アルゴリズム 44−8
(1995. 3. 17)

2つのグラフの共通st順序付けのNP完全性

山口一章，原田俊彦

大阪大学 基礎工学部 情報工学科

st順序付けとは，2連結グラフ $G(V,E)$ と辺 $\mathrm{st}(s,t\in V)$ が与えられたとき，sの番号が1，tの番号が $|V|$ とし，他の全ての頂点は自分より小さな番号を持つ頂点と大きな番号を持つ頂点とに隣接しているような順序付けのことである．平面グラフとは，どの辺も交差しないように平面上に描くことが可能なグラフである．本稿では，共通の頂点集合を持つ2つの平面グラフのいずれに対してもst順序付けとなるような頂点への順序付けを与えるという問題がNP完全であることを示す．

NP-completeness of computing a common st-numbering for two planar graph

Yamaguchi Kazuaki, Harada Toshihiko

Dep't of Information & Computer Sciences,
Faculty of Engineering Science, Osaka University

Given a 2-connected graph G(V,E) and its one edge $\mathrm{st}(s,t\in V)$, an st-numbering is the numbering such that s is given the number 1, t is given the number $|V|$,and for all other vertices there are lower numbered adjacent vertices and higher numbered adjacent vertices. A Planar graph is a graph which can be drawn on a plane in such a way that no two edges cross each other. In this paper, for two planar graphs that have a common vertex set, we consider the problem of giving a numbering for those vertices that is an st-numbering for each graph. We show it is NP-complete.

1 まえがき

集合 Sの3要素の組の集合 $\{(a_i,b_i,c_i)|i=1,2,\cdots,k\}$ が与えられたとき，各 i について $b_i<a_i<c_i$または $c_i<a_i<b_i$となるような Sの全順序があるかどうかを判定する問題は Betweenness 問題と呼ばれ，NP 完全であることが知られている．

より一般的に，部分集合 $S_i(\subseteq S)$ と Sの要素 a_iの組の集合 $A=\{(a_i,S_i)|i=1,2,\cdots,k\}$ が与えられたとき，各 i について a_iが S_iの先頭でも後尾でもないように Sの元を並べられるかという問題，一般化 Betweenness 問題も当然 NP 完全である．ここで，A に次の2つの条件を加える．

1. 各 $a_i\in S-\{s,t\}$ について，a_iを第一要素とする A の組は1つである．
2. Sを頂点集合とするあるグラフ G が存在し，$(x,X)\in A$ ならば Xは x の隣接頂点集合となっている．

グラフ G 中に辺 st が存在するとき，これらの条件を満たす場合の一般化 Betweenness 問題はグラフ G において st-numbering が存在するかどうかという問題と等価となる．G が2連結であることは st-numbering の存在の必要十分条件であり，もし存在すれば st-numbering は多項式時間で求められる．よって，一般化 Betweenness 問題は上のような条件が加えられたとき多項式時間で解ける．

ここで，$A=A_1\bigcup A_2, A_1\bigcap A_2=\phi$を満たすように A を2つの部分集合 A_1 と A_2に分割し，A_1と A_2が共に先程の2つの条件を満たす場合について考える．この場合の一般化 Betweenness 問題は，頂点集合が同一の2つのグラフに共通の st-numbering が与えられるかという問題と等価になる．

本論文では，2つの平面グラフ $G_1(V,E_1)$, $G_2(V,E_2)$ に共通の st-numbering を求める問題が NP 完全であることを示した．

以下2章で諸定義，3章で問題の定義，4章で NP 完全性の証明を述べる．

2 定義

2.1 st-numbering

2連結グラフ $G(V,E)$ に対して，その1つの辺 $st(s,t\in V)$ が与えられ，各頂点から $1\sim|V|$ の範囲のそれぞれ異なった整数への写像である1対1関数 $g:V\rightarrow\{1,2,\cdots,|V|\}$ が以下の3つの条件を満たすとき，g を st-numbering と呼ぶ．

