アルゴリズム 26－2
（1992. 3. 23）

重み付き領域を考慮した最短経路問題

安留 誠吾 増澤 利光 辻野 嘉宏 都倉 信樹
大阪大学基礎工学部情報工学科

平面上の任意の2点間の最短経路を求める問題は，計算幾何学の研究分野の基本的問題の一つである．本稿では境界が水平または垂直な線分で構成された重み付きの障害物のある平面上において，水平または垂直な線分で構成された経路を考える．そして，障害物を全て回避する最短経路を求めるのではなく，障害物の重みに応じた代償を払うことによりその障害物を通過できるものとする．障害物と2点が与えられたとき 重み付き L_1 距離と屈折数の両方を考慮した評価尺度による最短経路を$O(n^2)$時間, $O(n^2)$領域で求める手法を提案する．ここで n は障害物の頂点の総数を表す．

Shortest Rectilinear Paths among Weighted Obstacles in the Plane

Seigo Yasutome Toshimitsu Masuzawa Yoshihiro Tsujino Nobuki Tokura
Dept. of Information and Computer Sciences
Faculty of Engineering Science, Osaka University

The problem of finding the shortest path between two points in the plane is one of the fundamental problems in computational geometory. In this paper we study the problem under the constraints that the path is rectilinear and the boundary edges of each weighted obstacles are horizontal or vertical line segments. Instead of restricting a path to totally avoid obstacles we allow a path through them at extra cost as weight associated with each obstacles. Given a set of obstacles and two points, we present the method which finds the shortest path in the new metric that generalizes the L_1 metric and the link metric in $O(n^2)$ time and $O(n^2)$ space, where n is the number of the vertices of obstacles.

1 まえがき

障害物のある平面上の2点間の最短経路を求める問題は, 計算幾何学における基本的問題の一つであり, これまでに多くの研究が行われている. この問題は求める経路の形状や距離の定義, あるいは障害物の形状の違いにより分類される. まず, 障害物と2点間の経路が交差できない環境においてユークリッド距離における最短経路を求める問題がこれまでに考えられている [1, 2, 3, 4, 5]. また L_1 距離における最短経路問題を扱った文献としては [6, 7, 8, 9] などがある.

しかし, 一般に障害物は, ある代償を払えば通過できるものも多く, その代償は障害物によって異なるものである. そこで, 障害物を通過する際に払う代償を考慮した最短経路についてもこれまでに考えられている. 文献 [8] は, 障害物と2点が与えられたときに $O(n^2)$ 時間で2点間の最短経路を求めるアルゴリズムを提案している. また, 障害物と1点がまえもって与えられたときに, $O(n^2)$ 時間と領域を用いて前処理をすれば, 他の1点を与えられたときに $O(n\log^2 n)$ 時間と $O(n\log n)$ 領域で2点間の最短経路を求めるアルゴリズムも提案している.

ロボットの移動, VLSI での配線, 無線の中継などを考えると経路が屈折する点の数を少なくしたいことが多い. そこで, [10, 11] は経路の屈折数を考慮した評価尺度による最短経路を求めるアルゴリズムを提案している. 文献 [12] は, 障害物内を通らない環境において, 1点と障害物が前もって与えられたとき $O(n^2)$ 時間 $O(n\log n)$ 領域の前処理をしておくことにより他の1点が与えられたとき $O(\log n)$ 時間で屈折数と L_1 距離の両方を考慮した評価尺度による最短経路を求めるアルゴリズムを提案している.

本稿では, 境界が水平もしくは垂直な線分のみからなる重み付き障害物のある平面上で, 重み付き L_1 距離と屈折数の両方を考慮した評価尺度において最短となる水平もしくは垂直な線分のみからなる経路を $O(n^2)$ 時間, $O(n^2)$ 領域で求める手法を提案する.

2 諸定義

本稿であつかう重み付き障害物 (以下では単に, 障害物とよぶ) を, 次のように定義し, 障害物の集合を S, 障害物の頂点の集合を V, $n = |V|$ とする.

[定義 1] 障害物を次のように定義する.

