

空間内の直線の集合と多角形結び目の射影

富原雅則 浅野考平
関西学院大学 理学部

$E_{\alpha\beta\gamma}$ を3次元Euclid空間 E^3 の平面 $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ とし, $\pi_{\alpha\beta\gamma}$ を E^3 の $E_{\alpha\beta\gamma}$ への垂直射影とする. 本論文において, 平面 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 上の $\pi_{\alpha\beta\gamma}$ による直線の集合 L , 多角形結び目 K の像について考察し, n 本の直線の集合, および n 個の頂点をもつ多角形結び目は, 最大 $\Theta(n^6)$ 個の正則射影の同値類をもつことを示す. また, 多角形結び目の交差数が最小の正則射影を求める $O(n^4)$ のアルゴリズムを提案する.

Projections of Lines and Polygonal Knots in 3-space

Masanori Tomihara and Kouhei Asano

Faculty of Science, Kwansei Gakuin University
Nishinomiya, Hyogo 662, Japan

Let $E_{\alpha\beta\gamma}$ be the plane $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ in the Euclidean 3-space E^3 and $\pi_{\alpha\beta\gamma}$ the orthogonal projection of E^3 onto the plane $E_{\alpha\beta\gamma}$. We consider the images of a set of lines L and a polygonal knot K by the orthogonal projection $\pi_{\alpha\beta\gamma}$. In this paper, we prove that there are at most $\Theta(n^6)$ equivalence classes of the projections of a set of n lines and a knot with n vertices, and present an $O(n^4)$ algorithm to find an optimal projection for a knot with respect to the crossing numbers.

1. 導入

空間の中の直線の集合について、[2][3][9]などで組み合わせ幾何や、計算幾何学上の問題が議論されている。また、空間図形の平面への射影については、凸体に関する論文[8]がある。本論文では、空間の中の直線の集合と多角形結び目の平面への射影について考察する。

$E_{\alpha\beta\gamma}$ を3次元Euclid空間 E^3 の平面

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

とし、

$$\pi_{\alpha\beta\gamma} : E^3 \rightarrow E_{\alpha\beta\gamma}$$

を E^3 の $E_{\alpha\beta\gamma}$ への垂直射影とする。もちろん、 $(\alpha, \beta, \gamma) = (k\alpha', k\beta', k\gamma')$ のとき、 $\pi_{\alpha\beta\gamma} = \pi_{\alpha'\beta'\gamma'}$ である。

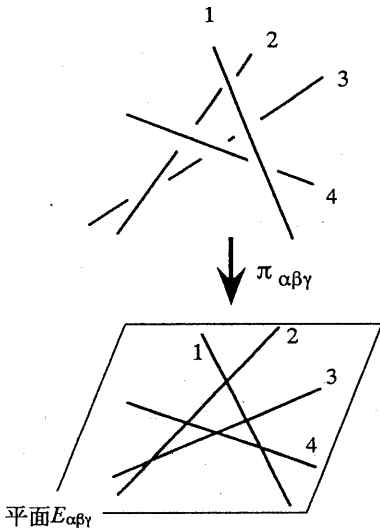


図1: 4本からなる直線の集合の平面 $E_{\alpha\beta\gamma}$ への射影

E^3 の中の n 本の、 $1, 2, \dots, n$ というラベルのつけられた直線の集合を L とし、 L の任意の2直線は互いに交わらないし、平行でもないと仮定する。

L の射影による像 $\pi_{\alpha\beta\gamma}(L) = L_{\alpha\beta\gamma}$ は、 $E_{\alpha\beta\gamma}$ の法線ベクトル (α, β, γ) が L の直線の方向ベクトルと平行でない場合、平面上のアレンジメントを構成する。 $L_{\alpha\beta\gamma}$ の各直線には、 L と同じラベルをつけておく。射影による像が単純アレンジメント、すなわち3つの直線が共有点をもたないアレンジメントを構成するとき、この像を直線の集合の正則射影と呼ぶことにする(図1)。

共通の直線の集合 L の2つの正則射影 $L_{\alpha\beta\gamma}$ と $L_{\alpha'\beta'\gamma'}$ が同値であるとは、2つのアレンジメントの間の直線のラベルを保存する同型写像が存在することをいう。

