アルゴリズム 48－3
（1995．11．17）

グラフの最小コスト k 分割について

上土井　陽子[†]　若林　真一[‡]　吉田　典可[†]

† 広島市立大学　情報科学部
〒731-31　広島市安佐南区沼田町大塚 151-5

‡ 広島大学　工学部
〒739　東広島市鏡山一丁目 4 番 1 号

あらまし グラフの最小コスト k 分割問題は枝に正の重みを持つ無向グラフ $G=(V,E)$ の節点集合 V を互いに非連結な k 個の節点集合に分割する最小コスト分割を求める問題である．この問題は巡回セールスマン問題や VLSI 設計で用いられるクラスタリング問題等の組合せ問題の定式化において用いられる重要な組合せ問題の一つである．Goldschmidt らはグラフの最小コスト k 分割問題に対し，$n=|V|$ とするとき，$O(n^{k^2})$ の計算時間のアルゴリズムを提案している．本稿では最小コスト k 分割問題に対する多項式計算時間のアルゴリズムを提案する．提案アルゴリズムでは最大流-最小コストカットアルゴリズムを $O(n^{k-1})$ 回適用する．

On Minimum Cost k-Way Partitioning of Graphs

Yoko Kamidoi[†]　Shin'ichi Wakabayashi[‡]　Noriyoshi Yoshida[†]

† Faculty of Information Sciences
Hiroshima City University
151-5, Ozuka, Numata-cho, Asaminami-ku, Hiroshima 731-31, JAPAN

‡ Faculty of Engineering, Hiroshima University
4-1, Kagamiyama 1 chome, Higashi-Hiroshima 739, JAPAN

Abstract Let $G=(V,E)$ be an undirected graph with n vertices and m edges with positive edge weights. The minimum cost k-way partition problem is to find a partition of V into k nonempty disjoint subsets, such that the total edge weight between subsets is minimum. This problem with arbitrary k is NP-hard. Goldschmidit et al. presented an $O(n^{k^2})$ algorithm for the minimum cost k-way partition problem with fixed k. In this paper, we propose a polynomial time algorithm for the minimum cost k-way partition problem with fixed k.

1 まえがき

枝に正の重みを持つ無向グラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき，$n(=|V|)$ 以下の数 k において V に属する k 個の相異なる節点の集合 $\{s_1,s_2,\ldots,s_k\}$ を互いに非連結にする最小コスト分割を求める問題を最小コスト k 端子分割問題とする．また，グラフ G 上の全ての最小コスト k 端子分割の中で最小コストの分割を見つける問題を最小コスト k 分割問題と定義する．グラフの最小コスト分割問題は VLSI 設計等で生じるクラスタリング問題の定式化や巡回セールスマン問題の定式化等の応用を持つ重要な組合せ最適化問題の一つである．

文献 [1] において，Dahlhaus らは最小コスト k 端子分割問題は一般のグラフに対して NP 困難な問題であることを示した．また，平面ネットワークに対しては k を定数とした場合について多項式時間アルゴリズムを提案し，k が固定されていない場合は NP 困難であることを示している．

最小コスト k 分割問題に対しては，$k=2$ の場合，Gomory-Hu[2] によって最大流-最小コストカットアルゴリズムを $(n-1)$ 回適用することにより問題を解く手法が提案されている．また，Gomory-Hu は最小コストカットの列挙に有効な Cut-tree を定義している．$k\geq 3$ の場合，Dahlhaus の結果より一般のグラフに対しては最小コスト k 端子分割アルゴリズムを適用することにより多項式時間で問題を解くことは困難となる．Goldschmidt ら [3] は定数 k に対し，最小コスト 2 端子アルゴリズムを繰り返し適用し，最小コスト k 分割を求めるアルゴリズムを提案している．Goldschmidt らのアルゴリズムの計算時間は $O(n^{k^2})$ である．このアルゴリズムでは，複数の節点を一つの節点に縮約しているため，与えられたグラフが平面グラフの場合でも，平面グラフに対する最小コスト 2 端子分割アルゴリズムを繰り返し適用することにより問題を解くことは困難となる．一方，Hochbaum[4] らは枝に重みを持たない平面グラフの最小コスト 3 分割問題を解く計算時間が $O(n^2)$ のアルゴリズムを提案している．また，Saran[5] らは一般のグラフの最小コスト k 分割問題に対して，最適解の $(2-2/k)$ 倍以内の重みを持つ解を出力する近似アルゴリズムを提案している．Saran らのアルゴリズムは最大流-最小コストカットアルゴリズムを $(n-1)$ 回適用する．

