グラフの辺が本の背と $\lceil m \log_d n \rceil$ の交差数をもつ $d+1$ ページ本型への埋蔵

榎本彦衛　　宮内美樹
慶応義塾大学理工学部　NTT 基礎研究所

あらまし　グラフの本型埋め込みとは、各頂点は本の背上にあり、各辺は本のページ上にどの任意の辺同士も共通の頂点以外ではお互いに交差しないように埋め込まれた埋め込みのことである。従来のグラフの本型埋め込みでは辺は頂点以外では本の背との交差を許していないが、ここでは辺は背をまたがって複数ページに埋蔵可能であるという条件のもとでの考察をおこなう。このとき任意のグラフに対し、3 ページあれば必ず本型埋め込みが可能であることが既に知られている。以前に著者らは、頂点数 n 辺数 m のグラフに対し本の背とグラフの辺との交差数が $O(m \log n)$ となるような 3 ページへの埋蔵方法を示した。本結果はオーダに関しては最善であることも得られている。本論文ではこの埋蔵方法を改良して交差数を減らし、任意のグラフに対して本の背とグラフの辺との交差数が $\lceil m \log n \rceil$ となるような 3 ページへの本型埋め込みを示した。本結果はグラフの辺数が頂点数の 2 乗オーダの場合には係数に関して最善だと予想している。

Embedding a graph into a $d+1$-page book with $\lceil m \log_d n \rceil$ edge-crossings over the spine

Hikoe Enomoto　　Miki Shimabara Miyauchi
Keio University　　NTT Basic Research Laboratories

Abstract　This paper studies the problem of *book-embeddings* of graphs. When each edge is allowed to appear in one *or more pages* by crossing the spine of the book, We showed that there exist a three-page book embedding of G in which each edge crosses the spine at $O(\log_2 n)$ times. where n is the number of vertices of G. It is known that this upper bound is essentially best possible. This paper generalizes this result and shows an embedding of G into a $d+1$-page book in which each edge crosses the spine at $\lceil \log_d n \rceil$ times.

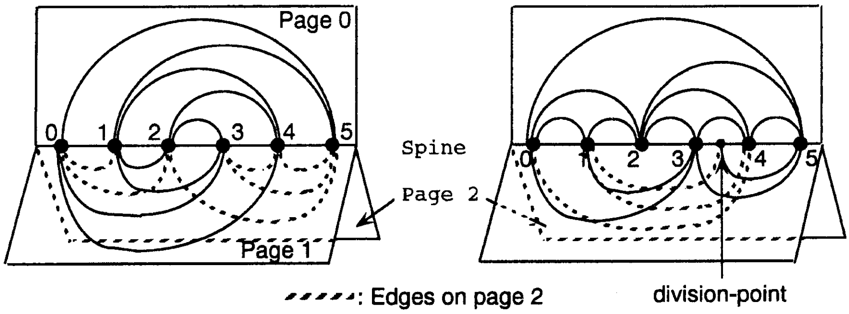

図 1: K_6 の 3- ページの本型埋め込み

1　はじめに

d ページの本型空間とは R^3 内の直線分 L(今後背と呼ぶ) と L を共通の境界としてもつ以外は互いに交わらない半平面 (今後ページと呼ぶ) から成る R^3 の部分空間のことである。これを単に本とも呼ぶことにする。グラフ G の d ページへの本型埋め込みとは、各頂点を本の背に埋め込み各辺をページの境界を含まない内側にお互いに交差しないように配置する埋め込みのことである。1 つのグラフを d ページの本型空間に埋め込む方法は何通りもある。図 1に完全グラフ K_6 の 3 ページの本型空間への埋め込み例を示す。左図では、K_6 は本の背と辺とが 1 度も交差することなしに本型埋蔵されているが、右図では辺 $(1,5)$ は頂点 3 と 4 の間を通って 2 ページと 1 ページを用いて埋蔵されている。グラフの本型埋め込み問題は例えば、多層チップからなるプロセッサの実装モデルなど、VLSI レイアウト設計や計算複雑さの理論などから生じた ([10] などを参照)。そして、特に各辺はただ 1 枚のページにのみ埋蔵可能であるという条件のもとに様々な研究がなされてきた ([3, 12] などを参照)。この条件のものでの本型埋め込みを今後 **組合せ的本型埋め込み**と呼ぶことにする。