E^3 の中の点列 v_0, v_1, \dots, v_{n-1} は一般の位置にあるとする。すなわち、任意の4点は同一平面上にないと仮定する。このとき、線分 (v_i, v_{i+1}) ($0 \leq i \leq n-1$, $i+n$ を法とする)を e_i ($0 \leq i \leq n-1$)で表すことにする。

$\cup \{e_i : 0 \leq i \leq n-1\}$ を K と書き、 K を多角形結び目または単に結び目と呼ぶ(図2)。

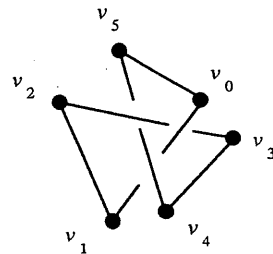


図2: 6点からなる多角形結び目

平面 $E_{\alpha\beta\gamma}$ 上の $\pi_{\alpha\beta\gamma}$ による K の像を $K_{\alpha\beta\gamma}$ で表す。 $K_{\alpha\beta\gamma}$ において、2つの点の像は異なり、かつ3つの線分の像が共有点をもたないとき、結び目 K の正則射影という(図3)。

正則射影の同値類を定義するために、 $K_{\alpha\beta\gamma}$ を、頂点を $\pi_{\alpha\beta\gamma}(v_i)$ ($0 \leq i \leq n-1$)、および $\pi_{\alpha\beta\gamma}(e_i)$ と $\pi_{\alpha\beta\gamma}(e_j)$ ($0 \leq i, j \leq n-1, i \neq j$)との交点とし、辺を、頂点を含まないような $\pi_{\alpha\beta\gamma}(e_i)$ ($0 \leq i \leq n-1$)の極大部分であるとするグラフ

と考える。 $K_{\alpha\beta\gamma}$ は $E_{\alpha\beta\gamma}$ をいくつかの領域に分割する。 2つの正則射影 $K_{\alpha\beta\gamma}$ と $K_{\alpha\beta\gamma}$ が同値であるとは、 $K_{\alpha\beta\gamma}$ の頂点、 辺、 領域と $K_{\alpha\beta\gamma}$ の頂点、 辺、 領域とが 1 対 1 対応で、 各 $\pi_{\alpha\beta\gamma}(v_i)$ を $\pi_{\alpha\beta\gamma}(v_i)$ ($0 \leq i \leq n-1$) に写し、 接続関係を保存するようなものが存在することをいう。

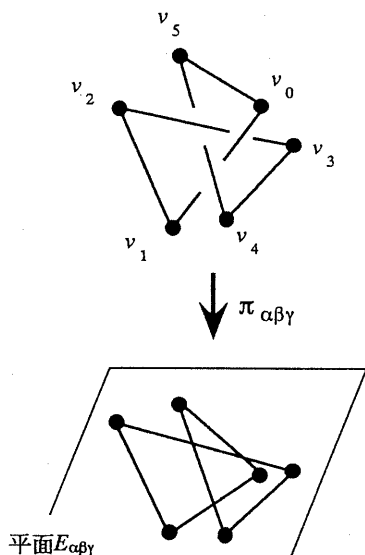


図 3: 6 点からなる多角形結び目の平面 $E_{\alpha\beta\gamma}$ への射影

本論文において、我々は以下の定理を証明する。

定理 1

n 本からなる直線の集合 L 、および n 個の頂点をもつ結び目 K は、最大 $\Theta(n^6)$ 個の正則射影の同値類をもつ。

定理 2

多角形結び目の交差数が最小の正則射影を求める $O(n^4)$ のアルゴリズムが存在する。

その他、グラフ理論については[1]、計算幾何学については[4]の用語を用いる。

2. 準備

議論を単純にするために、Euclid空間に無限遠平面を付け加え、射影空間と考えることにする。逆にいえば、Euclid空間は射影空間の一部であると考えられる。

本論文では、射影空間の点は、4次元の座標 $(p(0), p(1), p(2), p(3))$ で表し、点 p の座標が $p(3) \neq 0$ であるとき、点 p は Euclid空間の点 $(-p(0)/p(3), -p(1)/p(3), -p(2)/p(3))$ であると考えられる。前者を同次座標、後者を非同次座標と呼ぶことにする。したがって、方程式 $p(3) = 0$ を満足する同次座標をもつ点の集合が無限遠平面である。

