

## 計算万能な2次元16状態可逆的 セル構造オートマトンのモデル

上野 聡 ・ 森田 憲一

山形大学 工学部

あらまし 可逆的セル構造オートマトン(RCA)は“逆方向に決定的”なCA、即ち、全てのConfigurationに対して、直前のConfigurationが唯一つしか存在しないようなCAのことをいう。Margolusは、計算万能な2次元RCAのモデルで状態数が2のものが構成できることを示した。しかしながら、彼のモデルは、時間的、空間的に、多少の非一様性を持ち、標準的なCAの枠組みからは外れたものであった。本論文では、2次元可逆的PCA (Partitioned CA) と呼ぶ枠組みを用いて計算万能な16状態の単純なモデルを2つ示した。PCAは標準的なCAのサブクラスと見なせるので、これにより、16状態の標準的なRCAのモデルで計算万能なものが得られる。ここでは、各々のモデルについて、Fredkinゲートと呼ばれる論理素子をシミュレートするconfigurationを与えた。Fredkinゲートが万能な論理素子であることから、これら2つのモデルの計算万能性が導かれる。

Computation Universal Models of 2-Dimensional  
16-State Reversible Cellular Automata

Satoshi UENO and Kenichi MORITA  
Faculty of Engineering, Yamagata University

**Abstract** A reversible (or injective) cellular automaton (RCA) is a "backward deterministic" CA, i. e., every configuration of it has at most one predecessor. Margolus has been shown that there is a computation-universal 2-dimensional 2-state RCA model. Although his model is very interesting, it differs from a standard CA model because it has somewhat spatial and temporal non-uniformity. In this paper, we show two kinds of simple 16-state computation-universal models using the framework of 2-dimensional reversible partitioned CA (PCA). Since PCA can be considered as a subclass of standard CA, we can obtain 16-state standard RCA models from them. For each of these models, we designed a configuration which simulates a Fredkin gate. As Fredkin gate is known to be a universal logic element, computation-universality of these two models is concluded.

## 1. はじめに

セル構造オートマトン (CA) は、同一の有限オートマトン (セル) を空間的に一様に配列・接続したシステムであり、各セルがその近傍セルの状態に依存して並列的に状態を変化させることにより、セル空間全体の状態 (configuration) が次々と遷移していくものである。CA が可逆的であると呼ばれるのは、どの configuration も直前の時刻の configuration を高々 1 つしか持たない (すなわち、大域遷移関数が単射になる) という条件を満たす場合である。こういった可逆的オートマトンのシステムは、一見非常に特殊に見えるが、実際には物理的あるいは化学的な可逆性と密接な関係を持っており、とりわけ、計算過程における不可避的なエネルギー消費の問題を論じるのに重要な役割を果たすことが知られている。<sup>(2)</sup>

可逆的 CA (RCA) は、大変強い制約のついた CA でありながら、万能な計算能力を有することが証明されている。Toffoli<sup>(3)</sup> は、任意の (非可逆な)  $k$  次元 CA が  $k+1$  次元の RCA で模倣できることを示し、これによって 2 次元 RCA の計算万能性を導いている。また、森田ら<sup>(4)</sup> は、1 次元 RCA によって任意の Turing 機械を模倣できることを証明し、計算万能な RCA の次元を 1 にできることを示した。しかし、これらの計算万能な RCA は、各セルの状態数をかなり多く必要とするものである。Margolus<sup>(1)</sup> は、計算万能な 2 次元 RCA のモデルで状態数が 2 のものを与え、2 次元の場合には非常に単純な RCA モデルを構成できることを示している。但し、Margolus のモデルは時間的・空間的に多少の非一様性を持つような 2 次元 RCA であり、標準的な CA の枠組みからは外れたものであった。

