東京工業大学　工学部　電気・電子工学科

アスペクトグラフとは，凸多面体を眺めたとき，視点の移動と共に見える面の集合がどのように変化するかということに着目した凸多面体の一表現方法であり，計量情報と併せて物体の確認や同定のために応用されている。与えられたnに対して，凸n面体の異なるアスペクトグラフは有限個しか存在しないことが知られているが，それらを数えあげるという基本的な問題はまだ未解決となっている。小文では，底面が平行な2辺をもたない凸n角形であり，両底面が平行な直角柱の異なるアスペクトグラフの総数Γ(n)を求める問題が，任意のi(0≦i≦n-1)に対してx(i)=-x(i+n)となるような1と-1から成る円数列(x(0),x(1),x(2),..,x(2n-1))の総数を求める問題に帰着されることを示すと共に，特にnが素数であるときには，公式Γ(n)=(α(n)+2(n-1)+2n・α((n-1)/2))/4n-1を導く。ここで，α(n)=2n・(2n-2)・(2n-4)・・・2/n!である。

ON ASPECT GRAPHS

Shuichi UENO, Hiroshi MIYANO, and Chikashi FUKUHARA

Department of Electrical and Electronic Engineering
Tokyo Institute of Technology

O-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152, Japan

The aspect graph is a representation of a convex polyhedron, and is defined by means of the changes in the visible faces of a covex polyhedron as viewer moves. The aspect graph is used for object confirmation and identification together with a certain metric information. Although it is known that the number of different aspect graphs of convex polyhedra with n faces is finite, the fundamental problem of counting different aspect graphs of all convex polyhedra with n faces remains unsolved. This paper shows that the problem of finding the number $\Gamma(n)$ of different aspect graphs of 2.5-D convex polyhedra with n+2 faces is reduced to the problem of counting different cyclic sequences $(x(0), x(1), \ldots, x(2n-1))$ of 1's and -1's with the condition that $x(i)=-x(i+n)$ for any i $(0 \leq i \leq n-1)$, and shows also an explicit formula $\Gamma(n)=(\alpha(n)+2(n-1)+2n\cdot\alpha((n-1)/2))/4n-1$ if n is a prime, where $\alpha(n)=2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdots 2/n!$.

1。まえがき

凸多面体PをPの内部に中心をもつ無限に大きい球面S上から眺めたとしよう。このとき「Pの同じ面の集合が見える」という同値関係によってS上の点の集合はいくつかの同値類に分割される。各同値類S(i)を点v(i)に対応させ，S(i)の点から見えるPの面の集合A(i)を点v(i)のラベルとして付す。２つの異なる同値類S(i)とS(j)に対して，A(i)とA(j)がちょうど１つの面だけ異なるときかつこのときに限りv(i)とv(j)を枝で結んで得られる(点ラベル付き)グラフがPのアスペクトグラフG(P)である。図１の凸多面体P_0のアスペクトグラフG(P_0)を図2に示す。アスペクトグラフは凸多面体の一表現方法であり，凸多面体の計量情報と共に凸多面体の確認や同定のために応用されている[1～9]。

一般の３次元図形に関しては，凸ｎ面体のアスペクトグラフは(明らかであるが)平面グラフであること，その大きさ(点数+枝数+総ラベル長)は$O(n^3)$であること，及び凸ｎ面体のアスペクトグラフは$O(n^3)$で構成できることなどが知られている[6]が，アスペクトグラフの特徴付けなどは知られていない。

一方，図1の多面体のような2.5次元凸ｎ面体(両底面が平行である直角柱)のアスペクトグラフは大きさが$O(n^2)$であり，底面(平面凸多角形)のアスペクトグラフから容易に構成できることが知られている[2]。また，文献[9]では，平行な２辺をもたない平面凸多角形のアスペクトグラフの必要十分条件を与えている。従って，2.5次元凸多面体のアスペクトグラフの特徴付けについてはかなり解明されていると言って良い。