同様に、射影平面の点は、3次元の同次座標 $(p(0), p(1), p(2))$ で表し、点 p の同次座標が $p(2) \neq 0$ であるとき、点 p は Euclid平面の点 $(-p(0)/p(2), -p(1)/p(2))$ であると考えられる。

射影空間内の平面と直線は、同次座標を用いるとそれぞれ同次方程式

$$a_0 p(0) + a_1 p(1) + a_2 p(2) + a_3 p(3) = 0$$

$$\begin{cases} a_0 p(0) + a_1 p(1) + a_2 p(2) + a_3 p(3) = 0 \\ b_0 p(0) + b_1 p(1) + b_2 p(2) + b_3 p(3) = 0 \end{cases}$$

を満足する点 $(p(0), p(1), p(2), p(3))$ の集合として表される。また、射影平面内の直線と 2 次曲線は、それぞれ同次方程式

$$a_0 p(0) + a_1 p(1) + a_2 p(2) = 0$$

$$\begin{aligned} & b_{00} p(0)^2 + b_{11} p(1)^2 \\ & + b_{22} p(2)^2 + 2 b_{01} p(0) p(1) \\ & + 2 b_{02} p(0) p(2) + 2 b_{12} p(1) p(2) = 0 \end{aligned}$$

を満足する点 $(p(0), p(1), p(2))$ の集合として表される。

射影の同値類を数え上げる方法を説明するために、平面上の点集合の直線への射影の分類について簡単に説明する。

$E_{\alpha\beta}$ をEuclid平面 E^2 上の直線

$$\alpha x + \beta y = 0$$

とし,

$$\pi_{\alpha\beta} : E^2 \rightarrow E_{\alpha\beta}$$

を E^2 の $E_{\alpha\beta}$ への写像とする。 E^2 の中の一般の位置にある点集合 S に対して、 $\pi_{\alpha\beta}(S) = S_{\alpha\beta}$ は2点は同一点に写される場合を除いて、1, 2, ..., n の順列を定める(図4)。同じ順列を定めるときに、同値であると定義すれば、平面の原点を通る直線全体がつくる1次元射影空間を、 S の2点を通る直線に垂直な直線で分割することによって同値類に分類できる[5]。従って、この場合 $n C_2$ 個の同値類がある。

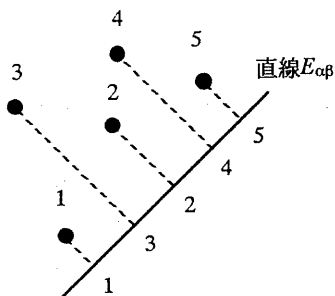


図4: 5点からなる点集合の直線 $E_{\alpha\beta}$ への射影

3. 空間の中の直線の集合の射影

Π を E^3 の原点を通る平面全体の集合とする。 Π は2次元射影空間、すなわち射影平面である。平面 $E_{\alpha\beta\gamma}$ は同次座標が (α, β, γ) の点である。また、ベクトル (α, β, γ) は平面 $E_{\alpha\beta\gamma}$ の法線ベクトルである。

平面上の点集合の直線への射影の同値類の分類と同様に、我々が課題とする空間の直線の集合の射影の同値類の分類のためには、3つの直

線の射影の像が共有点をもつような射影について考えればよい。以下、このような条件を満足するような射影像をもつような平面の集合が、 Π 上でどのような図形を構成するかについて考察する。

平面 $E_{\alpha\beta\gamma}$ への射影 $\pi_{\alpha\beta\gamma}$ に対して、3つの直線 L_a, L_b, L_c の像 $\pi_{\alpha\beta\gamma}(L_a), \pi_{\alpha\beta\gamma}(L_b), \pi_{\alpha\beta\gamma}(L_c)$ が共有点をもつための必要十分条件は、平面 $E_{\alpha\beta\gamma}$ の法線ベクトル (α, β, γ) が3つの直線 L_a, L_b, L_c と共有点をもつ直線と平行であることである。