- 障害物は単純多角形で, 境界が水平線分もしくは垂直線分からなる.
- 異なる障害物は頂点以外を共有することはない.
- 各障害物は正の重みを持つ.

[定義 2] 経路 P がいくつかの水平線分もしくは垂直線分のみからなるとき, この経路 P をマンハッタン経路といい線分 $s_i (1 \leq i \leq m)$ の系列 $s_1, \ldots, s_m$ であらわす. さらに, 高々2本の線分からなるマンハッタン経路を単純直線経路という.

[定義 3] マンハッタン経路において連続する水平線分と垂直線分との共有点を屈折点といい, 屈折点の数をそのマンハッタン経路の屈折数という.

[定義 4] マンハッタン経路 P の重み付き L_1 距離を次のように定義する.

$$\text{重み付き } L_1 \text{距離} = \int_P (1 + f(s))ds$$

ただし,

$$f(s) = \begin{cases} \text{位置 } s \text{ を含む障害物の重み} & \text{位置 } s \text{ が障害物内のとき} \\ 0 & \begin{cases} \text{位置 } s \text{ が障害物外のとき} \\ \text{障害物の境界} \end{cases} \end{cases}$$

本稿では, 屈折数と重み付き L_1 距離を複合した評価尺度 (以降, 複合評価尺度とよぶ) を最小とするマンハッタン経路を求める.

[定義 5] マンハッタン経路 P の複合評価尺度の値を次のように定義する.

P の複合評価尺度の値 =

$$C \times (P\text{の屈折数}) + (P\text{の重み付き } L_1 \text{距離})$$

ただし, C は負でない実数の定数とする.

表 1: 評価尺度のパラメタの設定

C	障害物の重み	対応する尺度
1	∞	屈折数
0	—	重み付き L_1 距離
0	∞	L_1 距離

ここで, 注意しておきたいことは, 表 1 のように評価尺度のパラメタを設定することにより複合評価尺度は従来の屈折数による尺度, (重み付き) L_1 距離による尺度も扱うことができる. すなわち複合評価尺度は従来の評価尺度を一般化したものといえる.

本稿で考える最短経路を求める問題とは, 障害物内を通過できる環境において平面上の重み付き障害物と任意の 2 点 (始点, 終点) が与えられたとき 複合評価尺度を最小とするマンハッタン経路を求める問題である.

[定義 6] 任意の点を p とする. この点を通る水平, 垂直な直線を描いたとき, 障害物の境界との交点ができる. このすべての交点を点 p の投影点とよぶ.

任意の障害物を o,o の任意の凹頂点を p とする. 点 p を端点とする障害物 o の線分を $(p,p_1),(p,p_2)$ とする. 点 p_1 を端点とし線分 (p,p_1) を含む半直線と, 点 p_2 を端点とし線分 (p,p_2) を含む半直線を考える. それぞれの半直線において, 点 p から最も近い o の境界との交点を内部投影点とよぶ. 図 1においては点 p_d, p_r が点 p の内部投影点である. そして

$\bar{V} = V \cup$ (凹頂点の内部投影点の集合)

$\cup$ (始点終点) $\cup$ (始点終点の投影点の集合)

とする.

3 p-q最短経路アルゴリズム

3.1 p-q最短経路

p-q最短経路を求めるアルゴリズムを述べるまえに重み付き障害物のある平面でのマンハッタン経路の特徴を述べる.

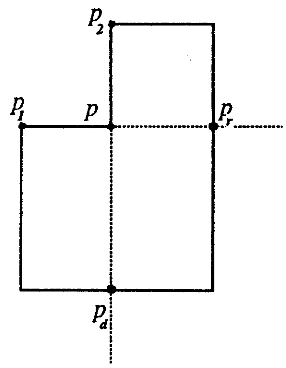

図 1: 内部投影点

[補題 1] 任意の点 $r \in \bar{V}$ と p-q最短経路 P上の$\bar{V}$の要素を含まない線分 s_iから構成される長方形の領域 (境界を含む) を Rとする. Rが次の条件を満たすとき s_iを rまで平行移動しても複合評価尺度の値は増加しない.