ところで，異なる凸ｎ面体は無限に存在するが，上で述べたようにアスペクトグラフの大きさは有限であるので異なるアスペクトグラフは有限個しか存在しない。（従って，同じアスペクトグラフをもつ凸ｎ面体が無限個存在することになる。）そこで，アスペクトグラフによってどの位図形を識別できるのか，すなわち凸ｎ面体の異なるアスペクトグラフは幾つ存在するのかという問題は基本的であると同時に応用上非常に重要である。

小文では，ｎが素数であるとき，底面が平行な2辺をもたない凸ｎ角形である2.5次元凸多面体の異なるアスペクトグラフの総数を求める。

２。２．５次元図形のアスペクトグラフ

2.5次元図形のアスペクトグラフの特徴について，図２に示されているG(P_0)を例に採って考えてみよう。G(P_0)には同心円状に３つの６角形がある。点のラベルが順に{A}，{A,B}，{B}，{B,C}，{C}，{A,C}となっている中間の６角形は底面の各辺がA,B，及びCであるとしたときの底面の（２次元図形としての）アスペクトグラフである。この６角形をC_6としよう。C_6の外側の６角形は，{A}∪{E}，{A,B}∪{E}，... とラベル付けされた点がこの順に並んでいる。C_6の内側の６角形についても同様である。これらと{E}及び{D}とラベル付けされた２点からG(P_0)は構成されている。従って，G(P_0)はC_6によって（構造も含めて）完全に決定されていることが分かる。

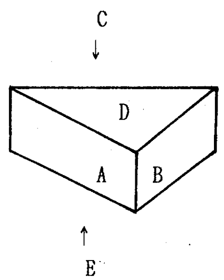

図1 P_0

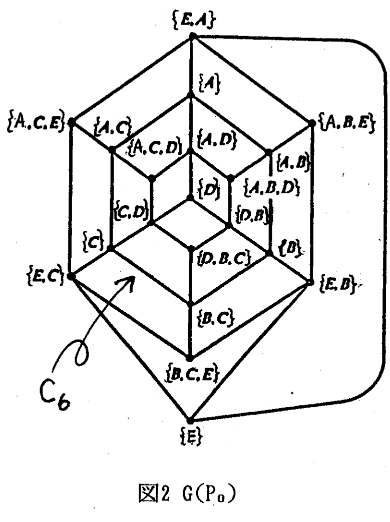

図2 G(P_0)

一般に，2.5次元凸図形のアスペクトグラフは底面のアスペクトグラフから一意的に決定されており，2.5次元凸図形のアスペクトグラフを特徴付けることは，平面凸図形のアスペクトグラフを特徴付けることに帰着される。従って，底面が凸ｎ角形である2.5次元図形のアスペクトグラフの総数は，凸n角形のアスペクトグラフの総数に等しいことも分かる。そこで，凸ｎ角形のアスペクトグラフについて考察する。

３。凸多角形のアスペクトグラフ

凸ｎ角形ＰのアスペクトグラフG(P)は，Ｐの内部に中心をもちＰと同一平面上にある無限に大きい円周上からＰを眺めて得られる。簡単に分かるようにG(P)は常に長さ2nの単一閉路になる。図3と図4にそれぞれ３つの凸５角形とそれらのアスペクトグラフを示す。

以後Pには平行な2辺が存在しないものと仮定しよう。このとき，以下の定理に示すようなG(P)の必要十分条件が知られている[9]。

Pの辺の集合をF(P)={F(0),F(1),...,F(n-1)}としよう。また，G(P)の点は閉路の順に 0,1,2,...,2n-1 と並んでいるものとする。A(i)は点iのラベルである。ここで，A(i)⊆F(P)であることに注意されたい。(A(0),A(1),A(2),...,A(2n-1))をPのアスペクト円集合列という。 G(P)は単一閉路であるから，G(P)を特徴付けることとアスペクト円集合列を特徴付けることは同じである。