本研究は、標準的な枠組みの 2 次元 4 近傍の RCA で、なるべく単純な (状態数の少ない) 計算万能モデルを見いだすことを目的としている。ここでは、Partitioned Cellular Automaton (PCA) と呼ぶ枠組みを補助に用いて計算万能な可逆的モデルを設計する。PCA (の 1 次元版) は文献 (5) で最初に提案されたもので、1 つのセルが近傍数だけの部分に分割され、各部分の持つ情報が近傍セルのうちの 1 つだけに送られるような CA である。PCA では局所遷移関数の単射性と大域遷移関数の単射性が等価になるため、可逆的モデルの設計が非常に容易になる。PCA は通常の CA のある種のサブクラスとみなせるので、計算万能な可逆的 PCA (RPCA) を設計してやれば、計算万能な RCA が即座に得られることになる。

2 次元 4 近傍 PCA (2PCA(4)) は、1 つのセルが上、下、左、右の 4 部分に分割されており、各セ

ルの次の時刻の状態は、上隣のセルの下部、下隣の上部、左隣の右部、右隣の左部、の現在の状態に依存して決まる。本稿では 16 状態 2PCA(4) のモデルを 2 種類示す (モデル 1 とモデル 2)。16 状態というのは、各部分がそれぞれ 2 つの状態をとるものである。2PCA(4) の局所遷移関数に対し、可逆性、保存性、等方性、鏡像不変性、の 4 つの制約を考えて遷移関数を分類したとき、モデル 1 はこれら 4 つの制約を全部満たすもの、モデル 2 は可逆性、保存性、等方性だけを満たすものとなっている。

Margolus は、彼の考案した 2 状態 RCA の空間にビリヤード・ボール・モデル (BBM)<sup>(2)</sup> が埋め込めることを示した。<sup>(1)</sup> BBM は、弾性衝突をする理想的な剛球によって論理演算を遂行するようなモデルで、これによって Fredkin ゲートが実現できることが知られている。<sup>(2)</sup> Fredkin ゲートは 3 入力 3 出力の可逆的かつビット保存的な論理素子で、これと遅延素子だけで任意の論理回路が構成できる万能な論理素子である。<sup>(2)</sup> これらのことから、Margolus の 2 状態 RCA モデルの計算万能性が導かれる。

本稿でも基本的にはこれと同じ方法で我々の 2 つの 16 状態モデルの計算万能性を示す。ここでは、信号 (すなわちボール) の伝搬、ミラーによる信号の反射、2 つの信号の衝突などが、各モデルで、どのような configuration によって実現できるかを示す。次に、それらを組み合わせることによって、Fredkin ゲートを実現する configuration を具体的に与える。

## 2. 2 次元 Partitioned Cellular Automaton

通常の 2 次元 CA では、その局所遷移関数は、注目するセルの近傍セルの現在の状態の組み合わせに基づいて、そのセルの次の時刻の状態を定めるものとなっている。図 1 は、2 次元 4 近傍 CA の場合を示している。この場合、局所遷移関数が 4 つのセルから 1 つのセルの状態を決定するものであるから、大域遷移関数が可逆的になるように局所遷移関数を与えるのは、大変困難である。

Margolus<sup>(1)</sup> は、この困難を回避するために独特の近傍形を持つ CA の枠組みを提案した。彼の CA は、図 2 (a) のようにセルとセルの境界が実線と点線で交互に区切られている。局所遷移関数は、実線または点線で区切られた 4 つのセル (ブロック) の状態を一括して更新するもので、奇数時刻では点線、偶数時刻では実線からなるブロックに対して局所遷移関数が適用される。図 2 (b) は 2 状態の場合の局所遷移関数の例である。

(Margolusはこの遷移関数を持つセル空間の計算万能性を示している)。この場合、局所遷移関数が可逆的(単射)なら、大域遷移関数も可逆的になり、可逆的CAの構成が容易になるが、時間的、空間的に非一様であり、標準的なCAの枠組みからは外れている。

本研究では、標準的な枠組みの2次元RCAの設計を容易にする為に、Partitioned CA(PCA)<sup>(6)</sup>を補助的に用いる。2次元PCA(4)は、図3に示されるように1つのセルが4つに分割されており、各セルの次の状態は、近傍4セルのうち、そのセルと接した部分の状態によって定まる。このようなモデルを考えると、局所遷移関数の可逆性と大域遷移関数の可逆性が等価になることが示せる。従って、標準的なCAでは困難であった、可逆的セル空間の設計が容易になる。

