

## λ-幾何のスタイナ木作成法

早瀬 道芳      目木 信太郎  
岡山県立大学情報工学部

LSIやプリント基板の配線設計において、スタイナ木は最短配線経路として重要である。最近の多層プリント基板では水平垂直方向と斜め45度方向を用いて配線されるものがあり、このような配線方向を拡張したスタイナ木の作成法が必要になった。ユーグリッド平面上と水平垂直の直交配線の間をつなぐ「λ-幾何」は、線の方向として水平軸と $\pi/\lambda$ の倍数(λは2以上の整数)の方向のみに限定した幾何である。本報告では、λ-幾何(λ≡1, 2 (mod 3))の3点及び4点のスタイナ木の幾何学的構成法と多点のスタイナ木の新たな作成法を提案する。計算機実験で、λ=4の時、最小スパンニング木より枝長和を3.2%短縮できた。

### An Algorithm for Steiner Trees in λ-Geometry

Michiyoshi Hayase and Shintaro Meki  
Okayama Prefectural University

A new algorithm to construct Steiner minimal trees in λ-geometry (λ≡1, 2 mod 3) is proposed. Steiner trees are important to layout LSIs and Printed Boards as shortest paths. In λ-geometry, only orientations with angles (iπ/λ), for all i, are allowed, where λ(≥2) is an integer. First, a geometrical method to construct Steiner Trees of three and four Points is proposed. Next, a new algorithm to construct Steiner minimal trees by replacing subtrees iteratively is proposed. Experimental result showed that the Steiner minimal trees are about 3.2% shorter than the corresponding minimum spanning trees, where λ=4.

#### 1 はじめに

LSIやプリント基板は、従来、水平垂直方向の配線で配線されて来た。このため、自動配線技術において多端子の配線パターンを作成するために線分を方向を水平垂直に限定したスタイナ木の研究が多くされて来た[5]。最近の多層プリント基板では水平垂直方向に斜め45度方向を加えて配線されるものがある。このため、水平垂直方向に新たな配線方向を加えたスタイナ木の作成方法が必要になって来た。

スタイナ木は、与えられた点の集合に必要なに応じて新たな点(スタイナ点)を追加して、点間を枝で接続した木である。特に、枝の長さの和が最小になる木を「最小スタイナ木」と言う。最近、ユーグリッド平面上と、水平垂直の直交配線の間をつなぐ概念として、「λ-幾何」の発表がされた[1][2][3]。λ-幾何は、線の方向を水平軸と $\pi/\lambda$ の倍数(λは2以上の整数)の方向(軸方向)のみに限定した幾何である(図1)。軸方向が水平垂直の場合は2-幾何、ユーグリッド平面は∞-幾何である。λ-幾何(2≤λ<∞)に対してスタイナ木作成法を提案したのは、文献[1][2]である。両者共に、最小スパンニング木の枝を直接λ-幾何の軸方向の2線分にする時の自由度を利用して線分の重なりを作ることにより最小スパンニング木より短くする方法である。

本報告では、λ-幾何(λ≡1, 2 (mod 3))のスタイナ木の新たな作成法を提案する。まず、λ-幾何の2点間の距離の計算式を導く。そして、3点の最小スタイナ木のスタイナ点の位置の予想を提出する。次に、この予想を用いて、3点及び4点のスタイナ木の幾何学的構成法を提案し、与えられた任意個数の点に対する多点スタイナ木の作成法を提案する。そして、計算機を用いた実験結果について述べる。

## 2 λ-幾何の距離とスタイナ木問題

λ-幾何における2点間の距離の計算式を求める。

[補題1] λ-幾何における2点間の距離dは、

$$d = r \cos\left(\frac{\pi}{2\lambda} - \varepsilon\right) / \cos\frac{\pi}{2\lambda}$$

である。但し、rはユークリッド幾何の2点間の距離、

εは2点間を通る直線が直近の軸方向となす角度である。

(証明) 図2に示すように、簡単化のために2点をa、bの座標を(0, 0)、(x, y)とする。点bは、点aを中心にしてiπ/λの軸方向と(i+1)π/λの軸方向の間にあるとする(iは整数、0 ≤ i ≤ λ)。点a、bから各々iπ/λと(i+1)π/λの方向の直線を引いて、2つの交点をcとする。線分acの長さをd<sub>1</sub>、線分cbの長さをd<sub>2</sub>とする。点bの座標(x, y)は線分の長さd<sub>1</sub>、d<sub>2</sub>による次の連立方程式で表わされる。