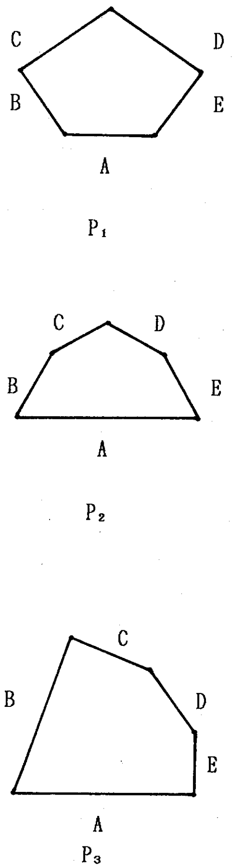

図3 5角形

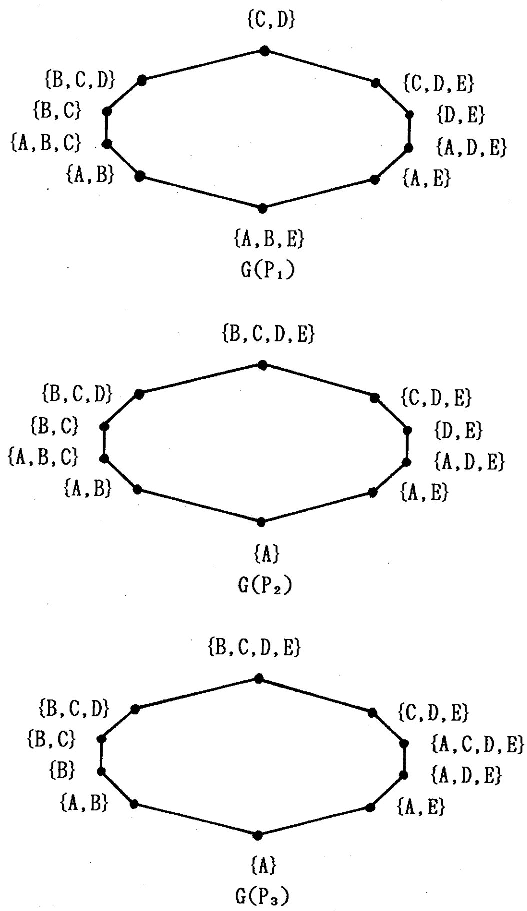

図4 アスペクトグラフ

定理 1[9]: B(0),B(1),B(2),...,B(2n-1)⊆F(P)であるとき，(B(0),B(1),B(2),...,B(2n-1))がある凸n角形のアスペクト円集合列であるための必要十分条件は以下の3条件が成立することである。
(1) 任意のi(0≦i≦2n-1)に対して B(i)≠φ。
(2) 任意のi(0≦i≦2n-1)に対して ||B(i)|-|B(i+1)||=1。
(3) 任意のF(i)∈F(P)に対して F(i)∈B(j+1)∩B(j+2)∩...∩B(j+n) かつ F(i)∉B(j+n+1)∪B(j+n+2)∪...∪B(j+2n)となるjが存在する。
ただし，すべての和は mod 2n でとるものとする。

定理１の条件(1),(2),及び(3)が必要条件であることは明らかであろう。十分性については文献[9]を参照されたい。

(B(0),B(1),...,B(2n-1))がアスペクト円集合列であるとき，円数列(|B(0)|,|B(1)|,...,|B(2n-1)|)をアスペクト円数列と呼ぶ。次の定理はアスペクト円数列を特徴付けている。

定理 2[9]: 円整数列(N(0),N(1),N(2),...,N(2n-1))がある凸n角形のアスペクト円数列であるための必要十分条件は以下の3条件が成立することである。
(1) 任意のi(0≦i≦2n-1)に対して N(i)>0。
(2) 任意のi(0≦i≦2n-1)に対して |N(i)-N(i+1)|=1。
(3) 任意のi(0≦i≦2n-1)に対して N(i)+N(i+n)=n。
ただし，すべての和は mod 2n でとるものとする。

定理２の条件(1),(2),及び(3)は，定理１の条件(1),(2),及び(3)にそれぞれ対応している。同じアスペクト円数列をもつ２つのアスペクト円集合列（あるいはアスペクトグラフ）は同型であるから，アスペクト円集合列(あるいはアスペクトグラフ)の総数を求める問題はアスペクト円数列の総数を求める問題として定式化されることが分かる。そこで，アスペクト円数列について考察してみよう。