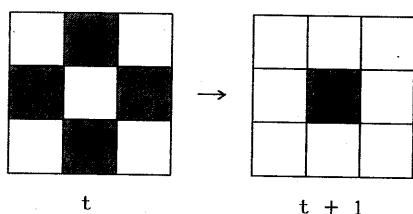


図1 通常の2次元4近傍CAの局所遷移関数

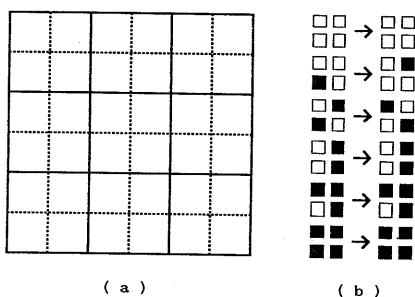


図2 (a) Margolus近傍 (b) 局所遷移関数の例

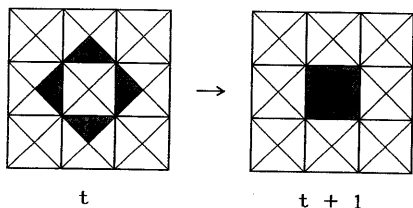


図3 2PCA(4)の局所遷移関数

[定義1] 2次元4近傍PCA(2PCA(4))は、

$$P = (Z^2, U, L, D, R, f_p)$$

によって定義される。但し、各項目は次の通り。

- (1) Zは全ての整数の集合
- (2) Uは各セルの上側部分の内部状態の有限集合
- (3) Lは各セルの左側部分の内部状態の有限集合
- (4) Dは各セルの下側部分の内部状態の有限集合
- (5) Rは各セルの右側部分の内部状態の有限集合
- (6)  $f_p$ は局所関数と呼ばれる、 $D \times R \times U \times L$ から  $U \times L \times D \times R$ への写像

Pのconfigurationは次のような写像cである。

$$c : Z^2 \rightarrow U \times L \times D \times R$$

$U \times L \times D \times R$ 上の全てのconfigurationの集合を

$$\text{conf}(U \times L \times D \times R)$$

によって表わす。つまり、

$$\text{conf}(U \times L \times D \times R) =$$

$$\{c \mid c : Z^2 \rightarrow U \times L \times D \times R\}$$

である。

“UP”を  $U \times L \times D \times R \rightarrow U$ なる射影関数とする。(“LEFT”, “DOWN”, “RIGHT”も同様。) そのとき、大域関数  $F_p : \text{Conf}(U \times L \times D \times R) \rightarrow \text{Conf}(U \times L \times D \times R)$ は次のように定義される。

$$F_p(c)(i, j) =$$

$$\begin{aligned} & f_p(\text{DOWN}(c(i, j-1)), \\ & \text{RIGHT}(c(i-1, j)), \\ & \text{UP}(c(i, j+1)), \\ & \text{LEFT}(c(i+1, j))) \\ & (i, j \in Z) \end{aligned}$$

Pを2PCA(4)とする。Pが局所可逆的であるとは  $f_p$ が単射であることをいう。また、Pが大域可逆的であるとは  $F_p$ が単射であることをいう。

2PCA(4)に関して、以下の補題が成立する(証明は1次元の場合<sup>(6)</sup>と同様なので省略)。

[補題1] Pを任意の2PCA(4)とする。Pが局所可逆的であることと、Pが大域可逆的であることは同値である。

補題1より、大域可逆的な2PCA(4)を得るには局所遷移関数が単射になるように設計すればよいことがわかる。なお、これ以後、局所可逆的または大域可逆的な2PCA(4)を単に可逆的2PCA(4)(2RPCA(4))と呼ぶ。

[補題2] 任意の2PCA(4), Pに対して、大域遷移関数がPの大域遷移関数と一致するような2次元

4 近傍 CA が存在する。

補題 2 は, 2 PCA (4) が通常の 2 次元 4 近傍 CA のサブクラスであることを述べている。

### 3. Fredkin ゲートと保存論理回路

次節では 2 RPCA (4) のモデルを 2 つ与え, それらの空間に Fredkin ゲートを埋め込む方法を示すが, この節ではそのために必要となる事柄を解説しておく。