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} = \begin{bmatrix} \cos i\pi/\lambda & \cos(i+1)\pi/\lambda \\ \sin i\pi/\lambda & \sin(i+1)\pi/\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}$$

この連立方程式より、d<sub>1</sub>、d<sub>2</sub>を求めると、2点a、b間の距離dは、

$$d = d_1 + d_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \frac{\cos(\pi/2\lambda - \varepsilon)}{\cos\pi/2\lambda}$$

$$\text{但し、} \varepsilon = \arctan \frac{y}{x} - \frac{i\pi}{\lambda}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{\lambda}$$

となる。εは2点a、bを通る直線が直近の軸方向となす角度である。□

λ-幾何の最小スタイナ木問題を次のように定義する。

[定義2] ユークリッド平面上に与えられた点の集合をPとし、必要に応じて新たな点(スタイナ点)を追加し、点間を接続した木にする。点をつなぐ枝の長さは補題1の距離で測るとして、枝の長さの和が最小の木を作成するのが「λ-幾何最小スタイナ木問題」である。

以下の節では、λ ≡ 1, 2 (mod 3)とする。λ ≡ 0 (mod 3)を除いた理由はスタイナ点が一意に決まらない場合があるからである。そして、スタイナ木の枝は直線であるとして作成し、角度は枝の直線がなす角度を測る。最後に軸方向でない線は角π - (π/λ)をなす軸方向の2線分で置き換えるものとする。

### 3. 3点スタイナ木のスタイナ点位置

3点が与えられた時のλ-幾何の最小スタイナ木のスタイナ点の位置について述べる。

[補題3] 最小スタイナ木のスタイナ点の次数は3または4であり、スタイナ点の数は高々n-2である。スタイナ点につながる線分は2πをできるだけ均等に分割する[1]。

λが偶数の時のみ存在する次数4のスタイナ点の周りの角度はすべてπ/2である。次数3のスタイナ点の周りの角度2πを3等分した時の端数の角度が小さくなるように、軸方向に合わせて切り上げ、切り捨てた角度を次のように定義する。

[定義4] 角α, βを次のように定義する。

$$\begin{aligned} \lambda \equiv 1 \pmod{3} \text{ の時、} & \alpha = \lceil 2\lambda/3 \rceil (\pi/\lambda) = (2\lambda + 1)\pi/(3\lambda), \\ & \beta = \lfloor 2\lambda/3 \rfloor (\pi/\lambda) = (2\lambda - 2)\pi/(3\lambda). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \equiv 2 \pmod{3} \text{ の時、} & \alpha = \lfloor 2\lambda/3 \rfloor (\pi/\lambda) = (2\lambda - 1)\pi/(3\lambda), \\ & \beta = \lceil 2\lambda/3 \rceil (\pi/\lambda) = (2\lambda + 2)\pi/(3\lambda). \end{aligned}$$

この定義を用いると、図3に示すように、スタイナ点につながる3線分(すべて軸方向)の間の角度はα, α, βと表わされる。

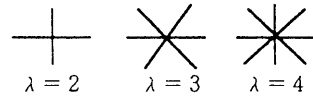


図1. λ-幾何の軸方向

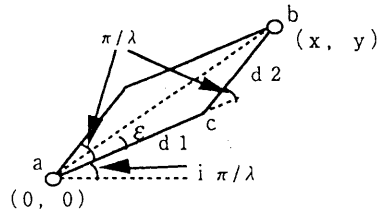
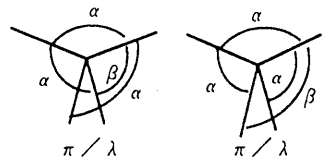


図2. λ-幾何の2点間の距離



(a) λ ≡ 1 (mod 3) (b) λ ≡ 2 (mod 3)

図3. スタイナ点の周りの角度

次に、 $2\pi$  をできるだけ均等に分割する点として  $\sigma$  点を定義する。

[定義5] 次の2条件を満たす点を  $\sigma$  点と呼ぶ。(1)与えられた3点と  $\sigma$  点を直線で結んだ時、 $\sigma$  点の周りの3つの角が、 $\lambda \equiv 1 \pmod{3}$  の時は  $\alpha, \alpha - \epsilon_1, \alpha - \epsilon_2$  である。 $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$  の時は  $\alpha, \alpha + \epsilon_1, \alpha + \epsilon_2$  である。ただし、 $0 \leq \epsilon_1, \epsilon_2 \leq \pi/\lambda, \epsilon_1 + \epsilon_2 = \pi/\lambda$ 。(2)角  $\alpha$  をなす2つの直線が  $\lambda$ -幾何の軸方向である。