４。アスペクト円数列

凸ｎ角形Ｐを回転したり反転しても同じ図形であるから，回転あるいは反転によって一致する２つのアスペクト円数列は同じであると定義する。このとき異なるアスペクト円数列は幾つ存在するであろうか。この節ではこの問題について考察する。

円整数列Ｑ＝(N(0),N(1),N(2),...,N(2n-1))が与えられているとしよう。δ(i)=N(i+1)-N(i)，及びΔ(Q)＝(δ(0),δ(1),δ(2),...,δ(2n-1))と定義する。ただし，和は mod 2n でとるものとする。このとき次の定理が成立する。

定理 3: 円整数列Ｑ＝(N(0),N(1),N(2),...,N(2n-1))がアスペクト円数列であるための必要十分条件は，Δ(Q)=(δ(0),δ(1),δ(2),...,δ(2n-1))が以下の４条件を満足することである。
(0)(n-(δ(0)+δ(1)+δ(2)+...+δ(n-1)))/2=N(0)。
(1)任意のi(0≦i≦2n-1)に対して δ(i)=1 あるいは -1。
(2)任意のi(0≦i≦2n-1)に対して δ(i)+δ(i+n)=0。
(3)δ(i),δ(i+1),...,δ(i+n-1)=1 となるiが存在しない。
ただし，すべての和は mod 2n でとるものとする。

証明:(必要性)Ｑがアスペクト円数列であると仮定する。このとき，Ｑは定理２の３条件を満足している。定理２の(3)から，N(0)+N(n)=nである。また，N(n)=N(0)+δ(0)+δ(1)+...+δ(n-1)であるから，Δ(Q)は定理3の(0)を満足している。定理２の(2)から，Δ(Q)は定理３の(1)も満足する。定理２の(3)から，N(i)+N(i+n)=n=N(i+1)+N(i+1+n)である。従って，(N(i+1)-N(i))+(N(i+1+n)-N(i+n))=0 となり，Δ(Q)は定理３の(2)を満足する。もしΔ(Q)にδ(i),δ(i+1),...,δ(i+n-1)=1となるｉが存在すると仮定すると，定理2の(1)よりN(i)>0であるから，N(i+n)=N(i)+δ(i)+δ(i+1)+...+δ(i+n-1)>n，すなわち N(i)+N(i+n)>n となり，定理2の(3)に反する。従って，Δ(Q)は定理３の(3)も満足する。

(十分性)逆に，$\Delta(Q)$が定理３の４条件を満足していると仮定しよう。定理３の(1)より，Ｑが定理2の(2)を満足していることは明らかである。定理３の(0)と$N(n)=N(0)+\delta(0)+\delta(1)+...+\delta(n-1)$であることから，$N(0)+N(n)=n$を得る。従って，

$$
\begin{aligned}
N(i)+N(i+n) &= (N(0)+\delta(0)+\delta(1)+...+\delta(i-1))+(N(n)+\delta(n)+\delta(n+1)+...+\delta(n+i-1)) \\
&= N(0)+N(n)+(\delta(0)+\delta(n))+(\delta(1)+\delta(n+1))+...+(\delta(i-1)+\delta(n+i-1)) \\
&= N(0)+N(n)=n
\end{aligned}
$$

となり，Ｑは定理２の(3)を満足する。あるiについて$N(i)\leqq 0$であると仮定すると，$N(i)+N(i+n)=n$であるから，$N(i+n)\geqq n$となり，$N(i+n)-N(i)\geqq n$である。従って，$N(i+n)-N(i)=\delta(i)+\delta(i+1)+...+\delta(i+n-1)\geqq n$ となるが，これは定理３の(1)あるいは(3)に矛盾している。従って，Ｑは定理２の(1)も満足しており，アスペクト円数列であることが分かる。(証明終)