- rを含む Rの境界上を除く Rの境界および Rの内部には$\bar{V}$の要素は存在せず, rは始点終点ではない.

[証明]

一般性を失うことなしに s_iを垂直線分とする仮定する. 条件より領域 Rの内部に障害物の境界の垂直線分と水平線分が混在することはない. 混在したならば必ず交点ができる. これは$\bar{V}$の要素が内部に存在しないことに矛盾する. また, 条件より rを含む領域 Rの境界以外の境界おいて障害物の境界の垂直線分と水平線分が混在することはない. 混在したならば s_iの端点に交点ができる. これは s_iが$\bar{V}$の要素を含まないことに矛盾する. よって, 次の場合を考えればよい.

1. 垂直線分のみ存在する場合 (図 2)
   領域 R内は垂直線分のみであることより点 r を含む Rの境界は重みが0である. また, 線分 s_iは障害物外である. なぜなら s_iが障害物内に存在す

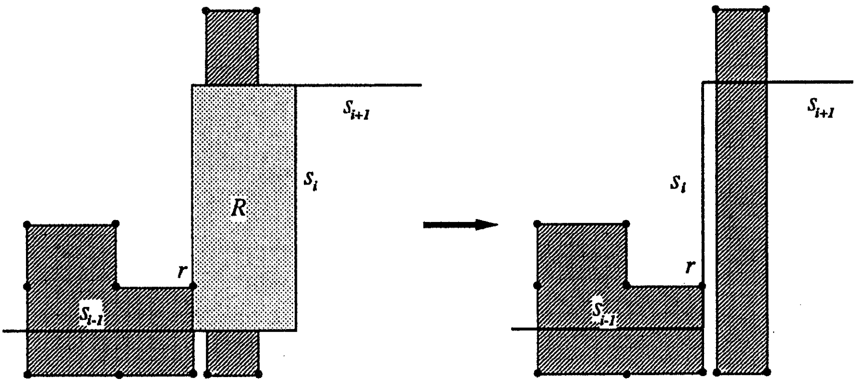

図 2: 垂直線分のみの場合

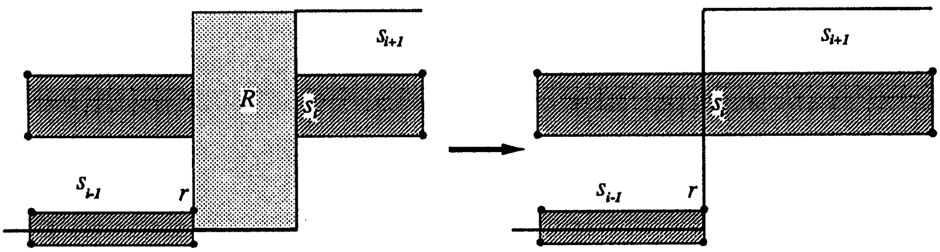

図 3: 水平線分のみの場合

るとき s_i を r まで平行移動 すると複合評価尺度の値が小さくなる．これは経路 P が p-q 最短経路であることに矛盾 する．よって線分 s_i を点 R まで平行移動しても複合評価尺度の値は増加しない．

2. 水平線分のみ存在する (図 3)
線分 s_i の一端点が障害物に含まれれば他の端点も含まれそれらの重みは同じである．なぜなら，s_i を平行移動すると複合評価尺度の値が小さくなる．これは経路 P が p-q 最短経路であることに矛盾する．よって線分 s_i を点 R まで平行移動しても複合評価尺度の値は増加しない． □

[補題 2] 平面中の任意の 2 点を始点 p，終点 q とする．複合評価尺度の値を最小とするマンハッタン経路 (以降, p-q 最短経路とよぶ) で次の条件を満たすマンハッタン経路 $P = s_1, \ldots, s_m$ が存在する．

- 線分 $s_i (1 \leq i \leq m)$ は $\bar{V}$ の要素を少なくとも 1 つ含む．

[証明]
任意の p-q 最短経路を $P' = s'_1, \ldots, s'_m$ とする．このとき図 4 のアルゴリズムを実行することにより p-q 最短経路 P' から $P = s_1, \ldots, s_m$ を複合評価尺度の値を増