本稿では最小コスト k 分割問題について考察する．まず，3 分割問題について結果を示し，一般の k 分割問題に拡張できることを示す．提案アルゴリズムでは最小コスト 2 端子分割手法を $O(n^{k-1})$ 回適用することにより問題を解く．

2 準備

本稿で用いる用語を以下に定義する．

[定義 1] 無向グラフ $G=(V,E)$ は節点集合 V と枝の集合 E より構成される．各枝 $e\in E$ は 2 個の節点 $u,v\in V$ を接続し，$e=(u,v)$ で表わす．節点 u,v を枝 e の端点と言う． □

[定義 2] 無向グラフ $G=(V,E)$ と G 上の k 個の互いに相異なる節点 $\{s_1,\ldots,s_k\}$ が与えられたとする．全ての i に対し，$s_i\in V_i$ を満たし $\cup_{i=1}^{k}V_i=V$ である互いに素な k 個の節点集合に V を分割する枝集合を $(V_1;\ldots;V_k)$ で表し，$(s_1,\ldots,s_k)k$ 端子分割と言う．枝集合 $D\subseteq E$ に対し，D が $(s_1,\ldots,s_k)k$ 端子分割となるような k 節点 $s_1,\ldots,s_k$ が存在するとき，D を V の k 分割と言う． □

[定義 3] 無向グラフ $G=(V,E)$ と V の k 分割カット C に対し，$c(C)$ をカットのコストと言う．カットのコストは C に属する枝の重みの総和を表すものとする．グラフ G 上での $(s_1,\ldots,s_k)k$ 端子分割のうち，最小のコストを持つ分割を最小コスト $(s_1,\ldots,s_k)k$ 端子分割とする．また，グラフ G 上での k 端子分割の中で最小コストを持つ分割を最小コスト k 分割と言う． □

最小コスト k 分割に対する性質の考察を行う．

定理 1 無向グラフ $G=(V,E)$ と任意の定数 $k(\geq 2)$ が与えられたとする．このとき，任意の節点 x において，最小コスト $(x,v1,\ldots,v(k-1))k$ 端子分割が最小コスト k 分割である $(k-1)$ 個の節点の組 $(v1,\ldots,v(k-1))$ が存在する．

[証明] グラフ G 上のある最小コスト k 分割 $(V1;\ldots;Vk)$ において，節点 x は $V1,\ldots,Vk$ のどれかに属する．いま，一般性を失うことなく $x\in Vk$ とする．このとき，$v1\in V1;\ldots,v(k-1)\in V(k-1)$ を満たす $(k-1)$ 個の節点の組が少なくとも 1 組は存在する．上述の条件を満たす k 個の節点の組を互いに非連結にする最小コスト k 端子分割は $(V1;\ldots;Vk)$ のコスト以下のコストを持つ．したがって，最小コスト $(x,v1,\ldots,v(k-1))k$ 端子分割は最小コスト k 分割である． □

定理 1 より最小コスト k 端子分割アルゴリズムが存在する場合，$O(n^{k-1})$ 回の最小 k 端子アルゴリズムの適用により最小コスト k 分割問題は解くことができる．しかし，Dahlhaus らによって $k\geq 3$ なる

定数kでは一般のグラフ上での最小コストk端子問題はNP困難であることが示されており，$k \geq 3$なる定数kにおいて定理1に基づいた多項式時間最小コストk分割アルゴリズムの導出は困難と予測される．以下ではグラフ上での2分割と最小コスト3分割との関係を考察し，最小コスト3分割アルゴリズムを提案する．次に，提案したアルゴリズムを最小コストk分割アルゴリズムへ拡張する．

3 最小コスト3分割アルゴリズム

無向グラフGの最小コスト3分割と最小コスト2分割との関係を考察する．

補題 1 無向グラフ $G=(V,E)$ の最小コスト *2* 分割 $(X;\overline{X})$ が与えられたとする．また，$\overline{X}, X$からなる *2* つの G の部分グラフ上での最小コスト *2* 分割をそれぞれ $(Y1;Z1)$, $(Y2;Z2)$ とする．このとき，$(X;Y1;Z1)$ か $(\overline{X};Y2;Z2)$ がGの最小コスト *3* 分割であるか，$R \cup S \subset X \vee R \cup S \subset \overline{X}$ を満たす最小コスト *3* 分割 $(R;S;T)$ が存在する．