定理３から，アスペクト円数列の総数を求める問題は定理3の4条件を満足する円数列の総数を求める問題と等価であることが分かる。そこで，まず定理3の条件(1)と(2)を満足する円数列の総数を求めてみよう。

定理３の条件(1)と(2)を満足する円数列を平衡円数列と呼ぼう。簡単に分かるように，回転あるいは反転による同値性を考慮しないときの異なる平衡円数列は全部で$\alpha(n)$個存在する。ここで，$\alpha(n)=2n\cdot(2n-2)\cdot(2n-4)\cdot\cdot\cdot 2/n!$ である。これらの平衡円数列の集合をHとする。各平衡円数列を回転あるいは反転するH上の置換から成る置換群は，回転による置換と反転による置換がそれぞれ2n個ずつあり，合計4n個の要素をもつ。

ｎが素数であると仮定しよう。このとき，恒等置換のもとで不変な平衡円数列は$\alpha(n)$個存在する。また，数字偶数個分回転するn-1個の置換のもとで不変な平衡円数列はそれぞれ2個存在する。数字奇数個分回転する置換のもとで不変な平衡円数列は存在しないことに注意されたい。さらに，反転する2n個の置換のもとで不変な平衡円数列はそれぞれ$\alpha((n-1)/2)$個存在する。従って，バーンサイドの定理（例えば[10]のp.143参照)を適用すると，異なる平衡円数列の総数は$(\alpha(n)+2(n-1)+2n\cdot\alpha((n-1)/2))/4n$となることが簡単に分かる。

定理３の条件(3)を満足しない平衡円数列はちょうど１つ存在するから，定理３の条件(1),(2),及び(3)を満足する円数列は全部で$(\alpha(n)+2(n-1)+2n\cdot\alpha((n-1)/2))/4n-1$個存在する。定理３の条件(0)より，平衡円数列$\Delta(Q)$からＱは一意に定まるので，次の定理を得る。

定理 4：ｎが素数であるとき，底面が平行な２辺をもたない凸ｎ角形である2.5次元図形の異なるアスペクトグラフは全部で　$\Gamma(n)=(\alpha(n)+2(n-1)+2n\cdot\alpha((n-1)/2))/4n-1$　個存在する。

ちなみに，$\Gamma(3)=1, \Gamma(5)=3, \Gamma(7)=8$ である。従って，平行な2辺をもたない5角形の異なるアスペクトグラフは図4の3つですべてであることが分かる。

謝辞：日ごろ御指導頂く東京工業大学の梶谷洋司教授に深謝する。

文　献

[1] J.J. Koenderink and A.J. van Doorn, The internal representation of solid shape with respect to vision, Biological Cybernetics, 32(1979), 211-216.

[2] G.M. Castore, Solid modeling, aspect graphs, and robot vision, General Motors Conference on Solid Modeling, 1983, 277-288.

[3] G.M. Castore and C.G. Crawford, From solid model to robot vision, IEEE International Conference on Robotics, 1984, 90-92.

[4] C.G. Crawford, Aspect graphs and robot vision, IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1985, 382-384.

[5] H. Kim, R.C. Jain, and R.A. Volz, Object recognition using multiple views, IEEE International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1985, 28-33.

[6] W.H. Plantinga and R.D. Charles, An algorithm for constructing the aspect graph, FOCS, 1986, 123-131.

[7] J. Stewman and K. Bowyer, Aspect graphs for planar-face convex objects, IEEE Computer Society Workshop on Computer Vision, 1987, 123-130.

[8] J. Stewman, L. Stark, and K. Bowyer, Restructuring aspect graphs into aspect- and cell-equivalence classes for use in computer vision, Graph-Theoretic Concepts in Computer Science, Lecture Note in Computer Science 314, Springer-Verlag, 1988, 230-241.

[9]福原,宮野,上野，アスペクトグラフによる2.5次元図形の類別に関する一考察，信学技報 CAS88-38,1988, 31-37.

[10]C.L. リウ(伊理訳)，組合せ数学入門Ｉ，共立出版.