[予想6]  $\lambda \equiv 1$  又は  $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$  の場合、 $\lambda$ -幾何の3点の最小スタイナ木のスタイナ点は  $\sigma$  点である。 $\lambda = \infty$  と  $\lambda = 2$  の場合、予想6は成立している[4]。3点が特別な位置関係にある場合には予想6が成立することを次に示す。

[定理7]  $\lambda \equiv 1$  または  $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$  の場合、3点  $a, b, c$  が与えられたとする。1点  $a$  を通る軸方向の線の上に、ユークリッド幾何のスタイナ点  $s$  があり、且つ、点  $a$  を通る軸方向線の両側に残り2点  $b, c$  がある時は、 $\sigma$  点が  $\lambda$ -幾何の3点の最小スタイナ木のスタイナ点である。(証明は付録)

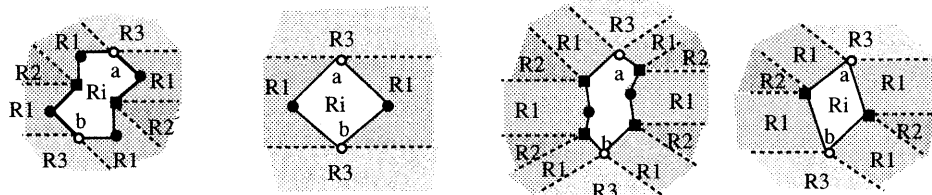
#### 4. $\lambda$ -幾何のスタイナ木作成法

##### 4.1 3点スタイナ木の作成法

$\lambda$ -幾何の3点スタイナ木の作成法のアイデアは、 $\sigma$  点にスタイナ点を置くことである。3点スタイナ木の幾何学的作成手段として、2点で決まる図形を次のように定義する(図6)。

[定義8] 2点を通る軸方向の2線が角  $\alpha$  で交差する点を  $\alpha$  点と呼ぶ。また、 $4 \leq \lambda < \infty$  に対して、2点を通る軸方向の2線が角  $\beta$  で交差する点を  $\beta$  点と呼ぶ。(  $\lambda = 2$  の場合は、 $\beta = \pi$  になるので、 $\beta$  点はない。)

[定義9] 与えられた2点  $a, b$  と  $\alpha$  点と  $\beta$  点を周回しながら結んでできる多角形を周回多角形  $E_n(a, b)$  と表す。 $E_n(a, b)$  の辺は全て軸方向の線分である。 $E_n(a, b)$  とその内部領域を合わせて「内部領域」 $R_i(a, b)$  と表す。 $E_n(a, b)$  の外部領域を次の3つの領域に分割する。タイプ1領域  $R_1(a, b)$  は次のように定義する。 $E_n(a, b)$  上の任意の点を  $y$  とした時、 $E_n(a, b)$  の外部領域内の点  $x$  で、角  $a y x$  または角  $b y x$  が  $\alpha$  となる点  $x$  の集合を  $R_1(a, b)$  とする。但し、線  $x y$  は軸方向で  $E_n(a, b)$  と交差しないものとする。 $R_1(a, b)$  は  $E_n(a, b)$  と2つの平行線で三方を囲まれた開領域である。タイプ2領域  $R_2(a, b)$  は、タイプ1領域にはさまれて  $\alpha$  点から角度  $\pi/\lambda$  で放射状に広がる領域である。タイプ1領域とタイプ2領域の境界線はタイプ2領域に含める。タイプ3領域  $R_3(a, b)$  は、タイプ1領域にはさまれて点  $a, b$  から放射状に広がる残った2つの領域である。タイプ3領域とタイプ1領域の境界線はタイプ3領域に含める。以下では、 $E_n(a, b)$  等の  $(a, b)$  を省略して、 $E_n$  等と表すこともある。