まず、2直線が共有点をもつための条件を求める。 L_a, L_x を、それぞれ次の方程式が表す直線とする。

$$\begin{cases} a_{00} p(0) + a_{01} p(1) + a_{02} p(2) + a_{03} p(3) = 0 \\ a_{10} p(0) + a_{11} p(1) + a_{12} p(2) + a_{13} p(3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{00} p(0) + x_{01} p(1) + x_{02} p(2) + x_{03} p(3) = 0 \\ x_{10} p(0) + x_{11} p(1) + x_{12} p(2) + x_{13} p(3) = 0 \end{cases}$$

L_x が L_a と共有点をもつための必要十分条件は

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{vmatrix} = 0$$

となることである。ここで、行列

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{pmatrix}$$

の第 i 列と第 j 列 ($0 \leq i, j \leq 3, i \neq j$) からなる2次の正方行列の行列式

$$\begin{vmatrix} a_{0i} & a_{0j} \\ a_{1i} & a_{1j} \end{vmatrix}$$

を A_{ij} ($0 \leq i, j \leq 3, i \neq j$)、また同様に、

$$\begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \end{pmatrix} \quad (1)$$

の第 i 列と第 j 列 ($0 \leq i, j \leq 3, i \neq j$) からなる2次

の正方行列の行列式を X_{ij} で表すことにすると、
上記の必要十分条件はLaplace展開により、

$$A_{01} X_{23} - A_{02} X_{13} + A_{03} X_{12} + A_{12} X_{03} - A_{13} X_{02} + A_{02} X_{01} = 0 \quad (2)$$

となる。

直線 L_x が、与えられた3つの直線 L_a, L_b, L_c と共有点をもつための条件を考える。 L_b, L_c をそれぞれ次の方程式が表す直線とする。

$$\begin{cases} b_{00} p(0) + b_{01} p(1) + b_{02} p(2) + b_{03} p(3) = 0 \\ b_{10} p(0) + b_{11} p(1) + b_{12} p(2) + b_{13} p(3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_{00} p(0) + c_{01} p(1) + c_{02} p(2) + c_{03} p(3) = 0 \\ c_{10} p(0) + c_{11} p(1) + c_{12} p(2) + c_{13} p(3) = 0 \end{cases}$$

このとき、 L_x が L_b, L_c と共有点をもつための条件は、 L_a の場合と同様に、係数がつくる行列の2次の正方行列の行列式をそれぞれ B_{ij}, C_{ij}

($0 \leq i, j \leq 3, i \neq j$) とすると、

$$B_{01} X_{23} - B_{02} X_{13} + B_{03} X_{12} + B_{12} X_{03} - B_{13} X_{02} + B_{02} X_{01} = 0 \quad (3)$$

$$C_{01} X_{23} - C_{02} X_{13} + C_{03} X_{12} + C_{12} X_{03} - C_{13} X_{02} + C_{02} X_{01} = 0 \quad (4)$$

となる。すなわち、 L_x が L_a, L_b, L_c と共有点をもつための必要十分条件は、 L_x の方程式の係数の行列(1)が等式(2)~(4)を満足することである。

ここで、一般に、2次の行列式 X_{ij} ($0 \leq i, j \leq 3, i \neq j$) に対して、Plückerの関係式

$$X_{01} X_{23} - X_{02} X_{13} + X_{03} X_{12} = 0 \quad (5)$$

が成立することに注意しておく必要がある[6]
[9]。

L_x の方向ベクトルは、 $(X_{12}, -X_{02}, X_{01})$ である。すなわち、 L_x に垂直で、原点を通る平面は、射影平面 Π 上の点 $(X_{12}, -X_{02}, X_{01})$ で表される。したがって、 $\pi_{\alpha\beta\gamma}(L_a), \pi_{\alpha\beta\gamma}(L_b), \pi_{\alpha\beta\gamma}(L_c)$ が共有点をも