1. $g(s)=1$
2. $g(t)=|V|$
3. 全ての $v\in V-\{s,t\}$ に対して，$g(u)<g(v)<g(w)$ となるような2つの隣接する頂点 u,wが存在する．

図1は st-numbering の例である．

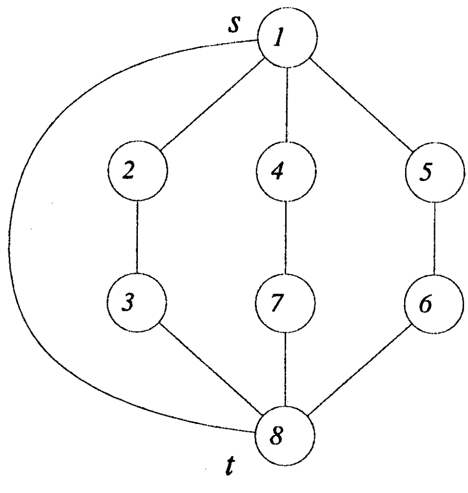

図 1: st-numbering の例

ある2連結グラフ $G(V,E)$ とその辺 st が与えられたとき，その st-numbering を求めるアルゴリズムは時間計算量 $O(|E|)$ で得られることが知られている [1]．

2.2 共通の st-numbering

頂点集合が同じであるような2つのグラフ $G_1(V,E_1)$, $G_2(V,E_2)$ に共通の st-numbering

とは，いずれのグラフにおいても st-numbering となるような頂点への numbering のことである．図 2.2 は共通の st-numbering の例である．

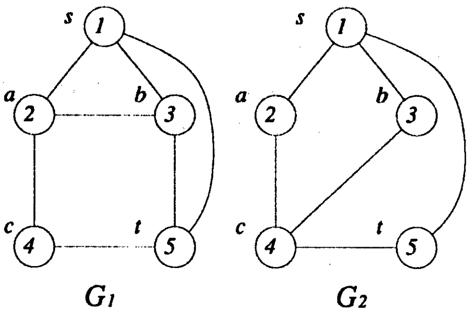

図 2: 共通の st-numbering の例

2.3 平面グラフ

グラフを平面上に描いたとき，各々の辺がその端点以外に他の辺と共有点を持たないようなものを平面描写と呼ぶ．また，平面描写可能なグラフを平面グラフと呼ぶ．

2.4 3SAT

ブール代数式とは，変数，カッコ，および，論理演算子 $\wedge$(AND)，$\vee$(OR)，$\neg$(否定) から構成される式である．論理演算子の間の結合の優先順位は高い方から順に $\neg$，$\wedge$，$\vee$と定める．変数は 0（偽）または 1（真）の値をとる．式についても同様である．E_1と E_2 をブール代数式とするとき，$E_1 \wedge E_2$ の値は E_1と E_2の値が共に 1 であるとき 1 であり，それ以外のときは 0 である．$E_1 \vee E_2$の値は E_1と E_2の少なくとも一方が 1 のとき 1 であり，そうでないときは 0 である．$\neg E_1$の値は E_1が 0 であるとき 1 であり，E_1が 1 のとき 0 である．否定 $\neg x$ の代わりに $\bar{x}$ と書くことも多い．ブール代数式は，式の値を 1 にするように各変数へ値 0，1 を割り当てることができるとき，充足可能であるという．充足可能性問題というのは，任意に与えられたブール代数式に対し，それが充足可能であるか否かを判定する問題である．

ブール代数式が，$E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_k$ という形をしていて，各 E_iはリテラルα_{ij}を$\vee$で結合した形$\alpha_{i1} \vee \alpha_{i2} \vee \cdots \vee \alpha_{ir_i}$ をしているとき乗法標準系 (conjunctive normal form，CNF と略記する) であるという．ただし，変数 x に対し x または$\bar{x}$を一般にリテラルと呼ぶ．なお，これらの E_iのようにリテラルを$\vee$で結合した式を一般に項と呼ぶ．