保存論理は, Fredkin と Toffoli が, 「可逆的」かつ「ビット保存的」な論理ゲートから構成される回路を扱う設計理論として提案したものであり, 通常ならばゴミとして捨てられてしまうような不要な情報 (あるいはそれを担っている物質やエネルギー) の再利用法まで記述する事を意図して作られた体系である。

論理ゲートが可逆的であるとは, ゲートが実現している入力集合から出力集合への写像が全単射であることをいう。また, 論理ゲートがビット保存的であるとはゲートにいかなる入力を与えても, 出力中の論理値 “1” の個数が入力中のそれと一致することをいう。

保存論理ゲートの中で特に重要なものは Fredkin ゲート (F ゲート) である。F ゲートは 3 入力 ( $c, p, q$ ) 3 出力 ( $c, x = cp + \bar{c}q, y = \bar{c}p + cq$ ) の可逆的かつビット保存的な論理ゲートであり, 表 1 に示す入出力関係を持ち, 図 4 のように表現される。概念的には図 5 のように,  $c = 1$  のときは入出力は平行に接続され,  $c = 0$  のときは入力  $p, q$  が交差して接続されるゲートである。

F ゲートの論理的万能性, すなわち, F ゲートだけで任意の組み合わせ論理回路 (特に, AND, OR, NOT, 分岐など) が構成できることは, Fredkin と Toffoli<sup>(2)</sup> によって示されている。従って, F ゲートと単位遅延素子によって任意の順序回路が構成できる。

入力			出力		
c	p	q	c	x	y
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1

表 1 F ゲートの入出力関係

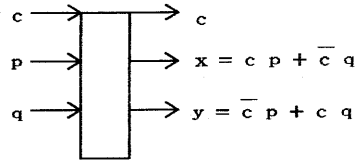


図 4 F ゲート

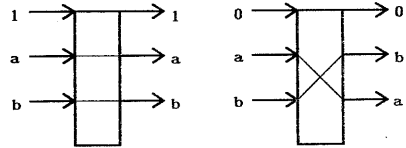


図 5 F ゲートの概念図

Fredkin と Toffoli<sup>(2)</sup> は, さらに, 可逆性と保存性を有する物理的なモデルとして, ビリヤード・ボール・モデル (BBM) を提案している。BBM は弾性衝突をする理想的な剛球によって論理演算を遂行するようなモデルで, これによって Fredkin ゲートが実現できる。

BBM で F ゲートを直接に構成するのは困難であるが, F ゲートより単純な保存論理ゲートである Interaction ゲート (I ゲート), Switch ゲート (S ゲート) を補助に用いると構成が容易になる。

I ゲートは, 図 6 に示されるような 2 入力 ( $p, q$ ) 4 出力 ( $pq, \bar{p}q, p\bar{q}, p\bar{q}$ ) の論理ゲートである。また, 逆 I ゲートは, I ゲートの逆関数を実現するゲートである (但し,  $x, y, z$  が互いに排他的 (値が 1 になるのが高々 1 つ) である場合にのみ定義される関数を実現する)。

S ゲートは, 図 7 に示されるような 2 入力 ( $c, x$ ) 3 出力 ( $c, cx, \bar{c}x$ ) の論理ゲートである。また, 逆 S ゲートは,  $c$  と  $z$ , および  $\bar{c}$  と  $y$  が排他的である場合にのみ定義される。