つような平面 $E_{\alpha\beta\gamma}$ の集合は、等式(2)~(5)を満足する $X_{12}, -X_{02}, X_{01}$ の方程式で表される。もし、行列式

$$\begin{vmatrix} A_{01} & A_{02} & A_{12} \\ B_{01} & B_{02} & B_{12} \\ C_{01} & C_{02} & C_{12} \end{vmatrix}$$

の値が0でなければ、等式(2)~(4)を X_{12}, X_{02}, X_{01} について解いてから、(5)に代入すれば、2次の同次式は得られる。また、この行列式の値が0であれば、 X_{12}, X_{02}, X_{01} についての1次同次式が得られる。これらのことから、

命題3

L_a, L_b, L_c の射影像が共有点をもつような平面全体の集合は Π 上で二次曲線または直線をつくる。

ことが証明された。

直線の集合 $L = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ に対して、 L_i, L_j, L_k ($1 \leq i, j, k \leq n, i \neq j \neq k$) の射影像が共有点をもつような平面全体の集合がつくる2次曲線を、 $Q(i, j, k)$ で表すことにする。このような曲線は $n C_3$ 個存在し、2つの曲線の交点数は高々4個であるから、射影平面に関するEulerの公式[7]を用いると、 L の射影の同値類は $O(n^6)$ であることがわかる。また、次の命題が成立する。この命題は、電気通信大学の石上嘉康氏によるものである。

命題4

同値類が $\Omega(n^6)$ であるような直線の集合が存在する。

この命題4を証明するためには、同値類が $\Omega(n^6)$ であるような直線の集合を、具体的に構成すればよい。次の3つの直線について考える。3つの直線 $L(\alpha), L(\beta), L(\gamma)$ をそれぞれ次の方程式が表す直線とする。ここで、 α, β, γ は定数である。

$$\begin{cases} 0 p(0) + 1 p(1) + 0 p(2) - 1 p(3) = 0 \\ 0 p(0) + 0 p(1) + 1 p(2) - \alpha p(3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 p(0) - 1 p(1) + 0 p(2) + 0 p(3) = 0 \\ 0 p(0) + 0 p(1) + 1 p(2) - \beta p(3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 p(0) - 0 p(1) + 0 p(2) + 0 p(3) = 0 \\ 0 p(0) + 0 p(1) + 1 p(2) - \gamma p(3) = 0 \end{cases}$$

このとき、次の補題が成立する。

補題 5

α, β, γ は互いに異なる実数とする上記の直線 $L(\alpha), L(\beta), L(\gamma)$ の射影像が共有点をもつような平面全体の集合は、直線

$$(\gamma - \beta) X_{12} + (\beta - \alpha) (-X_{02}) + X_{01} = 0$$

である。

直線の集合

$$L = \{L(\alpha_1), L(\alpha_2), \dots, L(\alpha_n)\}$$

$$L' = \{L'(\beta_1), L'(\beta_2), \dots, L'(\beta_n)\}$$

$$L'' = \{L''(\gamma_1), L''(\gamma_2), \dots, L''(\gamma_m)\}$$

を考える。

i, j, k ($1 \leq i, j, k \leq n$) に対して $L(\alpha_i), L(\beta_j), L(\gamma_k)$ が共有点をもつような平面全体の集合を、 $Q_0(i, j, k)$ とする。ここで、 $\alpha_i, \beta_j, \gamma_k$ ($1 \leq i \leq n$) を適当に選べば、 $(i, j, k) \neq (i', j', k')$ であれば、 $Q_0(i, j, k)$ と $Q_0(i', j', k')$ は互いに交点を持ち、 $L \cup L' \cup L''$ に対して、 Π 上には、異なる交点の個数が $\Omega(n^6)$ である直線の集合ができることが証明できる。

4. 空間の中の多角形結び目の射影

第 3 節の場合と同様に、多角形結び目 K の射影の同値類を分類する場合は、

- (1) 2 点 v_i, v_j ($0 \leq i, j \leq n-1, i \neq j$) の射影像が同じ点であるような平面 $P(i, j)$
- (2) 点 v_i の射影像が、線分 e_j の射影像の上にあるような平面全体の集合 $R(i, j)$
- (3) 線分 e_i, e_j, e_k ($1 \leq i, j, k \leq n, i \neq j \neq k$) の射影像が共有点をもつような平面全体の集合 $Q(i, j, k)$