どの項もちょうど 3 つの相異なるリテラルからなる CNF の式は 3-CNF といわれる．3-CNF に対する充足可能性問題を 3SAT と表す．また，3SAT は NP 完全であることが知られている [2]．

3 問題

本論文では，頂点集合が同じであるような 2 つの平面グラフ $G_1(V, E_1)$，$G_2(V, E_2)$ に対して，共通の辺 $st(s, t \in V)$ が与えられたとき，共通の st-numbering を求めるという問題を考える．

以後，この問題を L_{st} と呼ぶ．

4 L_{st}の NP 完全性の証明

図 3 のような平面グラフ G_C の st-numbering について考える．

fを G_C の各頂点から 1 ~ 1 1 の範囲のそれぞれ異なった整数への 1 対 1 の写像とする．このとき，$f(s) = 1, f(t) = 11$ とする．

[定理 4.1] fが G_C に対する st-numbering となるのは，$f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_3)$ のいずれか 1 つの値を 2 としたときのみである．

証明. x_1，x_2，x_3 のいずれとも異なる頂点 u が $f(u)$ として 2 を持つと仮定する．そうすると fが st-numbering であるためには st-numbering の定義より，u は自分より小さい st-number を持つ頂点と隣接していなければならない．しかし，$f(u)$ より小さい number は 1 しか存在せず，1 を fの写像として持つ頂点は s である．よって u は s に隣接していなければならないが，s に隣接する頂点は x_1，x_2，x_3，t

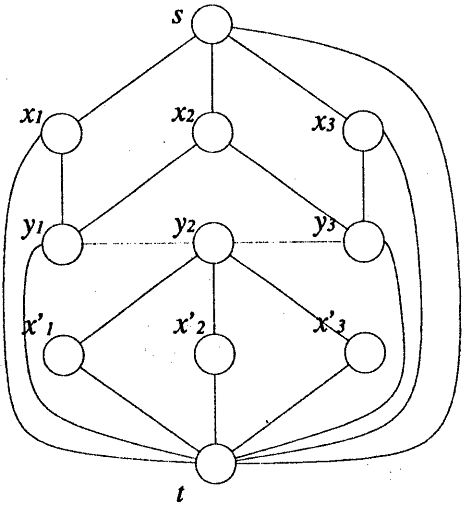

図 3: グラフ G_C

の 4 つだけである．$f(t)$ は 1 1 であるため，これは矛盾となる．以上より，f が G_C に対する st-numbering となるのは，$f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_3)$ のいずれか 1 つの値を 2 としたときのみである． □

[定理 4.2] f は G_C の各頂点から 1 ～ 1 1 の範囲のそれぞれ異なった整数への 1 対 1 の写像，G_Cは図 3のようなグラフとする．

- $f(x_1) = 2$ としたとき，$f(y_1) = 3$，$f(y_2) = 4$，$f(y_3) = 10$ とそれぞれ決めると，$f(x_2)$，$f(x_3)$，
$f(x'_1)$，$f(x'_2)$，$f(x'_3)$ の 5 つの値として 5 ～ 9 までのいずれを割り当てても，f は G_C に対する st-numbering となる．

- $f(x_2) = 2$ としたとき，$f(y_1) = 3$，$f(y_2) = 4$，$f(y_3) = 10$，または $f(y_1) = 10$，$f(y_2) = 4$，$f(y_3) = 3$，とそれぞれ決めると，$f(x_1)$，$f(x_3)$，$f(x'_1)$，$f(x'_2)$，$f(x'_3)$ の 5 つの値として 5 ～ 9 までのいずれを割り当てても，f は G_C に対する st-numbering となる．

- $f(x_3) = 2$ としたとき，$f(y_1) = 10$，$f(y_2) = 4$，$f(y_3) = 3$ とそれぞれ決めると，$f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x'_1)$，
$f(x'_2)$，$f(x'_3)$ の 5 つの値として 5 ～ 9 までのいずれを割り当てても，f は G_C に対する st-numbering となる．