S ゲートは, I ゲートと逆 I ゲートによって実現できる (図 8)。また, F ゲートは, S ゲートと逆 S ゲートによって実現できる (図 9)。

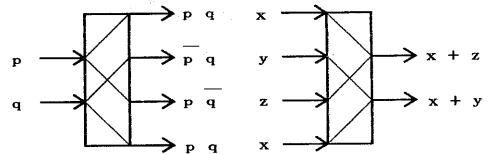


図 6 I ゲートと逆 I ゲート

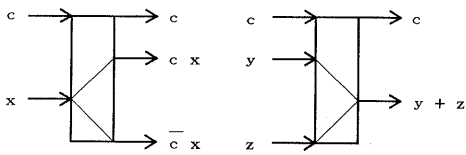


図7 Sゲートと逆Sゲート

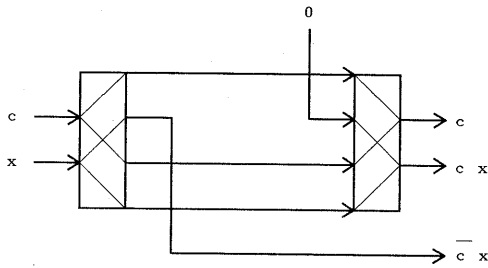


図8 Iゲートと逆IゲートによるSゲートの実現

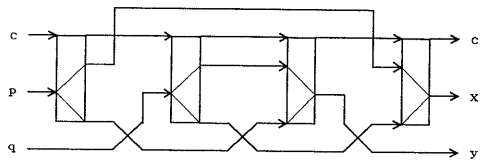


図9 Sゲートと逆SゲートによるFゲートの実現

#### 4. 16状態RPCA(4)による

##### Fredkinゲートの実現

ここでは、16状態RPCA(4)のモデルを2種類与え、どちらのモデルにおいてもFredkinゲートが実現できることを示す。この結果、両モデルの計算万能性が結論できる。

#### 4.1 モデル1

モデル1の状態遷移規則を図10に示す(黒が論理値“1”, 白が論理値“0”に対応)。この規則は、可逆性、保存性、等方性、鏡像不変性の4つの制約(付録参照)を満たす。信号の伝播は、図11のように1時刻に1セル分だけ点線に沿って直進する。1つの信号(BBMの“ボール”に相当)は、反射やIゲート演算をうまく実現するために2つの論理値“1”により表現される。図12のように4つのセルの隣接する分割部分に論理値“1”を配置するとそのConfigurationは、時間とともに変化しない安定ブロックとなる。安定ブロックを2つ結合すると、信号を反射させるようなミラーができる(図13)。但し、その際

に、2ステップの遅延が起こる。図14は、Iゲートである。Iゲートは、2つの信号が1つのセルで衝突した時に、両信号とも進路がずれる(1つだけでは変わらない)ことを利用して実現できる。Iゲートと逆Iゲートとミラーを図8の方法で組み合わせてSゲートを実現したものが図15である。さらに、Sゲートと逆Sゲートとミラーを図9の方法で組み合わせてFゲートを実現したものが図16である。このFゲートでの入出力間の時間遅れは164ステップである。

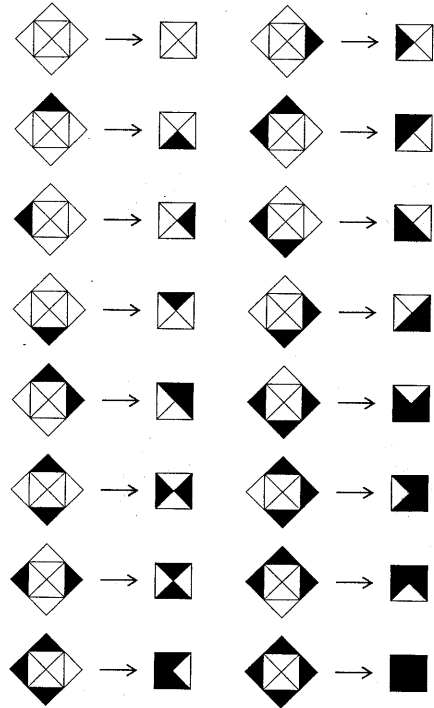


図10 状態遷移規則(モデル1)

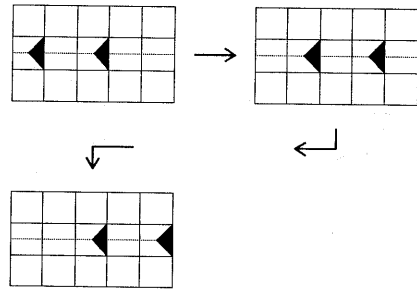


図11 信号の伝播(モデル1)