加させずに構成できることを証明する.
一般性を失うことなしにs'_iを垂直線分とする仮定する. 図4のアルゴリズムにおいて線分s'_iは, $\bar{V}$の要素を含んでいないとき, $\bar{V}$の要素を含むようになるまで平行移動する. この$\bar{V}$の要素を点rとする. 点rが始点終点でない場合は, 補題1の条件を満たしている. つまり, 線分s'_iを平行移動しても複合評価尺度の値は増加しない. 点rが始点である場合は,

- 領域R内に垂直線分のみある場合
  線分s'_iを点rまで平行移動することにより屈折数が1減少する. $C=0$のときは複合評価尺度の値は増加しない. $C\neq 0$のときは複合評価尺度の値が小さくなる. これは経路P'がp-q最短経路であることに矛盾する.
- 領域R内に水平線分のみある場合
  垂直の場合と同様である.

よって, 図4のアルゴリズムにより任意のp-q最短経路P'から条件を満たす$P=s_1,\ldots,s_m$を 複合評価尺度の値を増加させずに構成できる. □

[補題 3] p-q最短経路で, $\bar{V}$の要素間の単純直線経路を連結して得られるものが存在する.

[証明]
補題2より, 各$s_i(1\leq i\leq m)$が$\bar{V}$の要素の少なくとも1つを含むようなp-q最短経路$P=s_1\ldots s_m$が存在する. この経路PはPに現れる$\bar{V}$の頂点で分割すれば, Pは$\bar{V}$の頂点間の単純直線経路からなるとみなせる. よって, 任意の2点p,qに対し, $\bar{V}$の要素間の単純直線経路を連結して得られるようなp-q最短経路が存在する. □
補題3より$\bar{V}$の要素間の単純直線経路を連結して得られるマンハッタン経路のみを考えればよいことがわかる.

3.2 最短経路グラフ

次のようなグラフG^*を考える.

[定義 7] 重み付きグラフ$G^*=(V',E)$は次のように定義される.

- 頂点集合$V'=V_h\cup V_v$
  ただし,
  $$\begin{aligned} V_h &= \{u^h | u\in\bar{V}\} \\ V_v &= \{u^v | u\in\bar{V}\} \end{aligned}$$
  とする.
- 辺集合$E=E_{hh}\cup E_{vv}\cup E_{hv}\cup E_{vh}\cup E'$
  ただし,
  $$\begin{aligned} E_{hh} &= \{(u^h,w^h)|\ \text{線分}\ (u,w)\ \text{が水平線分}, u,w\in\bar{V}\} \\ &\quad \text{重みは}\ (u,w)\ \text{の重み付き}\ L_1\text{距離である.} \\ E_{vv} &= \{(u^v,w^v)|\ \text{線分}\ (u,w)\ \text{が垂直線分}, u,w\in\bar{V}\} \\ &\quad \text{重みは}\ (u,w)\ \text{の重み付き}\ L_1\text{距離である.} \\ E_{hv} &= \{(u^h,w^v)|\ \text{水平線分}-\text{垂直線分となる} \\ &\quad u^h\text{-}w^v\ \text{単純直線経路}, u,w\in\bar{V}\} \\ &\quad \text{重みは単純直線経路の複合評価尺度の値である} \\ E_{vh} &= \{(u^v,w^h)|\ \text{垂直線分}-\text{水平線分となる} \\ &\quad u^v\text{-}w^h\ \text{単純直線経路}, u,w\in\bar{V}\} \\ &\quad \text{重みは単純直線経路の複合評価尺度の値である} \\ E' &= \{(u^h,u^v)|u\in\bar{V}\} \\ &\quad \text{重みは}\ C\ \text{である.} \end{aligned}$$

つまり, V_vの頂点には垂直線分のみが入って, V_hの頂点には水平線分のみが入るようする. そして, 水平線分から垂直線分 (水平線分から垂直線分) へ移動するときには余分に重みCが課せられる.