(a) 点  $a, b$  が軸方向線にない場合、 $\lambda = 4$

(b) 点  $a, b$  が軸方向線にある場合、 $\lambda = 4$

(c) 点  $a, b$  が軸方向線にない場合、 $\lambda = 5$

(d) 点  $a, b$  が軸方向線にある場合、 $\lambda = 5$

○ 与えられた点    ■  $\alpha$  点    ●  $\beta$  点

図4. 2点により決まる領域

スタイナ点の位置： $\sigma$  点は  $\alpha$  点であるので、 $\alpha$  点の中から  $\sigma$  点を次の(1)(2)のように探せばよい。

(1) 第3点  $c$  が  $R_2(a, b)$  内にある場合(図7(b))；点  $c$  を含む  $R_2(a, b)$  が放射状に広がる根本の  $E_n(a, b)$  上の  $\alpha$  点は  $\sigma$  点である。(2) 第3点  $c$  が  $R_1(a, b)$  内にある場合(図7(a))；点  $c$  を通って  $R_1(a, b)$  と  $R_2(a, b)$  の境界に平行な線と  $E_n(a, b)$  との交点は  $E_n(b, C)$  または  $E_n(a, C)$  の  $\alpha$  点であり、同時に  $\sigma$  点である。

### 3点スタイナ木作成作成法

(入力は3点  $a, b, c$  の座標) |

Pの任意の2点  $a, b$  に対して、 $R1(a, b)$ と $R2(a, b)$ と $R3(a, b)$ を計算する;

switch(第3点  $c$  が存在する位置) |

case 点  $c$  が  $R1(a, b)$  にある: |

点  $c$  を通って  $R1(a, b)$  と  $R2(a, b)$  の境界に平行な線が  $E_n(a, b)$  と交差する点にスタイナ点を置く; スタイナ点と3点と枝をつなぐ。(図5(a)); |

case 点  $c$  が  $R2(a, b)$  にある:

スタイナ点を点  $c$  を含む  $R2(a, b)$  の  $\alpha$  点に置く; スタイナ点と3点と枝をつなぐ。(図5(b));

case 点  $c$  が  $R3(a, b)$  にある: 3点の  $\lambda$ -幾何最小スパンニング木にする(図5(c));

case 点  $c$  が  $R_i(a, b)$  にある: 3点の  $\lambda$ -幾何最小スパンニング木にする(図5(d));

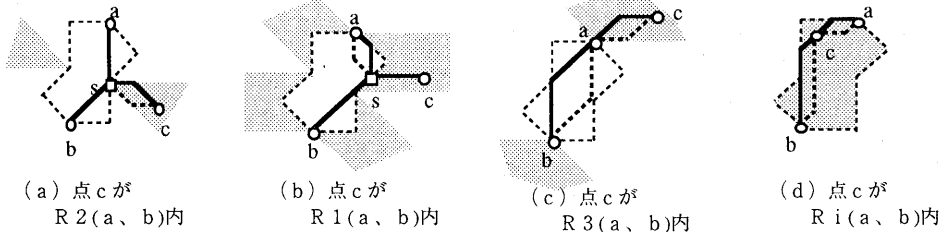


図5. 3点のスタイナ木 ( $\lambda=4$ )

### 4. 2 4点スタイナ木の作成法

4点のスタイナ木の作成法について述べる。2-幾何の4点最小スタイナ木の作成法は Hannan [4] が示した。 $\lambda$ -幾何の4点スタイナ木を作るために、先ず4点でできる4角形より対向2辺を取り出し、辺の両端2点ごとに、定義9で述べた2点で決まる  $R1$  と  $R2$  と次に定義する  $\pi/2$  点を作る。(以下、辺の  $R1$ 、 $R2$ 、 $\pi/2$  点等と言う)そして、2つの辺の  $\pi/2$  点、 $R1$ 、 $R2$  の重なり具合により、4点のスタイナ木の形を決める。

[定義10] 2点を通る軸方向の2線が角  $\pi/2$  で交差する点を  $\pi/2$  点と呼ぶ。(  $\pi/2$  点は  $\lambda$  が偶数の時のみ存在し、 $\lambda=2$  の時  $\alpha$  点と、 $\lambda=4$  の時  $\beta$  点と一致する。)