本論文ではそれに対して、グラフの辺が本の背と頂点以外でも交差して複数ページに跨って埋蔵されてもよいという条件のもとでの本型埋め込みを考察している。この条件のもとでの本型埋め込みの問題は、組合せ的本型埋め込みの問題とは性質が異なってくるため、この本型埋め込みを**トポロジカル本型埋め込み**と呼ぶことにする。トポロジカル本型埋め込みに対しては、Atneosen [1] や Bernhart 及び Kainen [2] によりそれぞれ独立に任意のグラフに対して 3 ページあれば本型埋蔵可能であることが示されている。Miyauchi [8] はこの時に生じる本の背とグラフの辺との交差数 (以下、この交差点のことを分割点と呼ぶことにする) について検討し、Atneosen の証明は構成的ではないが、$\nu(G)$ をグラフ G を平面に埋め込んだときに生じてしまう辺同士の最少交差数とすると Bernhart と Kainen の 3 ページ本型空間への埋め込みのアイディアを用いた場合には任意のグラフに対し本の背とグラフの辺との交差数 (即ち、分割点の個数) が $\Omega(\nu(G))$ 必要となること、特に n 頂点完全グラフ K_n では $\Omega(n^4)$ の交差数が生じてしまうことがわかるので、新たに各辺上の分割点の個数が $O(n)$ となるような 3 ページへの本型埋め込みを示した。著者ら [5] はこの結果

を改良し、任意の辺に対して分割点の個数が $O(\log n)$ となるような3ページ本型埋め込みを示した。この結果は Enomoto, Miyauchi と Ota [6] によりオーダ的には最善であることが得られている。一方、Chung, Leighton, 及び Rosenberg [3]、あるいは Bernhart 及び Kainen [2] らによってそれぞれ独立に、任意の n 頂点グラフは $\lceil n/2 \rceil$ ページに組合せ的に本型埋め込み可能なこと (即ちグラフのどの辺にも分割点を作ることなしに埋め込み可能) が示されている。Miyauchi [9] では、本のページ数を3ページよりも増やしたときに分割点の個数をどの程度減らすことができるかを検討し、任意のグラフに対して各辺が本の背と $O(\log_d n)$ 回の交差数を持つ d ページ本型埋め込みが存在することを示した。これについても Enomoto, Miyauchi と Ota [6] により、n 頂点完全グラフに対し n がページ数に対して十分大きい場合にはやはりオーダ的には最善であることが得られている。

本論文ではこれらの証明に用いられているグラフのトポロジカル本型埋め込みの構成方法を改良してさらに分割点を減らすことを検討し、任意の n 頂点グラフに対して各辺が丁度 $\lceil \log_d n \rceil$ 個の分割点を持つ $d+1$ ページ本型埋め込みを示した。本結果に関しては、本のページ数に対して頂点数が十分に多く、かつ辺の数が頂点数の2乗オーダとなるようなグラフに対し、係数に関しても最善ではないかと予測している。

組み合せ本型埋め込みの問題は、もともと VLSI レイアウト設計と関係して生じたものである。本研究のトポロジカル本型埋め込みに関しても多層 VLSI レイアウト設計への応用が期待できる。実際、トポロジカル本型埋蔵の問題は次のような回路配線問題とみなすことができる。

1. すべてのワイヤはラインよりも上側で配線されている。
2. 多層のインタコネクションレイヤが使用可能である。
3. ワイヤは1つのレイヤから他のレイヤへ、同じライン上にターミナルとして配置されている管を通って移ることが許されている。
4. すべてのネットは丁度2つのターミナルをもつものとする。