[補題 4] グラフG^*の各辺に対応する単純直線経路の重みが$O(n^2)$で計算することができる.

[証明]
2点u,v間の単純直線経路は水平線分-垂直線分, 垂直線分-水平線分, 垂直線分, 水平線分の4通りである. よってu,v間の単純直線経路の重み付きL_1距離を求めるには, $\bar{V}$と水平線分, 垂直線分との間の重み付き直線

入力: $P' = s'_1, \ldots, s'_m$
出力: $P = s_1, \ldots, s_m$
begin
  s'_1を s'''_1とし,s'_2を s''_2とする;
  for i:=2 to m−1 do begin
    if s''_iが$\bar{V}$を要素を含んでいない then begin
      s''_iを s'''_{i-1}の方向へ$\bar{V}$の要素を含むまで平行移動した線分を s'''_iとする;
      s''_iの平行移動に伴い
      s'''_{i-1}を縮めた線分を s_{i-1}とし,
      s'_{i+1}を伸ばした線分を s''_{i+1}とする
    end
    else begin
      s'''_{i-1}を s_{i-1}とし,s''_iを s'''_iとし,
      s'_{i+1}を s''_{i+1}とする
    end
  end
  s'''_{m-1}, s''_mをそれぞれ s_{m-1}, s_mとする
end

図 4: 構成アルゴリズム

入力: 水平方向に関して整列された頂点集合;
出力: table_h[$|\bar{V}|$][$|\bar{V}|$];
配列 table_h を初期化する;
for i: = 1 to $|\bar{V}|$ do begin
  for j:=i−1 to 1 step −1 do
    table_h[i][j] = table_h[i][j+1]
      + (点 i を通る水平直線と点 j,j+1 を通る垂直直線の 2 つの交点を端点とする線分の重み付き距離);
  for j:=i+1 to $|\bar{V}|$do
    table_h[i][j] = table_h[i][j−1]
      + (点 i を通る水平直線と点 j,j−1 を通る垂直直線の 2 つの交点を端点とする線分の重み付き距離);
end

図 5: 水平方向の重み付き距離計算アルゴリズム

距離が求まればよい. ここでは, 水平方向についてのみ説明する. 図 5のアルゴリズムによって $table_h[i][j]$ には, 頂点 i, j間の重み付き直線距離が格納されている. 垂直方向についても $table_v[i][j]$ を同様に用意する. 2 点 $u, v \in \bar{V}$のグラフ G^*での辺 (u^*, v^*) の重みを $W(u^*, v^*)$ とする.

$$\begin{aligned}
W(u^h, v^v) &= table_h[f_h(u)][f_h(v)] \\
&\quad + C + table_v[f_v(v)][f_v(u)] \\
W(u^v, v^h) &= table_v[f_v(u)][f_v(v)] \\
&\quad + C + table_h[f_h(v)][f_h(u)] \\
W(u^h, v^h) &= table_h[f_h(u)][f_h(v)] \\
W(u^v, v^v) &= table_v[f_v(v)][f_v(u)] \\
W(u^v, u^v) &= C
\end{aligned}$$

ただし,

$f_h : \bar{V} \rightarrow$ 水平方向に整列したときのインデックス
$f_v : \bar{V} \rightarrow$ 垂直方向に整列したときのインデックス

表$table_h[i][j]$ の初期化に頂点数が$O(n)$であることより $O(n^2)$ 時間必要である. そして, 同様に重み付き距離を求めるのに$O(n^2)$時間必要である. ゆえに垂直方向についても水平方向と同様にして重み付き距離を$O(n^2)$時間で求めることができる. □

3.3 結果

補題 2,3,4より次のことがいえる.

[定理 1] 平面中の 2 点と重み付き障害物が与えられたとき, 複合評価尺度の値による最短直線経路を$O(n^2)$時間, $O(n^2)$領域で求めることができる.

[証明]
次のステップにより最短直線経路を求めることができる.