本方法で作成される4点スタイナ木は、4点の最小スタイナ木であるかどうかはまだ分からない。

### 4点スタイナ木作成法

(入力は4点の座標) |

for (対向辺の組合せ2組について) |

if (2辺の  $E_n$  が重ならない) |

2辺の  $\pi/2$  点と各領域  $R1, R2, R3$  を求める;

if ( $\lambda$  が偶数で、且つ、2辺の  $\pi/2$  点が重なる) |

$\pi/2$  点にスタイナ点を置いて、4点と枝をつなぐ(図6(a)); |

else |

switch (領域の組合せ) |

case 2つの  $E_n$  から  $R1$  が反対方向に伸びて重なり合う:

if (重なった領域内に  $\beta$  点を含む) |

$\beta$  点より  $R1$  と  $R2$  の境界線に平行な線を引き、 $E_n$  との交点と  $\beta$  点にスタイナ点を置く; 各スタイナ点から辺端の2点へ枝をつなぐ; |

```

else{
  R1の重なった領域のR1とR2の境界線に線を引き、Enとの交点とa点にスタイナ点を置く；各スタイナ点から辺端の2点へ枝をつなぐ(図6(b))；
case 2つのR2が互いにa点を含む：
  両方のR2のa点にスタイナ点を置いて枝をつなぐ；
  各スタイナ点から辺端の2点へ枝をつなぐ(図6(c))；
case 上記のcaseが成立せず、且つ、R2の中に辺端の点を含む：
  R2のa点にスタイナ点を置いてR3の点と枝をつなぐ；
  スタイナ点から辺端の2点へ枝をつなぐ(図6(d))；
case 上記のcaseが成立せず、且つ、R1の中に辺端の点を含む：
  R3の点よりR1と平行線を引き、Enとの交点にスタイナ点を置く；
  スタイナ点から辺端の2点へ枝をつなぐ(図6(e))；
case 上記のcaseが成立せず、2つのR3が互いに辺端の点を含む：
  λ-幾何の4点のスパニング木とする((図6(f))；
}
}
}

```

対向辺の組合せ2組の結果より長さの小さい方を採用する；

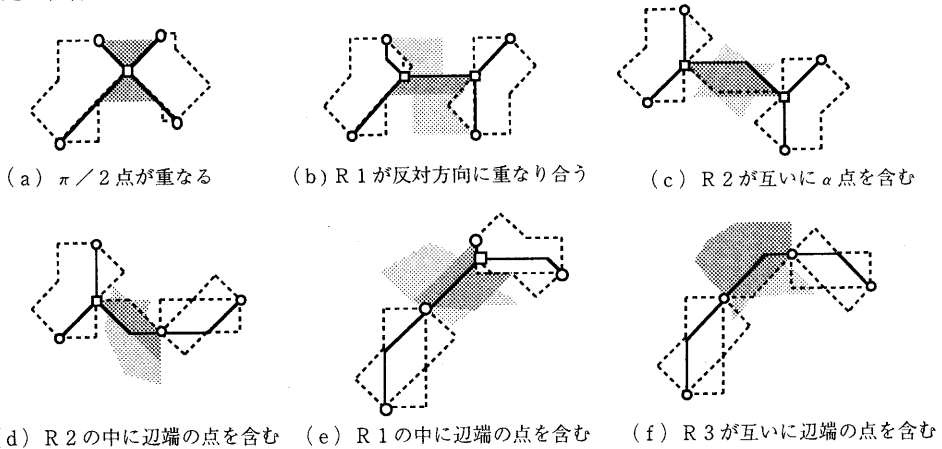


図 6. 4点スタイナ木 ( $\lambda = 4$ )

#### 4. 3 多点スタイナ木の作成法

与えられた点集合  $P$  のスタイナ木を作成する新しい方法を提案する。本方法は、 $\lambda$ -幾何の最小スパニング木を出発点として、3点/4点の部分木を3点/4点のスタイナ木で置き換えることを繰り返す。 $\lambda$ -幾何の最小スパニング木は、点の数を  $n$  として時間複雑度  $O(n \log n)$  で得られる[3]。本方法は Lee & Sechen の方法[5]の  $\lambda$ -幾何への拡張になっている。

3点  $a, b, c$  に対して、点  $c$  が  $R1(a, b)$  または  $R2(a, b)$  内ならば、角  $abc$  または角  $bac$  は  $\gamma$  より小である。但し、 $\lambda \equiv 1 \pmod{3}$  の時  $\gamma = \alpha$ 、 $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$  の時  $\gamma = \beta$  である。多点スタイナ木作成法は、3点を結ぶ2つの線のなす角が  $\gamma$  より小さいV字形を含む最大5点の部分木を探し、3点/4点スタイナ木作成法を適用する。3点/4点スタイナ木が3点/4点の部分木より小さければ3点/4点スタイ