[証明] グラフGにおいて $(X;\overline{X})$ と最小コスト3分割 $(R;S;T)$ との関係により場合分けする．

- $R \cap X \neq \phi \wedge S \cap X \neq \phi \wedge T \cap X \neq \phi$の場合

R,S,Tの中で$A \cap \overline{X} \neq \phi$を満たす集合が1つは存在する．今，一般性を失うことなく$T \cap \overline{X} \neq \phi$であるとする．2つの2分割 $(T;\overline{T})$ と $(X;\overline{X})$ との関係を考える．$(X \cup \overline{T};\overline{X \cup \overline{T}})$ は$T \cap \overline{X} \neq \phi$より$G$の2分割である．よって，以下が成立する．

$$c(X \cup \overline{T};\overline{X \cup \overline{T}}) \geq c(X;\overline{X})$$
$$c(X;\overline{X} \cap T) + c(\overline{T}-X;\overline{X} \cap T) \geq c(X;\overline{X} \cap T) + c(X;\overline{X} \cap \overline{T})$$
$$c(\overline{T}-X;\overline{X} \cap T) \geq c(X;\overline{X} \cap \overline{T})$$

また，$c(T;\overline{T})$ において以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}
c(T;\overline{T}) &= c(T \cap X;\overline{T}) + c(T \cap \overline{X};\overline{T}) \\
&= c(T \cup X;\overline{T}) + c(T \cap \overline{X};\overline{T}-X) \\
&\quad + c(T \cap \overline{X};\overline{T} \cap X) \\
&\geq c(T \cap X;\overline{T}) + c(T \cap \overline{X};\overline{T} \cap X) \\
&\quad + c(X;\overline{X} \cap \overline{T}) \\
&\geq c(T \cap X;\overline{T} \cap X) + c(T \cap \overline{X};\overline{T} \cap X) \\
&\quad + c(\overline{X} \cap \overline{T};\overline{T} \cap X) \\
&\geq c((T \cap X) \cup (T \cap \overline{X}) \cup (\overline{X} \cap \overline{T}); \\
&\qquad \overline{T} \cap X) \\
&\geq c(T \cup \overline{X};\overline{T} \cap X)
\end{aligned}$$

以上より，以下の不等式が成り立つ．

$$c(R;S;T) = c(T;\overline{T}) + c(R;S) \geq c(T \cup \overline{X};\overline{T} \cap X) + c(R \cap X;S \cap X)$$

仮定より，$R \cap X \neq \phi \wedge S \cap X \neq \phi$より，$(T \cup \overline{X};R \cap X;S \cap X)$ はGの3分割であり，最小コスト3分割である．また，$(R \cap X) \cup (S \cap X) \subset X$である．

- $R \cap \overline{X} \neq \phi \wedge S \cap \overline{X} \neq \phi \wedge T \cap \overline{X} \neq \phi$の場合も上の場合と同様な議論が行える．
- 上の2つの場合以外．つまり，R,S,Tの中の2つの集合A,Bにおいて，$A \cap \overline{X} = \phi \wedge B \cap X = \phi$を満たす場合．

今，$A=R$, $B=S$と仮定する．また，$T \cap X \neq \phi$ か $T \cap \overline{X} \neq \phi$ のどちらか一方は成り立つ．今，$T \cap \overline{X} \neq \phi$とする．場合分けの仮定より，$R \cap X \neq \phi \wedge S \cap \overline{X} \neq \phi$が成り立つ．$(R;\overline{R})$ もG上の2分割であるので以下の不等式が成り立つ．

$$c(R;\overline{R}) \geq c(X;\overline{X})$$

また，$R \subseteq X$より$\overline{X} \subseteq \overline{R}$．よって，$c(R;S;T) \geq c(X;S \cap \overline{X};T \cap \overline{X})$ が成り立つ．また，$S \cap \overline{X} \neq \phi \wedge T \cap \overline{X} \neq \phi$より $(X;S \cap \overline{X};T \cap \overline{X})$ はGの3分割である．よって，$(X;S \cap \overline{X};T \cap \overline{X})$ はGの最小コスト3分割である．また，以下の不等式が成立する．

$$c(S \cap \overline{X};T \cap \overline{X}) \geq c(Y1;Z1)$$
$$c(X;S \cap \overline{X};T \cap \overline{X}) \geq c(X;Y1;Z1)$$