証明. 上の定理が成り立つことは実際に G_C に対して各値を割り当ててみることで容易に確かめられる．(図 4，図 5，図 6 参照) □

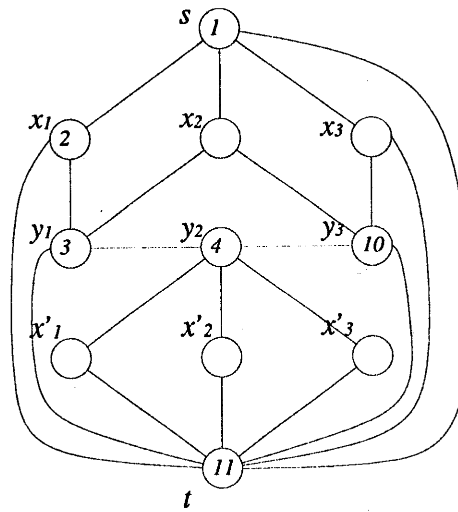

図 4: $f(x_1) = 2$ のとき

[定理 4.3] 問題 L_{st} は NP 完全である．

証明.

L_{st} が NP に属すことを示すには，各頂点に対する st-numbering を推測し，それらが実際に 2 つのグラフに共通の st-numbering であることを確認すれば良い．

以下，L_{st} が NP 困難であることを，3SAT を L_{st} に変換することによって示す．

3-CNF を $F = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_m$，項を $C_i = z_{i1} \vee z_{i2} \vee z_{i3}$，リテラルを $z_{ij} = w_l$ または $\bar{w}_l$とおく．$(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq 3, 1 \leq l < m)$．$w_l$ は 0 または 1 の値を持つ変数である．

このとき次のようにして 2 つの平面グラフ G_A，G_B を作る．

G_C と同型のグラフを m 個，G_{C1}，G_{C2}，$\cdots$，G_{Cm} と並べ，各 $G_{Ci}(1 \leq i \leq m)$ の s，t をそれぞれ 1 つに短絡させた，図 7 のようなグラフを G_A とする．

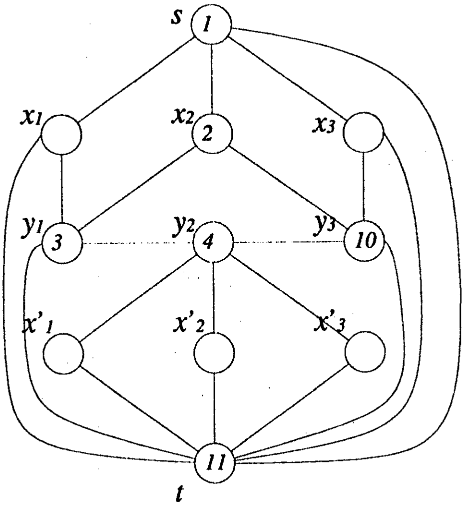

図 5: $f(x_2) = 2$ のとき

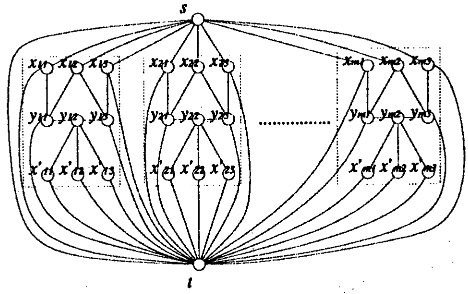

図 7: グラフ G_A

次に，各々の z_{ij} に対する w_l の対応を基に図 8 のグラフ G_B を作る．G_B の頂点集合は G_A のものと共通であり，任意の頂点に対して G_A 中の頂点と G_B 中の頂点とは 1 対 1 に対応している．頂点には，図 7 のようにそれぞれ名前を付ける．G_B の作り方は次の通りである．