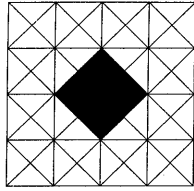


図12 安定ブロック (モデル1)

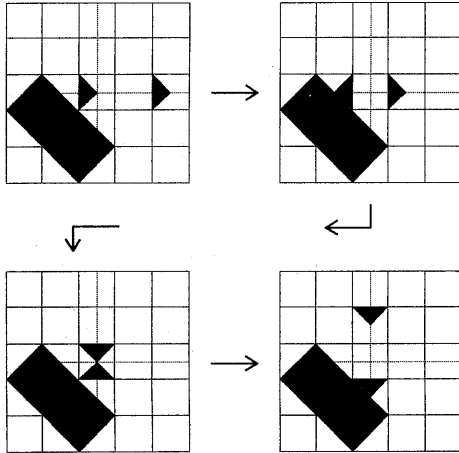


図13 ミラーによる反射 (モデル1)

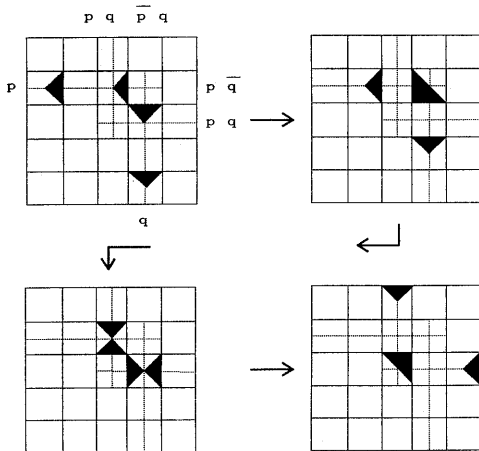


図14 Iゲート (モデル1)

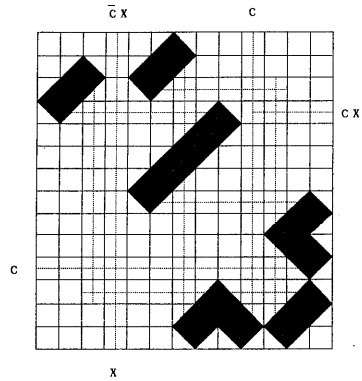


図15 Sゲート (モデル1)

#### 4.2 モデル2

モデル2の状態遷移規則(図17)は、可逆性、保存性、等方性、3つの制約を満たすが、鏡像不変性は持っていない。信号の伝播、安定ブロック、Iゲートのconfigurationはモデル1と同じである。但し、安定ブロックについては、到来する信号の方向によって破壊されることがあるが、安定ブロック1つだけでミラーを構成できる(図18)。但しこの場合、左旋回の反射しかできないため、右旋回させるときには、左旋回の反射3回で代用する必要がある。図19はSゲート、図20はFゲートを示す。Fゲートの入出力間の時間遅れは174ステップである。

#### 5. むすび

本研究では、単純な局所遷移関数を持つ16状態2RPCA(4)のモデルでFredkinゲートを模倣できるようなものを2種類示した。Fredkinゲートの論理的万能性は文献(2)に、また、Fredkinゲートを用いて万能な計算機構を構成するためのより具体的な方法は文献(5)に示されている。これにより、上記の2つのモデルの計算万能性がいえる。

両モデルでFredkinゲートが正しく模倣できることは、コンピュータ・シミュレーションによって確認した。

2RPCA(4)の場合、等方性を仮定すると、16状態のモデルは1状態について状態数の少ないモデルである。しかし、等方性を仮定しない場合や、RPCAではない通常のRCAの枠組みを考えた場合に、これよりも状態数の少ない計算万能モデルを構成できるかは未解決の問題として残される。