ナ木に置き換える。従って、結果のスタイナ木は最初の最小スパンニング木より長くなることはない。

多点スタイナ木の作成法

(引数は点集合Pの座標) |

点集合Pの $\lambda$ -幾何の最小スパンニング木Tを作る。Tの各枝は直線にする。

Tの各点につながる枝を時計回りの順にソートする。

for (Tの各点) |

for (点につながる枝) |

if (連続する2枝の角が $\gamma$ より小) |

2枝の枝先2点より各々更に1枝先の2点を調べ、連結した最大5点を求める。

switch (取り出した点の数) |

case 5点: |5点のうちの連続4点に対して4点スタイナ木作成法を適用する;

もう一つの連続4点に対して4点スタイナ木作成法を適用する;

枝長の短縮が大きい方を採用する; |

case 4点: 4点スタイナ木作成法を適用する;

case 3点: 3点スタイナ木作成法を適用する;

連続する3枝より4点を求める; 4点スタイナ木作成法を適用する;

if (いずれかの4点/3点スタイナ木が4点/3点の部分木よりも短い) |

部分木を最も小さい4点/3点スタイナ木に置き換え、Tを変更する;

変更した点の枝を時計回りの順にソートする;

図7に4-幾何のスタイナ木の作成例を示す。最初に最小スパンニング木(a)を作成し、上記の多点スタイナ木作成法を適用して、スタイナ木(b)ができる。

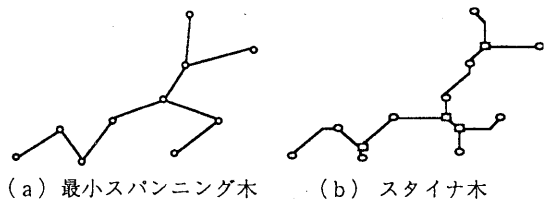


図7. スタイナ木の例 ( $\lambda = 4$ )

## 5 評価結果

4-幾何のスタイナ木作成法をSun Sparc 10 model 30上にC言語で実現し、次の2項目の実験評価をした結果を表1に示す。評価は、乱数を用いて点座標を発生させ、点数ごとに100回の平均値を求めた。

(1) 4-幾何のスタイナ木の最小スパンニング木からの短縮率:

提案手法にて作成した4-幾何のスタイナ木の枝長和と4-幾何の最小スパンニング木の枝長和を比較した。この結果、最小スパンニング木から3.2%短縮できた。変更を3点木に限定した場合は3.0%短縮できた。表1の処理時間は最小スパンニング木作成後の処理の時間を示す。

(2) 4-幾何のスタイナ木の2-幾何のスタイナ木からの短縮率:

文献[5]の手法による2-幾何のスタイナ木と提案手法による4-幾何のスタイナ木の枝長和を比較した。4-幾何は2-幾何より枝長和が10.3%短縮された。これにより、斜め方向を追加することは配線長を10%程短縮する大きな効果があることが確認できた。これは、従来の垂直水平配線に斜め方向の配線を追加したことによる配線長の短縮率に対応する。また、文献[2]の短縮率は平均8.7%であるので、本方法のスタイナ木作成法の方が効果が大きいことが示された。

表1. 提案手法の計算機実験結果

点数	4-幾何							2-幾何		
	MST	3点木と4点木による短縮				3点木のみ		MST	SMT	短縮率
		SMT	短縮率	SMT比	処理時間	SMT	短縮率			
10	4384	4243	3.3%	89.5%	0.7 ms	4251	3.1%	5163	4737	8.3%
20	6421	6209	3.3	90.0	1.6	6225	3.1	7591	6897	9.2
30	7810	7552	3.3	89.7	2.3	7563	3.2	9229	8415	8.8
50	10060	9748	3.1	89.7	4.9	9770	2.9	11934	10865	9.0
70	11943	11565	3.2	89.9	6.9	11588	3.0	14164	12863	9.2
100	14218	13765	3.2	89.7	12.1	13790	3.0	16870	15348	9.0

MSTは最小スパンニング木の枝長和

SMTは最適スタイナ木の枝長和

短縮率は (MST - SMT) / MST

SMT比は 4-幾何SMT / 2-幾何SMT

付 録

(定理7の証明) 点aを通る軸方向の線を水平線と呼ぶ。この水平線上にλ-幾何のスタイナ点tを置いた場合、点tがσ点と一致する時に最小スタイナ木になることを示す。直線as、bs、csの各ユーグリッド距離をr<sub>1</sub>、r<sub>2</sub>、r<sub>3</sub>とする。枝の長さはr<sub>2</sub> ≤ r<sub>3</sub>と仮定する。