の 3 つの場合について考えればよい。

(3) については、第 3 節の 3 つの直線の射影に関する議論から、二次曲線の一部であることは明らかである。(1) については、 $P(i, j)$ は明らかに、2 点 v_i, v_j を結ぶ直線を法線にもつ平面である。(2) について考える。まず問題を単純化するために、次の仮定をする。

仮定 3 点を含むどの平面も平行でない。

この仮定を満足させるためには、各 3 点を含む平面の集合を考え、平面と平面の交線を含まないような平面をとり、これを無限遠平面とすればよい。

Π 上における $R(i, j)$ は $P(i, j)$ と $P(i, j+1)$ とを結ぶ線分となる。なぜなら、 $R(i, j)$ の点の非同次座標は、点 v_i と線分 e_j とを結ぶ直線と平面 $z = -1$ との交わりの座標であり、点 v_i と線分 e_j とを結ぶ直線は、3 点 v_i, v_j, v_{j+1} を含む平面上にある。したがって、 $R(i, j)$ は $P(i, j)$ と $P(i, j+1)$ を結ぶ線分となる。ただし、 Π は射影平面であるから

$$\text{点 } v_j \text{ の } z \text{ 座標} \leq \text{点 } v_i \text{ の } z \text{ 座標} \leq \text{点 } v_{j+1} \text{ の } z \text{ 座標}$$

のとき、無限遠点を含む線分となる。

ここで、 $R(i, j)$ は $O(n^2)$ 個、 $Q(i, j, k)$ は $O(n^3)$ 個で

あること、 $R(i;j)$ と $R(i';j')$ の交わりは高々1個、 $R(i;j)$ と $Q(i',j',k')$ の交わりは高々2個、 $Q(i,j,k)$ と $Q(i',j',k')$ の交わりは高々4個であることを考慮すれば、 $\cup \{R(i;j)\} \cup \cup \{Q(i,j,k)\}$ の交点の個数は $O(n^6)$ である。第3節の議論から、 n 個の頂点をもつ多角形結び目 K は、最大 $\Theta(n^6)$ 個の正則射影の同値類をもつことが示される。

5. 最小射影のアルゴリズム

$\cup \{R(i;j)\} \cup \cup \{Q(i,j,k)\}$ が Π 上でつくるグラフの各領域ごとに同値類が1つ定まる。しかし、 Π 上の曲線 $Q(i,j,k)$ の一方の側の点に対応する射影像と、もう一方の側の点に対応する射影像の交差数は同じである。したがって、この節では、 $\cup \{R(i;j)\}$ が Π 上でつくるグラフについて考えればよい。多角形結び目の交差数が最小の正則射影を求めるアルゴリズムは以下ようになる。

- (1) $G = \cup \{R(i;j) ; 0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n\}$ を構成する。
- (2) 射影平面 Π 上に埋め込まれたグラフ G の双対グラフ G^* をつくる。
- (3) G^* のある頂点を選んで、この頂点を含んでいる領域における多角形結び目の正則射影の交差数を求める。
- (4) (3)で選んだ頂点を出発点とし、 G^* のすべての頂点を、例えば幅優先探索法を用いてたどり、すべての正則射影の交差数を求める。
- (5) (4)で求めた正則射影の交差数のうち最小のものが、求める交差数が最小の正則射影となる。

$R(i;j)$ の個数は $O(n^2)$ であるので、ステップ(1)は $O(n^4)$ で実行できる。また、 $R(i;j)$ の交差数は $O(n^4)$ であり、グラフ G の領域数は $O(n^4)$ であるの