また、Single-row routing 問題も2ページからなるトポロジカル本型埋め込みとみなすことが可能である。

2 各辺が本の背と $\lceil \log_d n \rceil$ の交差を持つ $d+1$ ページへのトポロジカル本型埋め込み

このセクションでは、本の背とグラフの各辺が $\lceil \log_d n \rceil$ の交差数をもつ $d+1$ ページへの本型埋め込みを構成する、但し n はグラフの頂点数とする。グラフは単純グラフ即ちループや多重辺がないと仮定する。$k = \lceil \log_d n \rceil$ とし、$S = \{0, \cdots, d-1\}$ とする。S の元からなる2つの相異なる strings s と t に対して、次のような辞書式順序を導入する。即ち s と t を桁ごとに大小関係を比較し、等しい場合には長い string よりも短い string のほうが小さいとする。この string の順序を $<_s$, $=_s$ などと表すことにする。例えば、$k=2$ かつ $d=2$ のとき string の順序 $<_s$ は、

$$\epsilon <_s 0 <_s 00 <_s 01 <_s 1 <_s 10 <_s 11,$$

となる。但し ϵ は長さ 0 の string を表すものとする。グラフ G の頂点集合 $V(G) = \{0, \ldots, n-1\}$ は d 進数表示することで、(必要ならば 0 を幾つか追加して)S の元からなる長さ k の string によって一意に表すことができる。頂点 $s \in V(G)$ に対して、その d 進表示を $s_1 \ldots s_k$ と表記することにする。また、string $s = s_1 \ldots s_k$ in S^k に対して、$s(i)$ を s の i 番目までの string を表すものとする。即ち $s(i) = s_1 \ldots s_i$、また $s(0)$ は empty string ϵ を表すとする。G の各辺 $(s,t) \in E(G)$ $(s < t)$ を t から s に、

$$(s,t;0), (s,t;1), \ldots, (s,t;k-1)$$

とこの順序にラベル付けした頂点を新たに付加して得られる細分 G^* を考える。もし G^* の $d+1$ ページへの組合せ的本型埋め込みが存在すれば、G^* の頂点のうち G の頂点以外の点を分割点とみなすことで G の $d+1$ ページへのトポロジカル本型埋め込みが得られる。よってまず G^* の $d+1$ ページへの組合せ的本型埋め込みを構成する。即ち G^* の頂点を本の背上に配置し、G^* の辺にはページ番号にあたる $\{0, \cdots, d\}$ を conflict している辺同士は違う番号になるように対応させる。ここで 2 辺 (s,t) と (p,q) が *conflict* しているとは、端点が本の背上で s, p, t, q という順序にレイアウトされているかあるいは p, s, q, t という順序にレイアウトされているときのことをいう。

定理 2.1 G の細分 G^* に対して、$d+1$ ページへの組み合せ本型埋め込みが存在する。

[証明] G^* の頂点集合 $V(G^*)$ は以下のように表される。

$$V(G^*) = \{(s,t;i) | (s,t) \in E(G), s < t, 0 \leq i \leq k-1\} \cup S^k$$

また、今後 s を $(s,t;k)$ とも書くことにする。グラフ G の 2 辺 (s,t)、(p,q) $(s < t,\ p < q)$ に対して、次の 2 つの条件のいずれかを満たすとき $[s,t] <_* [p,q]$ と表すことにする。

(i) $t < q$

(ii) $t = q$ かつ $s < p$

G の細分 G^* の 2 つの頂点 $(s,t;i)$ と $(p,q;j)$ に対して、本の背上で $(s,t;i)$ が $(p,q;j)$ よりも左にくるのは次のいずれかの条件を満たすときとする。

1. $s(i) <_s p(j)$
2. $s(i) =_s p(j)$, i が偶数でかつ $[p,q] <_* [s,t]$
3. $s(i) =_s p(j)$, i が奇数でかつ $[s,t] <_* [p,q]$

例えば、4 頂点完全グラフ K_4 (i.e., $k = 2$, $d = 2$) に対して、本の背上の分割点は左から右に次の順序でレイアウトされる (図 2参照)。