(1) スタイナ点tが点aと点sの間にある場合。

図8(a)に示すように、点sと点tのユーグリッド距離をxとし、直線bs、csの各ユーグリッド距離をq<sub>2</sub>、q<sub>3</sub>とする。∠sbt = θ<sub>2</sub>、∠sct = θ<sub>3</sub>とする。点bを通る軸方向線の中で、水平線と交差する点がtとaの間にあってtに最も近い軸方向線が水平線と交差する点をuとする。∠bua = iπ/λ (iは正整数)と表わす。i = [(2π/3 + θ<sub>2</sub>) / (π/λ)]。∠sbu = δ<sub>2</sub> = iπ/λ - 2π/3とする。同様に、点cを通る軸方向線の中で、水平線と交差する点がtとaの間にあってtに最も近い軸方向線が水平線の交差する点をvとする。∠cva = jπ/λ (jは正整数)と表わす。j = [(2π/3 + θ<sub>3</sub>) / (π/λ)]。∠scv = δ<sub>3</sub> = jπ/λ - 2π/3とする。

λ-幾何のスタイナ木の長さLは、補題1の2点間距離の式に、線bt、ctと軸方向線との角度(δ<sub>2</sub> - θ<sub>2</sub>)と(δ<sub>3</sub> - θ<sub>3</sub>)を代入し、ΔsbtとΔsctにおける正弦法則を用いて、次のように表わされる。

$$L = r_1 - x + q_2 \frac{\cos(\pi/2\lambda - \delta_2 + \theta_2)}{\cos \pi/2\lambda} + q_3 \frac{\cos(\pi/2\lambda - \delta_3 + \theta_3)}{\cos \pi/2\lambda}$$

$$= r_1 - r_2 \frac{\sin \theta_2}{\sin(\pi/3 - \theta_2)} + r_2 \frac{\sin 2\pi/3}{\sin(\pi/3 - \theta_2)} \frac{\cos(\pi/2\lambda - \delta_2 + \theta_2)}{\cos \pi/2\lambda} + r_3 \frac{\sin 2\pi/3}{\sin(\pi/3 - \theta_3)} \frac{\cos(\pi/2\lambda - \delta_3 + \theta_3)}{\cos \pi/2\lambda}$$

この長さLを角度θ<sub>2</sub>で微分する。まず、正弦法則より次式が成立する。

$$\frac{r_2}{\sin^2(\pi/3 - \theta_2)} = \frac{r_3}{\sin^2(\pi/3 - \theta_3)} \frac{d\theta_3}{d\theta_2}$$

これを用いて、

$$\frac{dL}{d\theta_2} = r_2 \frac{\sin 2\pi/3 \{ \cos(\pi/2\lambda + \pi/3 - \delta_2) + \cos(\pi/2\lambda + \pi/3 - \delta_3) - \cos \pi/2\lambda \}}{\sin^2(\pi/3 - \theta_2)}$$

となる。λ ≡ 2 (mod 3) の場合は dL/dθ<sub>2</sub> > 0。λ ≡ 1 (mod 3) の場合、線btが、線bsに最も近い軸方向線と一致するまでは dL/dθ<sub>2</sub> < 0、この交差点を越えて点aに近づくとき dL/dθ<sub>2</sub> > 0である。この交差点においてLは極小値になる。この時のθ<sub>2</sub>の値は、iπ/λ ≧ 2π/3を満たす最小整数 i = (2λ + 1)/λをδ<sub>2</sub>に代入して、θ<sub>2</sub> = δ<sub>2</sub> = π/3λである。∠bta = (2λ + 1)π/3λ = αである。

(2) スタイナ点tが点sに関して点aの反対側にある場合。

図8(b)に示すように、(1)と同様の記号を用いる。水平線の延長上点sに関して点aの反対側の充分遠い点をdとする。 $\angle s b u = \delta_2 = 2\pi/3 - i\pi/\lambda$ とする。 $\angle s c v = \delta_3 = 2\pi/3 - j\pi/\lambda$ とする。 $\lambda$ -幾何のスタイナ木の長さLは、次のように表わされる。