Step 1 グラフ G^* の構築
Step 2 グラフ G^* において最短経路問題を解く
Step 1 は補題4より $O(n^2)$ 時間 $O(n^2)$ 領域必要である．Step 2 は [13] の重み付きグラフにおける最短経路を求めるアルゴリズムを使うことにより $O(n^2)$ 時間 $O(n^2)$ 領域で求めることができる． □

4 むすび

文献 [12] は屈折数と L_1 距離の両方を考慮した評価尺度による最短経路を $O(n^2)$ 時間, $O(n^2)$ 領域で求める手法を提案した．本稿では，屈折数と重み付き L_1 距離 (障害物を代償を払えば通過できるものと考えた場合の L_1 距離) の両方を考慮した評価尺度として複合評価尺度とよぶ評価尺度を提案し，この尺度に関する最短経路を $O(n^2)$ 時間, $O(n^2)$ 領域で求める手法を提案した．また，複合評価尺度のパラメタを設定することにより，本手法では従来の屈折数による尺度に関する最短経路, (重み付き) L_1 距離による尺度に関する最短経路を求めることができる．今後の課題としては，1点と障害物に関して前処理を実行した後に他の1点が与えられた場合のアルゴリズムを考える必要がある．

参考文献

[1] Kedem, K. and Sharir, M.: "An Automatic Motion Planning System for a Convex Polygonal Mobile Robot in 2-dimensional Space", *Proceeding of the fourth annual Symposium on Computational Geometry*, pp. 329–340 (1988).

[2] Lee, D. T. and Preparata, F. P.: "Euclidean Shortest Paths in the Presence of Rectilinear Barriers", *Networks*, Vol. 14, pp. 393–410 (1984).

[3] Leven, D. and Sharir, M.: "An Efficient and Simple Motion-Planning Algorithm for a ladder moving in two-dimensional space amidst Polygonal Barriers", *Proceeding of the fourth annual Symposium on Computational Geometry*, pp. 221–227 (1985).

[4] Lozano-Perez, T. and Wesley, M. A.: "An Algorithm for Planning Collision-free Paths among Polyhedral Obstacles", *Communications of the ACM*, Vol. 22, pp. 560–570 (1979).

[5] Sifrony, S. and Sharir, M.: "A New Efficient Motion-Planning Algorithm for A Rod in Polygonal Space", *Proceeding of the fifth annual Symposium on Computational Geometry*, pp. 178–186 (1986).

[6] Clarkson, K., Kappor, S. and Vaidya, P.: "Rectilinear Shortest Paths though Polygonal Obstacles in $O(n \log^2 n)$ Time", *Proceeding of the third annual Symposium on Computational Geometry*, pp. 251–257 (1987).

[7] Rezende, de P. J., Lee, D. T. and Wu, Y. F.: "Rectilinear Shortest Paths with Rectangular Barriers", *Journal of Discrete and Computational Geometry*, Vol. 6, pp. 151–177 (1989).

[8] Lee, D. T., Chen, T. H. and Yang, C. D.: "Shortest Rectilinear Paths among Weighted Orbstacles", *Proceeding of the sixth annual Symposium on Computational Geometry*, pp. 301–310 (1990).

[9] Mitchell, J. S. B.: "An Optimal Algorithm for Shortest Rectilinear Paths Among Obstacles in the Plane", *Abstracts of the First Canadian Conference on Computational Geometry*, p. 22 (1989).

[10] Mitchell, J. S. B., Rote, G. and Woeginger, G.: "Minimum-Link Paths Among Obstacles in the Plane", *Proceeding of the sixth annual symposium on Computational Geometry*, pp. 63–72 (1990).

[11] Suri, S.: "A linear time algorithm for minimum link paths inside a simple polygon", *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, Vol. 35, pp. 99–110 (1986).

[12] Berg, de M., Kreveld, van M., Nilsson, B. J. and Overmars, M. H.: "Finding Shortest Paths in the Presence of Orthogonal Obstacles Using a Combined L_1 and Link Metric", *SWAT 90 Lecture Note 447*, pp. 213–224 (1990).

[13] Dijkstra, E. W.: "A Note on Two Problems in Connection with Graphs", *Numer. Math*, Vol. 1, pp. 269–271 (1959).