1. 全ての i, j に対して，x_{ij} と x'_{ij} を辺で結ぶ．

2. 各々の $l(1 \leq l \leq n)$ に対し，以下のことを行なう．まず，$z_{ij} = w_l$ であるような i, j に対する x_{ij} と x'_{ij} の組を全て選び出す．そのような x_{ij} と x'_{ij} の組の全てを i の昇順に並べたとき，隣合う 2 つの組，(x_{ij}, x'_{ij}) と (x_{hk}, x'_{hk}) $(1 \leq i < h \leq m, 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k \leq 3)$ の x'_{ij} と x_{hk} を辺で結ぶ．次に，$z_{ij} = \bar{w}_l$ であるような i, j に対する x_{ij} と x'_{ij} の組を全て選び出す．そのような x_{ij} と x'_{ij} の組の全てを i の昇順に並べたとき，隣合う 2 つの組，(x_{ij}, x'_{ij}) と (x_{hk}, x'_{hk}) $(1 \leq i < h \leq m, 1 \leq j \leq 3, 1 \leq k \leq 3)$ の x_{ij} と x'_{hk} を辺で結ぶ．上のようにして得られた 2 本の道を，w_l について作った道において最大の i の値を持つ頂点 x'_{ij} と，$\bar{w}_l$ について作った道において最小の i の値を持つ頂点 x'_{ij} を辺で結ぶことによって一本の道とする．こうして

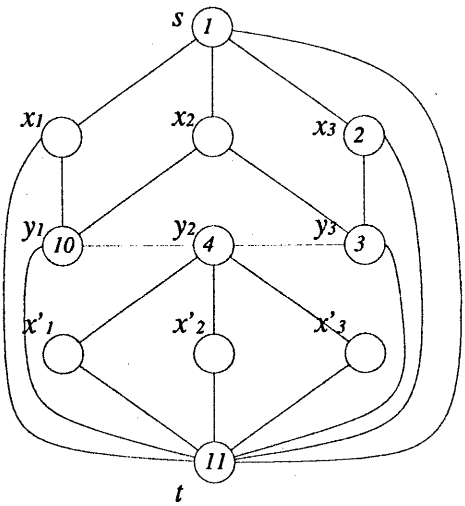

図 6: $f(x_3) = 2$ のとき

得られた道の両端の頂点をそれぞれ s, t の2つの頂点に辺でつなぐ.

3. 全ての y_{ij} を2つの頂点 s, t に辺でつなぐ.

4. s と t を辺でつなぐ.

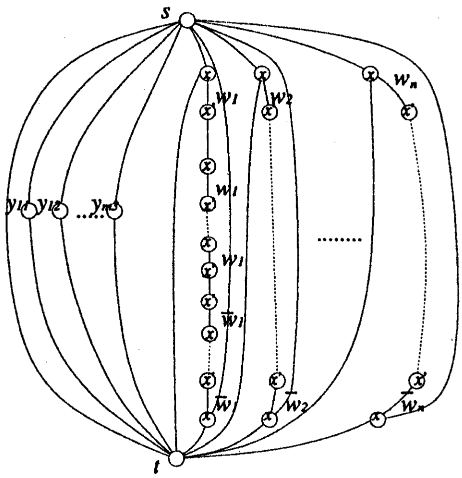

図8: グラフ G_B

ここでFのリテラル z_{ij} の値と, G_A 中の x_{ij} の st-number と x'_{ij} の st-number の大小関係とが, 以下のような性質を持つものとして対応づける. gは各頂点から $1 \sim 9m+2$ の範囲のそれぞれ異なった整数への1対1の写像である.

- $g(x_{ij}) < g(x'_{ij})$ のとき, かつそのときのみ, $z_{ij} = 1$
- $g(x_{ij}) > g(x'_{ij})$ のとき, かつそのときのみ, $z_{ij} = 0$

そうすると上のように構成した G_A , G_B は次の性質を持つ.

Fが充足可能であるならば G_A, G_B は共通の st-numbering を持ち, また, その逆も成り立つ.