$(10,11;0)$, $(01,11;0)$, $(00,11;0)$, $(01,10;0)$, $(00,10;0)$, $(00,01;0)$, $(00,01;1)$, $(00,10;1)$, $(01,10;1)$, $(00,11;1)$, $(01,11;1)$, $00 = (00,11;2) = (00,10;2) = (00,01;2)$, $01 = (01,11;2) = (01,10;2)$, $(10,11;1)$, $10 = (10,11;2)$, 11

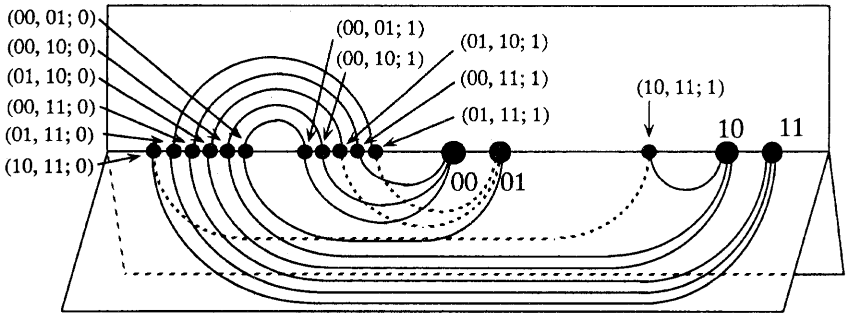

図 2: K_4 の 3 ページ本型埋蔵における分割点と頂点の例。

G^* の辺集合 $E(G^*)$ は次のような 2 つの互いに素な部分集合 E^0、E^1 の和として表される (i.e., $E(G^*) = E^0 \cup E^1$, $E^0 \cap E^1 = \emptyset$)。

$$E^0 = \{((s,t;0),t)\}, \quad E^1 = \{((s,t;i-1),(s,t;i))|1 \le i \le k\}$$

E^0 の辺 $\{((s,t;0),t)\}$ はすべて 0 ページに埋蔵する。E^1 の辺 $((s,t;i-1),(s,t;i))$ は、string $s(i)$ $(0 < i \le k)$ を用いて次の式によって定義されたページ番号 $c(s(i))$ 上に埋蔵する。

1. $c(\epsilon) = 0$ とする。

2. $c(s(i))$ は、$s(i) = s(i-1)s_i$ $(s_i \in S = \{0, \ldots, d-1\})$ とすると、集合 $\{\{0, \cdots, d\} - c(s(i-1))\}$ の元のうち小さいほうから s_i 番目の元とする。

注意として、この定義では $c(s(i-1))$ と $\{c(s(i-1)s_i)|s_i = 1, \cdots, d\}$ とは必ず異なるページ番号をさしている。また、s_i が 0 でないときは $c(s(i-1)s_i)$ $(= c(s(i)))$ は 0 とはならない。

次にこの本型埋蔵において、同じページに埋蔵されている G^* のどの 2 辺も conflict しないことを示す。G^* の 2 つの頂点 $(s,t;i)$ と $(p,q;j)$ において $(s,t;i)$ が $(p,q;j)$ の左にレイアウトされているとき、$(s,t;i) < (p,q;j)$ と書くことにする。まず、E^1 における任意の 2 辺 $((s,t;i-1),(s,t;i))$ と $((p,q;j-1),(p,q;j))$ とが同じページに配置されていたとすると conflict しないことを示す。この両端点が本の背上で $(s,t;i-1) < (p,q;j-1) < (s,t;i) < (p,q;j)$ の順に並んでいるとする。仮定と頂点の配置の定義から、$s(i-1) \le_s p(j-1) \le_s s(i) \le_s p(j)$ が成り立つが、この不等式が満たされるのは、$s(i-1) =_s p(j-1)$ あるいは、$s(i) =_s p(j-1)$ の場合のいずれかのみ。前者のときは、さらに $i = j$ かつ $s_i < p_j$ となりページの定義より $c(s(i)) \ne c(p(j))$。後者のときは $i = j-1$ となり $p(j) = s(i)p_j$ と書けることから上述の注意より $c(s(i)) \ne c(p(j))$。次に、E^0 の任意の 2 辺 $((s,t;0),t)$ と $((p,q;0),q)$ はどちらも 0 ページに配置されているが、$t < q$ のとき定義より $(s,t;0)$ は $(p,q;0)$ よりも本の背上で右にレイアウトされているため conflict しない。最後に、E^0 の任意の辺 $((s,t;0),t)$ と E^1 の任意の辺 $((p,q;j-1)(p,q;j))$ とが同じページに配置されていたとすると conflict しないことを示す。2 辺の両端点が本の背上