よって，$(X;Y1;Z1)$ はGの最小コスト3分割である．

$T \cap X \neq \phi$の場合，同様な議論によって以下の不等式が成立する．

$$c(R;S;T) \geq c(R \cap X;\overline{X};T \cap X) \geq c(\overline{X};Y2;Z2)$$

よって，$(\overline{X};Y2;Z2)$ はGの最小コスト3分割である．□

定理 2 無向グラフ$G=(V,E)$での最小コスト *3* 分割が $(R;S;T)$ であるとする．また，$X \subset R$, $Y \subset S$を満たし，$c(X;\overline{X}), c(Y;\overline{Y}) \leq c(T;\overline{T})$ を満たすGの2個の *2* 分割 $(X;\overline{X})$, $(Y;\overline{Y})$ が存在するとする．このとき，Gの3分割 $(X;R-X;S \cup T)$ か $(Y;S-Y;R \cup T)$ のどちらかの3分割もGの最小コスト3分割である．

[証明] 節点集合 V を5個の節点部分集合に分け，各々の節点集合間の枝のコストについて考察する．今，各々の枝のコストを以下に示すように表すものとする．

$$a1 = c(X;T),\ a2 = c(R-X;T)$$
$$b1 = c(Y;T),\ b2 = c(S-Y;T)$$
$$c1 = c(X;R-X),\ c2 = c(Y;S-Y)$$
$$d1 = c(X;Y),\ d2 = c(R-X;S-Y)$$
$$e1 = c(X;S-Y),\ e2 = c(Y;R-X)$$

今，$(X;R-X;S\cup T)$, $(Y;S-Y;R\cup T)$ の両方ともが G の最小コスト3分割でないと仮定する．このとき，以下の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} a1+a2 &< c2 \ldots (1) \\ b1+b2 &< c1 \ldots (2) \end{aligned}$$

また，命題の仮定より以下の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} c(X;\overline{X}) &\leq c(T;\overline{T}) \\ a1+c1+d1+e1 &\leq a1+a2+b1+b2 \\ c1+d1+e1 &\leq a2+b1+b2 \ldots (3) \end{aligned}$$

(2), (3) より以下が成立する．

$$d1+e1 < a2$$

また，命題の条件より以下の不等式が成立する．

$$\begin{aligned} c(R-X;\overline{R-X}) &\leq c(R;\overline{R}) \\ c1 &\leq a1+d1+e1 \\ c1 &< a1+a2 \ldots (4) \end{aligned}$$

同様な変形により以下の不等式が成立する．

$$c2 < b1+b2 \ldots (5)$$

(1), (4), (5) より以下の不等式が成り立つ．

$$\begin{aligned} a1+a2 &< c2 \\ c1 < c2 &< b1+b2 \end{aligned}$$

上の不等式は (2) と矛盾する．したがって，$(X;R-X;S\cup T)$ か $(Y;S-Y;R\cup T)$ のどちらか一方は G の最小コスト3分割である． □

定理 3 無向グラフ $G=(V,E)$ のある節点集合 X において，$(R\cup S\subset X)\wedge c(T;\overline{T})\geq c(Y;\overline{Y})\wedge X\subset Y$ を満たす最小コスト3分割 $(R;S;T)$ が存在するとする．X を2分割するグラフ G の2分割の中で最小コストを持つ2分割を $(X';\overline{X'})$ とする．$\overline{X'}$ からなる G の部分グラフ上での最小コスト2分割を $(Y1;Z1)$ とし，X' からなる3分割を $(X';Y1;Z1)$ とする．同様に $\overline{X'}$ よりなる3分割を $(\overline{X'};Y2;Z2)$ とする．このとき，$(X';Y1;Z1)$ か $(\overline{X'};Y2;Z2)$ がグラフ G の最小コスト3分割であるか，$R'\cup S'\subseteq R\cup S$ で $(R'\cup S'\subset X'\cap X)\wedge(R'\cup S'\subset\overline{X'}\cap X)$ を満たす最小コスト3分割 $(R';S';T')$ が存在する．