このことを見るため, まずFが充足可能であると仮定し, Fを真にする割当を1つ任意に決めて, 次のようにして st-numbering を与える.

まず, $g(s) = 1$, $g(t) = 9m + 2$ とする. 次に, G_Bを作るときに各々の l について w_l または$\bar{w}_l$ に対応する (x_{ij}, x'_{ij}) を全て選んで作り上げた一本の道について考える. この道は w_l に対応する頂点間が i の昇順につなげられた後に $\bar{w}_l$ に対応する頂点間が i の降順につなげられていた. そこで各々の l に対して以下のことを行なう.

- $w_l = 1$ のとき
  1. w_l に対応する頂点の組が存在しなければ終了する.
  2. まだ割り当てられていない st-number の値の中で最小のものを min_num とし, その道の中で最小の i の値を持つ x_{ij} の st-number を min_num とする.
  3. $min\_num \leftarrow min\_num + 1$.
  4. 今考えている x_{ij} の属す部分グラフ G_{Ci} における y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} のいずれもがまだ st-number を割り当てられていなければ, 以下のようにしてそのうちの2つの頂点に st-number をつける.
     - x_{ij} の jの値が1のとき, $y_{i1} \leftarrow min\_num$, $y_{i2} \leftarrow min\_num + 1$.
     - x_{ij} の jの値が2のとき, $y_{i1} \leftarrow min\_num$, $y_{i2} \leftarrow min\_num + 1$.
     - x_{ij} の jの値が3のとき, $y_{i2} \leftarrow min\_num + 1$, $y_{i3} \leftarrow min\_num$.

     $min\_num \leftarrow min\_num + 2$.
  5. x'_{ij} の st-number を min_num とする.
  6. $min\_num \leftarrow min\_num + 1$.
  7. 道の中で, w_l に対応する頂点の組に対する numbering が全て終ったとき, ここで終了する. そうでなければ, この道における次の頂点の組 (x_{ij}, x'_{ij}) での x_{ij} の st-number を min_num とし, 3に戻る.
- $w_l = 0$ のとき

1. $\bar{w}_l$ に対応する頂点の組が存在しなければ終了する．
2. まだ割り当てられていない st-number の値の中で最小のものを min_num とし，その道の中で最大の i の値を持つ x_{ij} の st-number を min_num とする．
3. $min\_num \leftarrow min\_num + 1$.
4. 今考えている x_{ij} の属す部分グラフ G_{Ci} における y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} のいずれもがまだ st-number を割り当てられていなければ，以下のようにしてそのうちの 2 つの頂点に st-number をつける．
   - x_{ij} の jの値が 1 のとき，$y_{i1} \leftarrow min\_num, y_{i2} \leftarrow min\_num + 1$.
   - x_{ij} の jの値が 2 のとき，$y_{i1} \leftarrow min\_num, y_{i2} \leftarrow min\_num + 1$.
   - x_{ij} の jの値が 3 のとき，$y_{i2} \leftarrow min\_num + 1, y_{i3} \leftarrow min\_num$.

   $min\_num \leftarrow min\_num + 2$.
5. x'_{ij} の st-number を min_num とする．
6. $min\_num \leftarrow min\_num + 1$.
7. 道の中で，$\bar{w}_l$ に対応する頂点の組に対する numbering が全て終ったとき，ここで終了する．そうでなければ，この道における次の頂点の組 (x_{ij}, x'_{ij}) での x_{ij} の st-number を min_num とし，3 に戻る．

次に，まだ st-number の割り当てられていない全ての y_{ij} に，$8m+2 \sim 9m+1$ までの範囲で，それぞれ任意に st-numer を与えていく．