で $(p,q;j-1) < (s,t;0) < (p,q;j) < t$ の順に並んでいるとすると、これを満たすには $j = 1$ となりページの定義より $c(p(j)) = c(p(1)) \neq 0$。2辺の両端点が本の背上で $(s,t;0) < (p,q;j-1) < t < (p,q;j)$ の順に並んでいるとすると、仮定と頂点の配置の定義から、$s(0) = \epsilon \leq_s p(j-1) \leq_s t \leq_s p(j)$ が成り立つ。上述のページの定義の注意より $p_j \neq 0$ ならば $c(p(j)) \neq 0$ となり E^0 の辺はすべて0ページに埋蔵されていることに注意するとこの2辺はページが異なることがわかる。$p_j = 0$ のときは、$p(j-1) \leq_s t \leq_s p(j)$ より $j = k$ で $t = p(j)$ となることより、辺 $((s,t;0),t)$ と $((p,q;j-1)(p,q;j))$ とは頂点 t を共通端点として持ちやはり conflict しない。 ■

細分 G^* は、$k = \lceil \log_d n \rceil$ とすると、G の各辺 (s,t) に k 個の分割点を付加することによって作られている。よって次の定理を得ることができる。

定理 2.2 任意のグラフ G に対して G の本型埋蔵で各辺が本の背と高々 $\lceil \log_d n \rceil$ の交差ですむような $d+1$ ページへのトポロジカル本型埋蔵が存在する。但し、n は G の頂点数とする。

系 2.3 任意の自然数 s に対して、グラフ G の各辺が本の背と高々 s 回の交差ですむような $\lceil n^{1/s} \rceil$ ページへのトポロジカル本型埋蔵が存在する。但し、n は G の頂点数とする。

参考文献

[1] G. A. Atneosen, *On the embeddability of compacta in n-books*, Ph.D. Dissertation, Michigan State University (1968).

[2] F. Bernhart and P. C. Kainen, The book thickness of a graph, *J. Combinat. Theory Ser. B* **27** (1979) 320–331.

[3] F. R. K. Chung, F. T. Leighton, and A. L. Rosenberg, Embedding graphs in books: A layout problem with applications to VLSI design, *SIAM J. Alg. Discrete Math.* **8** (1987) 33–58.

[4] A. Dingle and I. H. Sudborough, Single row routing on multilayers, *J. Comp. Sys. Sci.*, 50 (1995), pp. 126–131.

[5] H. Enomoto and M. S. Miyauchi, Embedding a graph into a three-page book with $O(m \log n)$ edge-crossings over the spine, submitted.

[6] H. Enomoto, M. S. Miyauchi and K. Ota, A lower bound for the number of edge-crossings over the spine of the book embeddings of graphs, submitted.

[7] S. M. Malitz, Genus g graphs have pagenumber $O(\sqrt{g})$, *J. Algorithms* **17** (1994) 85–109.

[8] M. S. Miyauchi, An $O(mn)$ algorithm for embedding graphs into a 3-page book, *Tran. IEICE E77-A* **3** (1994) 521–526.

[9] M. S. Miyauchi, Trade off between page number and number of edge-crossings on the spine of book embeddings for graphs, submitted.

[10] A. Rosenberg, The Diogenes approach to fault tolerant arrays of processors, *24th IEEE Tran. Computing* **C–32** (1983) 902–910.

[11] A. T. White, *Graphs, Groups and Surfaces*, North-Holland, (1984) 59.

[12] M. Yannakakis, Embedding planar graphs in four pages, *J. Comp. Sys. Sci.*, 38 (1989), pp. 36–67.