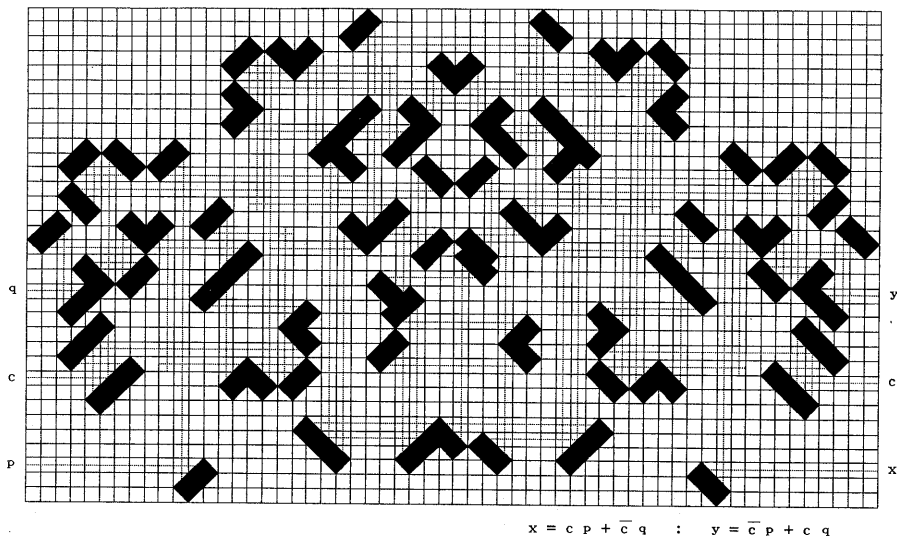


図16 Fゲート (モデル1)

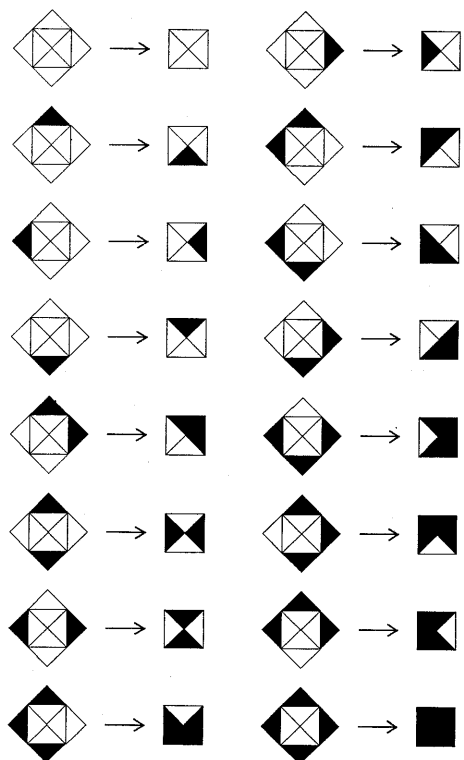


図17 状態遷移規則 (モデル2)

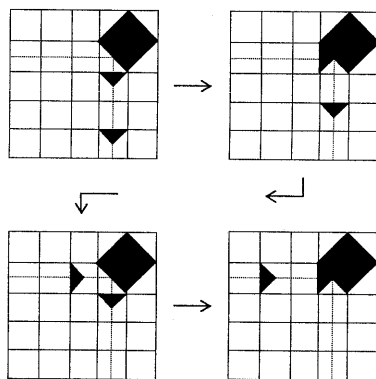


図18 ミラーによる反射 (モデル2)

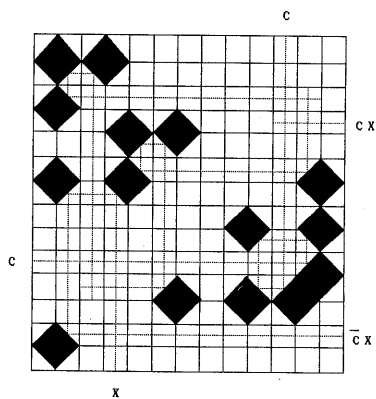


図19 Sゲート (モデル2)