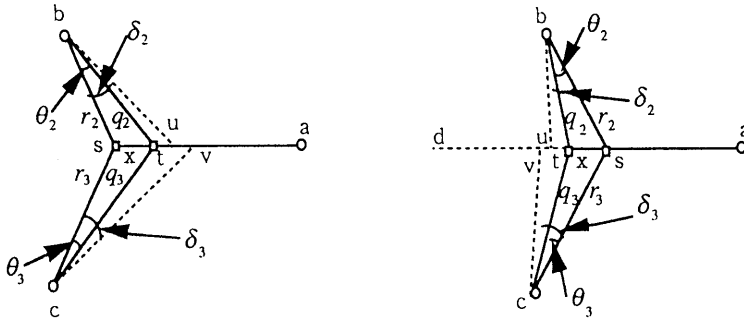
$$L = r_1 + x + q_2 \frac{\cos(\pi/2\lambda - \delta_2 + \theta_2)}{\cos \pi/2\lambda} + q_3 \frac{\cos(\pi/2\lambda - \delta_3 + \theta_3)}{\cos \pi/2\lambda}$$

この長さLを角度 $\theta_2$ で微分する。 $\Delta s b t$ と $\Delta s c t$ における正弦法則を用いて、

$$\frac{dL}{d\theta_2} = r_2 \frac{\sin \pi/3 [2 \cos(\pi/2\lambda + 2\pi/3 - \delta_2) + \cos(\pi/2\lambda + 2\pi/3 - \delta_3) + \cos \pi/2\lambda]}{\sin^2(2\pi/3 - \theta_2)}$$

となる。 $\lambda \equiv 1 \pmod{3}$ の場合は $dL/d\theta_2 > 0$ 。 $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$ の場合、線btが、線bsに最も近い軸方向線と一致するまでは $dL/d\theta_2 < 0$ 、この交差点を越えて点dに近づくとも $dL/d\theta_2 > 0$ である。この交差点においてLは極小値になる。この時の $\theta_2$ の値は、 $i\pi/\lambda \leq 2\pi/3$ を満たす最大整数 $i = (2\lambda - 1)/\lambda$ を $\delta_2$ に代入して、 $\theta_2 = \delta_2 = 2\pi/3 - i\pi/\lambda$ である。 $\angle b t a = (2\lambda - 1)\pi/3 - \lambda = \alpha$ である。

以上(1)と(2)より、 $\lambda \equiv 1 \pmod{3}$ の場合は、枝btが、点bを通り線bsに最も近い $\angle b s a$ 側の軸方向線と一致した時に、Lは最小値になる。 $\lambda \equiv 2 \pmod{3}$ の場合は、枝btが、点bを通り線bsに最も近い $\angle b s d$ 側の軸方向線一致した時に、Lは最小値になる。Lが最小になる時の点tは共に $\sigma$ 点の条件を満たすので、Lが最小となるスタイナ点位置は $\sigma$ 点である。故に、スタイナ点tが $\sigma$ 点と一致する時に3点の最小スタイナ木になる。□



(a) スタイナ点tが点sと点aの間にある場合

(b) スタイナ点tが点sと点dの間にある場合

図8. 3点の最小スタイナ木のスタイナ点位置

謝辞 有益な助言と絶えざる励ましを頂いた京都大学上林弥彦教授に感謝する。

参考文献

[1] Sarrafzadeh, M. and Wong, C.K.: Hierarchical Steiner Construction in Uniform Orientations, IEEE Trans. on Comput.-Aided Des. Integrated Circuits & Syst., Vol.11, No.9, pp.1095-1103, (1992).  
 [2] Burman, S., Chen, H. and Sherwani, N.: Improved Global Routing using  $\lambda$ -Geometry, Proc. of 29th Annual Allerton Conf. on Communications, Computing and Controls, pp.1083-1092, (1991).  
 [3] Windmayer, P., Wu, Y.F. and Wong, C.K.: On Same Distance Problem in Fixed Orientations, SIAM J. Comput., Vol.16, No.4, pp.728-746 (1987).  
 [4] Hannan, M.: On Steiner's Problem with Rectilinear Distance, SIAM J. Appl. Math., Vol.14, No.2, pp.255-265, (1977).  
 [5] Lee, K. and Sechen, C.: A New Global Router for Row-Based Layout, Proc. Int. Conf. on Comput.-Aided Des.'88, pp.180-183, (1988).