で、ステップ(2)において、双対グラフ G^* は $O(n^4)$ で構成できる。多角形結び目の線分の個数は $O(n)$ であるので、ある領域における多角形結び目の正則射影の交差数は、素朴な方法で $O(n^2)$ で求めることができるので、ステップ(3)の時間計算量は $O(n^2)$ である。ステップ(4)において、 G^* の頂点から別の頂点へ辺 e^* を用いてたどるとする。 e^* の双対 e の点に対応する射影像が図5の(a)のようである場合、交差数は、1つ、図5の(b)のようである場合、2つ変化する。図5の(c)のようである場合は変わらない。したがって、 G^* のすべて頂点に対応する射影像の交差数は、1つの辺あたり定数時間で求めることができる。したがって、(4)に要する時間計算量は $O(n^4)$ である。故に、アルゴリズムの時間計算量は全体として、 $O(n^4)$ となる。

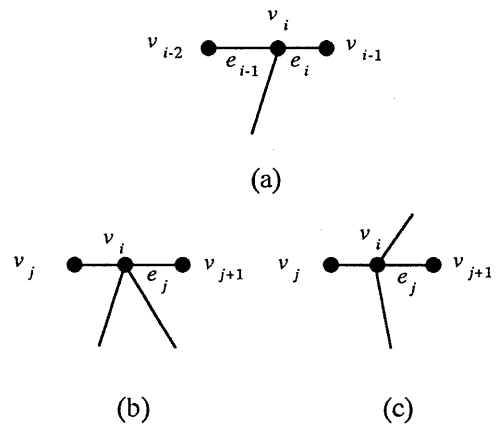


図5: 点 v_i の射影像が、線分 e_j の射影像の上にあるような平面全体の集合 $R(i,j)$

6. 例題

例として図6の多角形結び目に対して、上記の方法を用いて正則射影の同値類を求める。

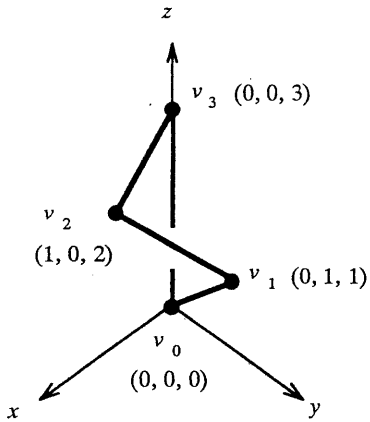


図6：4点からなる多角形結び目

非同次座標を用いて射影平面 Π を表すと図7のようになる。

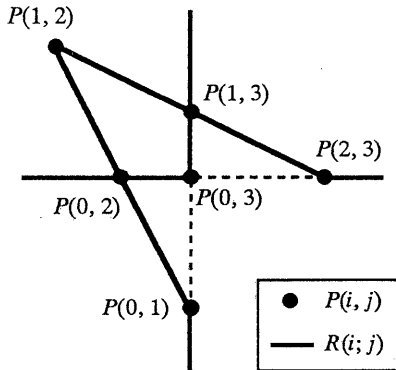


図7：射影平面 Π

したがって、領域数は3個であるので、図6の多角形結び目は3個の正則射影の同値類をもっている。

7. 参考文献

- [1] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., *Graph Theory with Application*, Macmillan.
- [2] Chazelle, B., Edelsbunner, H., Guibas, L. J. and Sharir, M., Lines in space-combinatorics, algorithms and application, Proc. 21 ACM Symp. on Theory of Computing, 1989, p.386-393.
- [3] Edelsbunner, H., Lines in space-A collection of results, DIMACS Series in Discrete Math. and Theor. Comp. Sci. 6, 1991, p.77-93.
- [4] Edelsbunner, H., *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag.
- [5] Goodman, J.E. and Pollack, R., On the combinatorial classification of nondegenerate configurations in the plane, J. Combin. Theory Ser. A 29 1980, p.220-235.
- [6] Kleiman, S.L. and Laksov, D., Schubert calculus, American Math. Monthly 79, 1972, p.1061-1082.
- [7] Massey, W. S., *Algebraic Topology, Graduate Texts in Mathematics*, Springer-Verlag.
- [8] McKenna, M. and Seidel R., Finding the optimal shadows of a convex polytope, Proc. 1st ACM Symp. on Computational Geometry, 1985, p.24-28.
- [9] McKenna, M. and O'Rourke, J., Arrangements of lines in 3-space:a data structure with application, Proc. 4th ACM Symp. on Computational Geometry, 1988, p.371-380.