[証明] 2つの G の2分割 $(T;\overline{T})$ と $(X';\overline{X'})$ の関係により場合分けする．いま，$T\cup\overline{X'}\neq\phi$ であるとすると X' と R,S,T との関係により以下の7つの場合に分類できる．

(1) $(R\cap X'\neq\phi)\wedge(S\cap X'\neq\phi)\wedge(T\cap X'\neq\phi)$

(2) $(R\cap X'=\phi)\wedge(S\cap X'\neq\phi)\wedge(T\cap X'\neq\phi)$

(3) $(R\cap X'\neq\phi)\wedge(S\cap X'=\phi)\wedge(T\cap X'\neq\phi)$

(4) $(R\cap X'=\phi)\wedge(S\cap X'=\phi)\wedge(T\cap X'\neq\phi)$

(5) $(R\cap X'\neq\phi)\wedge(S\cap X'\neq\phi)\wedge(T\cap X'=\phi)$

(6) $(R\cap X'=\phi)\wedge(S\cap X'\neq\phi)\wedge(T\cap X'=\phi)$

(7) $(R\cap X'\neq\phi)\wedge(S\cap X'=\phi)\wedge(T\cap X'=\phi)$

また，(1)-(7) のどれかの場合を満たすが特別の以下の2つの場合を優先する．

(8) $(R\cap\overline{X'}=\phi)\wedge(S\cap\overline{X'}\neq\phi)$

(9) $(R\cap\overline{X'}\neq\phi)\wedge(S\cap\overline{X'}=\phi)$

上の場合分けをさらに3つに分類する．

- (1), (4) の場合

2つの2分割 $(T;\overline{T})$ と $(X';\overline{X'})$ の関係を考える．$X'\cap T\neq\phi$ より，$(X'\cup\overline{T};\overline{X'\cup\overline{T}})$ は $x\in(R\cup S=\overline{T})$ なる節点 x と $y\in T$ なる節点 y を2分割し，$x,y\in X$ であることより X を2分割する G の2分割である．よって，以下の不等式が成立する．

$$c(X'\cup\overline{T};\overline{X'\cup\overline{T}})\geq c(X';\overline{X'})$$

補題1の始めの場合分けと同様な変形により，以下の不等式が成り立つ．

$$c(R;S:T) \geq c(R\cap X';S\cap X';T\cup \overline{X'})\ c(R;S:T) \geq c(R\cap \overline{X'};S\cap \overline{X'};T\cup X)$$

$(R\cap X' \neq \phi)\wedge(S\cap X' \neq \phi)$ のとき，$(R\cap X';S\cap X';T\cup \overline{X'})$ は G の3分割であり，$(R\cap X')\cap(S\cap X') \subset X'\cap X$ を満たす最小コスト3分割である．$(R\cap \overline{X'} \neq \phi)\wedge(S\cap \overline{X'} \neq \phi)$ のとき，$(R\cap \overline{X'};S\cap \overline{X'};T\cup X)$ は G の3分割であり，$(R\cap \overline{X'})\cap(S\cap \overline{X'}) \subset \overline{X'}\cap X$ を満たす最小コスト3分割である．

- (2)，(3)，(5)，(8)，(9) の場合

上の場合，R,S,T のある順列 (A,B,C) において，$A\subset \overline{X'}\wedge(B\cap X' \neq \phi)\wedge(C\cap X' \neq \phi)$ か $A\subset X'\wedge(B\cap\overline{X'} \neq \phi)\wedge(C\cap\overline{X'} \neq \phi)$ が満たされている．今，一般性を失うことなく，$A=R, B=S, C=T$ とする．$(R;\overline{R})$ は $x\in R$ と $y\in T\cap X$ を分割し，$x,y\in X$ であることより，X を2分割する G の2分割である．よって，以下の不等式が成り立つ．

$$c(R;\overline{R}) \geq c(X';\overline{X'})$$

補題1の $(R\cap X=\phi)\wedge(S\cap\overline{X}=\phi)$ の場合と同様な議論により以下の不等式が成り立つ．

$$c(R;S;T) \geq c(X';S\cap \overline{X'};T\cap \overline{X'})\ c(R;S;T) \geq c(\overline{X'};S\cap X';T\cap X')$$