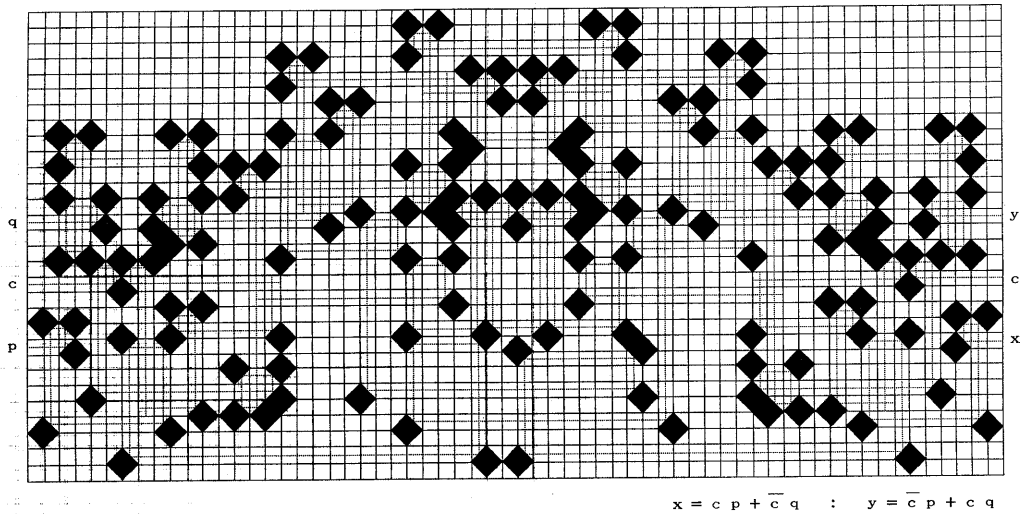


図 20 Fゲート (モデル 2)

文 献

- (1) Margolus, N. : "Physics-like models of computation", Physica, 10D, pp.81-95 (1984).
- (2) Fredkin, E. and Toffoli, T. : "Conservative logic", Int. J. of Theoretical Physics, 21, pp. 219-253 (1982).
- (3) Toffoli, T. : "Computation and construction universality of reversible cellular automata", J. Comput. & Syst. Sci., 15, pp. 213-231 (1977).
- (4) K. Morita and M. Harao : "Computation universality of one-dimensional reversible (injective) cellular automata", Trans. IEICE, E-72, 6, pp. 758-762 (1989).
- (5) K. Morita : "A simple construction method of a reversible finite automaton out of Fredkin gates, and its related problem", Trans. IEICE, E73, 6, pp. 978-984 (1990).

付 録

[保存性, 可逆性, 等方性, 鏡像不変性の定義]

[定義 2]  $f_p$  が保存的であるとは

$$f_p(x_0, x_1, x_2, x_3) = (y_0, y_1, y_2, y_3)$$

となるような任意の  $x_i, y_i \in \{0, 1\}$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) に対して,

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3$$

となることをいう。

[定義 3]  $f_p$  が可逆的であるとは,  $f_p$  が単射であることをいう。

[定義 4]  $f_p$  が等方的であるとは

$$f_p(x_0, x_1, x_2, x_3) = (y_0, y_1, y_2, y_3)$$

となるような任意の  $x_i, y_i \in \{0, 1\}$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) に対して,

$$f_p(x_3, x_0, x_1, x_2) = (y_3, y_0, y_1, y_2)$$

となることをいう。

[定義 5]  $f_p$  が鏡像不変であるとは

$$f_p(x_0, x_1, x_2, x_3) = (y_0, y_1, y_2, y_3)$$

となるような任意の  $x_i, y_i \in \{0, 1\}$  ( $i=0, 1, 2, 3$ ) に対して, 以下の 1), 2), 3) が成立することをいう。

$$1) x_i \neq x_{i+1} = x_{i+2} = x_{i+3} \text{ のとき, } y_i = y_{i+2}$$

$$2) x_i = x_{i+1} \neq x_{i+2} = x_{i+3} \text{ のとき, } y_i = y_{i+1},$$

$$y_{i+2} = y_{i+3}$$

$$3) x_i = x_{i+2} \neq x_{i+1} = x_{i+3} \text{ のとき, } y_i = y_{i+2},$$

$$y_{i+1} = y_{i+3}$$

( $i=0, 1, 2, 3$ )

但し, 添字  $i$  に対する加算  $+$  は, mod 4 の加算とする。