上で与えた (x_{ij}, x'_{ij}) の組に対する st-number の割り当ては Fのリテラル z_{ij} の値が 1 の部分のものであり，即ち $g(x_{ij}) < g(x'_{ij})$ のときのものである．また，Fを真にする割当を 1 つ任意に決めると Fの中の全ての項は値が 1 であるようなリテラルを含む．上の 2 つのことから，任意の i に対して x_{i1}, x_{i2}, x_{i3} のいずれかが G_{Ci} 中で s の次に小さな st-number の値を持つ．また y_{i1}, y_{i2}, y_{i3} に対する st-number は，それぞれが G_{Ci} 中で 3 番目に小さいもの，4 番目に小さいもの，t の次に大きいもののいずれかとなっており，定理 4.2 中の条件に合うように与えられている．よって定理 4.2 より，G_A における他の頂点への st-number の割り当ては任意に与えられる．

次に，F のリテラル z_{ij} の値が 0 である部分，即ち G_B での各々の l に対応する道においてまだ st-number を与えていない部分の頂点に st-number を与えていく．それには各々の l に対して以下のようにして numbering を行なえば良い．

- $w_l = 1$ のとき
  1. $\bar{w}_l$ に対応する頂点の組が存在しなければ終了する．
  2. まだ割り当てられていない st-number の値の中で最小のものを min_num とし，その道の中で最小の i の値を持つ x'_{ij} の st-number を min_num とする．
  3. $min\_num \leftarrow min\_num + 1$.
  4. x_{ij} の st-number を min_num とする．
  5. $min\_num \leftarrow min\_num + 1$.
  6. 道の中で，$\bar{w}_l$ に対応する頂点の組に対する numbering が全て終ったとき，ここで終了する．そうでなければ，この道における次の頂点の組 (x_{ij}, x'_{ij}) での x'_{ij} の st-number を min_num とし，3 に戻る．
- $w_l = 0$ のとき
  1. w_l に対応する頂点の組が存在しなければ終了する．
  2. まだ割り当てられていない st-number の値の中で最小のものを min_num とし，その道の中で最大の i の値を持つ x'_{ij} の st-number を min_num とする．
  3. $min\_num \leftarrow min\_num + 1$.
  4. x_{ij} の st-number を min_num とする．

5. $min\_num \leftarrow min\_num + 1$.

6. 道の中で，w_l に対応する頂点の組に対する numbering が全て終ったとき，ここで終了する．そうでなければ，この道における次の頂点の組 (x_{ij}, x'_{ij}) での x'_{ij} の st-number を min_num とし，3 に戻る．

こうして与えられた numbering は，G_A と G_B を同時に満足させる st-numbering となっている．

逆に，G_A と G_B が共通の st-numbering を持つと仮定したとき，Fが充足可能であることを示す．

このとき定理 4.1 より G_A 中の任意の i に対して x_{i1}，x_{i2}，x_{i3} のいずれかが他の全ての y_{ij}や x'_{ij} よりも小さな値を持つ．従って，そこに割り当てられるリテラル z_{i1}，z_{i2}，z_{i3} のいずれかは値 1 を持つ．また G_B においても G_A と共通の st-numbering が成り立っているので，G_Bの作り方より，任意の l に対して w_l の値は一意に定まる．よって 3-CNF 式 Fの値は真となり，充足可能である．

以上より，L_{st} は NP 完全であることが証明された．

□

5 あとがき

本論文では 2 つの平面グラフに対する共通の st-numbering を求める問題が NP 完全であることを証明した．これによって，まえがきで述べた 2 つの条件を加えても，その一般化 Betweenness 問題は NP 完全であることが判る．

参考文献

[1] Even, S., and Tarjan, R. E., "Computing an st-numbering", Th. Comp. Sci., Vol.2, pp.339-344, 1976.

[2] ホップクロフト J. E.，ウルマン J. D. 著，オートマトン 言語理論 計算論 II (Information & Computing-4)，野崎昭弘，高橋正子，町田元，山崎秀記 訳，サイエンス社，1984.

[3] Hopcroft, J.E., Ullman, J.D., "INTRODUCTION TO AUTOMATA THEORY, LANGUAGES AND COMPUTATION", Addison-Wesley, 1979.