$(S\cap X' \neq \phi)\wedge(T\cap X' \neq \phi)$ の場合，以下の不等式が成り立つ．

$$c(R;S;T) \geq c(\overline{X'};Y2;Z2)$$

$(S\cap \overline{X'} \neq \phi)\wedge(T\cap \overline{X'} \neq \phi)$ の場合，以下の不等式が成り立つ．

$$c(R;S;T) \geq c(X';Y1;Z1)$$

- (6)，(7) の場合

$(A\cap X'\phi)\wedge(B\cap X'=\phi)\wedge(T\cap X'=\phi)$ を満たす，R,S のある順列 (A,B) が存在する．今，一般性を失うことなく $A=R, B=S$ とする．

$R=X'$ の場合以下が成り立つ．

$$c(R;S;T) \geq c(X';Y1;Z1)$$

$X'\subset R$ の場合，G の2つの2分割 $(X';\overline{X'})$，$(Y;\overline{Y})$ は $X'\subset R, Y\subset T$ で $c(X';\overline{X'}), c(Y;\overline{Y}) \geq c(S;\overline{S})$ を満たす．このとき，定理2より G の3分割 $(X';R-X';S\cup T)$ か $(Y;T-Y;R\cup S)$ のどちらかの3分割も G の最小コスト3分割である．

また，以下の不等式が成り立つ．

$$c(X';R-X';S\cup T) \geq c(X';Y1;Z1) \qquad \square$$

定理3に基づき，無向グラフ $G=(V,E)$ の最小コスト3分割を求めるアルゴリズム $MIN-TRI-PARTITION$ を提案する．

アルゴリズム MIN-TRI-PARTITION(入力グラフ $G=(V,E)$)

S1: G の3分割 $(R;S;T)$=PARTITION(V) を求める．

S2: $(R;S;T)$ を出力する．

手続き PARTITION(節点集合 $X\subseteq V$)=$(R;S;T)$

S1: $|X|\leq 2$ なら $(R;S;T)=(V;\phi;\phi)$ を返し終了する．

S2: X に属するある節点 x に対し，$y\in V-\{x\}$ なる各節点 y との最小コスト2分割の中で，最小コストを持つ2分割を $(X';\overline{X'})$ とする．

S3: $\overline{X'}$ からなる G の部分グラフ上での最小コスト2分割 $(Y1;Z1)$ を求め，$(X';Y1;Z1)$ なる3分割を求める．$|X'|=1$ なら，$(X';\phi;\phi)$ とする．

S4: X' からなる G の部分グラフ上での最小コスト2分割 $(Y2;Z2)$ を求め，$(\overline{X'};Y2;Z2)$ なる3分割を求める．$|\overline{X'}|=1$ なら，$(\overline{X'};\phi;\phi)$ とする．

S5: $(R1;S1;T1)$=PARTITION$(X'\cap X)$
$(R2;S2;T2)$=PARTITION$(\overline{X'}\cap X)$

S6; S3，S4，S5 で求められた分割で3分割であるものの中で最小コストを持つ3分割を $(R;S;T)$ として返し，終了する．

定理 4 アルゴリズム *MIN-TRI-PARTITION($G=(V,E)$)* は G の最小コスト *3* 分割を出力する．また，アルゴリズム内では高々$O(n^2)$ 回の最小コスト *2* 端子分割アルゴリズムを適用する．

[証明] 補題1，定理3より G のある最小コスト3分割 $(R;S;T)$ は手続き PARTITION の S2 で求める2分割 $(X';\overline{X'})$ によって，$X'\cap X$ か $\overline{X'}\cap X$ に $R'\cup S'$ が含まれる新たな最小コスト3分割 $(R';S';T')$ に変形されるか，手続き PARTITION の S3 か S4 で求めることができる．$|R'\cup S'|\geq 2$ でなければな

らないことより，$|X| \leq 2$ を満たす節点集合 X では $R' \cup S' \subset X$ を満たすことができない．よって，ある手続き PARTITION の適用において，入力 X においては $R \cup S \subset X$ を満たす最小コスト 3 分割 $(R;S;T)$ が存在するが，S2 で求められる 2 分割 $(X';\overline{X'})$ において，$(R \cap X' \neq \phi) \wedge (S \cap X' \neq \phi) \wedge (T \cap X' \neq \phi)$，$(R \cap \overline{X'} \neq \phi) \wedge (S \cap \overline{X'} \neq \phi) \wedge (T \cap \overline{X'} \neq \phi)$ のどちらも満たさない場合が生じる．上記の場合，補題 1，定理 3 より S3 か S4 で求める 3 分割が最小コスト 3 分割である．よって，手続き PARTITION の適用の少なくとも 1 つにおいて最小コスト 3 分割が構成できる．

アルゴリズム MIN-TRI-PARTITION においては V を複数の 2 分割によって各節点集合の大きさが高々2 である互いに素な節点集合に分解する．これには高々$O(n)$ の PARTITION の適用が必要となる．PARTITION においては S2, S3, S4 で最小コスト 2 端子分割アルゴリズムを高々$O(n)$ 回適用する．よって，アルゴリズム全体としては最小コスト 2 端子アルゴリズムを $O(n^2)$ 回適用する． □

4　最小コスト k分割アルゴリズム

3．で示した最小コスト 3 分割アルゴリズムを基に最小コスト k分割アルゴリズムを提案する．紙面の都合上，定理の証明を省略する．

アルゴリズム MIN-k-WAY-PARTITION(入力グラフ $G=(V,E)$)

S1: G の k分割 $(V1;V2;\ldots;Vk)$=K-PARTITION(V) を求める．

S2: $(V1;V2;\ldots;Vk)$ を出力する．

手続き K-PARTITION(節点集合 $X \subseteq V$)
=$(V1;V2;\ldots;Vk)$

S1: $|X| \leq (k-1)$ なら $(V1;V2;\ldots;Vk) = (V;\phi;\ldots;\phi)$ を返し終了する．

S2: Xに属するある節点 x に対し，$y \in V - \{x\}$ なる各節点 yとの最小コスト 2 分割の中で，最小コストを持つ 2 分割を $(X';\overline{X'})$ とする．

S3: $\overline{X'}$からなる G の部分グラフ上での最小コスト $(k-1)$ 分割 $(V11;V12;\ldots;V1(k-1))$ を求め，$(X';V11;V12;\ldots;V1(k-1))$ なる k分割を求める．$|X'|=1$ なら，$(X';\phi;\ldots;\phi)$ とする．

S4: X'からなる G の部分グラフ上での最小コスト $(k-1)$ 分割 $(V21;V22;\ldots;V2(k-1))$ を求め，$(\overline{X'};V21;V22;\ldots;V2(k-1))$ なる k分割を求める．$|\overline{X'}|=1$ なら，$(\overline{X'};\phi;\ldots;\phi)$ とする．

S5: $(V31;V32;\ldots;V3k)$=K-PARTITION$(X' \cap X)$
$(V41;V42;\ldots;V4k)$=K-PARTITION$(\overline{X'} \cap X)$

S6; S3, S4, S5 で求められた分割で k分割であるものの中で最小コストを持つ k分割を $(V1;V2;\ldots;Vk)$ として返し，終了する．

定理 5 アルゴリズム *MIN-K-WAY-PARTITION($G=(V,E)$)* は G の最小コスト k分割を出力する．また，アルゴリズム内では高々$O(n^{k-1})$ 回の最小コスト *2* 端子分割アルゴリズムを適用する．

5　まとめ

本稿では無向グラフ上の最小コスト k分割を求めるアルゴリズムを提案した．提案アルゴリズムでは最小コスト 2 端子アルゴリズムを求める手続きのみを必要とし，最小コスト k端子問題より簡単に最小コスト k分割問題が解けることを示した．今後の課題としては，さらなる計算時間の短縮が可能かを考察することである．

参考文献

[1] E. Dahlhaus, D. S. Johnson, C. H. Papadimitriou, P. Seymour *and* M. Yannakakis: "The complexity of multiway cuts," Proc. 24th ACM Symp. on Theory of Computing, pp.241–251 (1992).

[2] R. Gomory *and* T. C. Hu: "Multi-terminal network flows," J. SIAM, Vol.9, pp.551–570 (1961).

[3] O. Goldschmidt *and* D. S. Hochbaum: "Polynomial algorithm for the k-cut problem," Proc. 29th Annual Symp. on the Foundations of Computer Science, pp.444–451 (1988).

[4] D. Hochbaum *and* D. Shimoys: "An $O(V^2)$ algorithm for the planar 3-cut problem," SIAM J. Discrete Math., Vol.6, No.4, pp.707–712 (1985).

[5] H. Saran *and* V. V. Vazirani: "Finding k cuts within Twice the optimal," SIAM J. Comput., Vol.24, No. 1, pp.101–108 (1995).