

## 複数の指定点集合に対する2辺-及び2点-連結化問題の解法

土屋憲蔵 間島利也 渡邊敏正

広島大学工学部 第二類(電気系) 回路システム工学大講座

〒739 東広島市鏡山一丁目4番1号

(電話) 0824-24-7661(土屋, 間島)

-7662(渡邊)

(ファクシミリ) 0824-22-7195

(電子メール) {tuti, mashima, watanabe}@huis.hiroshima-u.ac.jp

**概要:** 指定点集合族に対する2辺連結化問題(2ECA-nSV)(2点連結化問題(2VCA-nSV))とは、無向グラフ  $G = (V, E)$  と指定点集合族  $\Psi = \{S_i \subseteq V \mid |S_i| \geq 2, i = 1, \dots, n\}$  が与えられたときに、 $G$  に辺を付加すると、各  $S_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) 中の任意の2点間に辺素(内素)な道が2本以上存在するグラフとなるような、付加すべき最小の辺集合を求める問題である。本稿では、2ECA-nSV 及び 2VCA-nSV に対する解法を示す。

## Solving the 2-Edge- or 2-Vertex-Connectivity Augmentation Problem for Specified Sets of Vertices

Kenzo Tsuchiya, Toshiya Mashima and Toshimasa Watanabe

*Department of Circuits and Systems, Faculty of Engineering, Hiroshima University*

*4-1, Kagamiyama 1-chome, Higashi-Hiroshima, 739 Japan*

*Phone: +81-824-24-7661(Tsuchiya, Mashima)*

*-7662(Watanabe)*

*Facsimile: +81-824-22-7195*

*E-mail: {tuti, mashima, watanabe}@huis.hiroshima-u.ac.jp*

**Abstract:** The 2-edge(vertex)-connectivity augmentation problem for specified sets of vertices, 2ECA-nSV (2VCA-nSV), is defined as follows: given an undirected graph  $G = (V, E)$  and specified sets of vertices  $S_i \subseteq V$  ( $|S_i| \geq 2, i = 1, \dots, n$ ), find a smallest set of edges to be added to  $G$  so that resulting graph has at least two edge-disjoint (internally disjoint) paths between any pair of vertices in  $S_i$  for each  $i, i = 1, \dots, n$ . This paper proposes two algorithms: one for solving 2ECA-nSV; the other for solving 2VCA-nSV.

### 1 はじめに

指定点集合族に対する2辺連結化問題(2ECA-nSVと略記)及び指定点集合族に対する2点連結化問題(2VCA-nSVと略記)はグラフの辺付加問題の一つである。グラフの辺付加問題とは、与えられたグラフに辺を付加することによりある所望の性質を満たすグラフを構成するときに、付加すべき最小コスト

総和(あるいは、その特別な場合として、付加辺コストが一定の場合には、最小本数)の辺集合を求める問題である。所望の性質としては、点連結度、辺連結度などが考えられ、これまで多くの研究がなされている。本稿では、グラフの点連結度及び辺連結度の拡張である、複数の指定点集合に関する点連結度及び辺連結度を扱う。

$G = (V, E)$  を多重無向グラフとし、 $S \subseteq V(|S| \geq$

2) とする. 2 点  $u, v \in V$  に対して,  $\lambda(u, v; G)$  は  $G$  における  $u, v$  間の辺素な道の最大本数を表す (但し,  $u = v$  ならば  $\lambda(u, v; G) = \infty$ ) とする.  $G$  の  $S$  に関する辺連結度  $\lambda(G, S)$  を  $\lambda(G, S) = \min\{\lambda(u, v; G) \mid u, v \in S\}$  と定義する. つまり,  $\lambda(G, S)$  は,  $G$  から辺を除去すると,  $S$  を含む連結成分が 2 個以上存在するグラフとなるような最小の除去すべき辺数のことである.  $\lambda(G, S) \geq k$  なる  $G$  は  $S$  に関して  $k$  辺連結である, または, ( $G$  において)  $S$  は  $k$  辺連結であるという.  $\Psi = \{V\}$  のときの  $\lambda(G, S)$  を単に  $\lambda(G)$  と表し,  $G$  の辺連結度と呼ぶ. また,  $\lambda(G) \geq k$  なる  $G$  は  $k$  辺連結であるという. 点集合族  $\Psi = \{S_i \subseteq V \mid S_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n\}$  に対して,  $G$  の  $\Psi$  に関する辺連結度を  $\lambda(G, \Psi) = \min\{\lambda(G, S_i) \mid S_i \in \Psi\}$  と表す.

$G = (V, E)$  を単純無向グラフとし,  $S \subseteq V$  ( $|S| \geq 2$ ) とする. 2 点  $u, v \in V$  に対して,  $\kappa(u, v; G)$  は  $G$  における  $u, v$  間の内素な (内点を共有しない) 道の最大本数を表す (但し,  $u = v$  ならば  $\kappa(u, v; G) = \infty$ ) とする.  $G$  の  $S$  に関する点連結度  $\kappa(G, S)$  を  $\kappa(G, S) = \min\{\kappa(u, v; G) \mid u, v \in S\}$  と定義する.  $\kappa(G, S) \geq k$  ( $k$ : 正整数) なる  $G$  は  $S$  に関して  $k$  点連結である, または ( $G$  において)  $S$  は  $k$  点連結であるという.  $\Psi = \{V\}$  のときの  $\kappa(G, S)$  を単に  $\kappa(G)$  と表し,  $G$  の点連結度と呼ぶ. また,  $\kappa(G) \geq k$  なる  $G$  は  $k$  点連結であるという. 点集合族  $\Psi = \{S_i \subseteq V \mid S_i \neq \emptyset, i = 1, \dots, n\}$  に対して,  $G$  の  $\Psi$  に関する点連結度を  $\kappa(G, \Psi) = \min\{\kappa(G, S_i) \mid S_i \in \Psi\}$  と表す.

$k$ ECA- $n$ SV (それぞれ,  $k$ VCA- $n$ SV) とは, 無向グラフ  $G = (V, E)$ , 指定点集合族  $\Psi = \{S_i \subseteq V \mid |S_i| \geq 2, i \in I\}$  (但し,  $I = \{1, \dots, n\}$ ) と正整数  $k$  が与えられたときに,  $G' = (V, E \cup E')$  が  $\lambda(G', \Psi) \geq k$  ( $\kappa(G', \Psi) \geq k$ ) を満たすような最小本数の付加すべき辺集合  $E'$  を求める問題である. 但し,  $k$ ECA- $n$ SV (それぞれ,  $k$ VCA- $n$ SV) では, 無向多重グラフ (無向単純グラフ) を対象とする.  $n = 1$  なる  $k$ ECA- $n$ SV (それぞれ,  $k$ VCA- $n$ SV) を  $k$ ECA-SV ( $k$ VCA-SV) と表し, 更に,  $\Psi = \{V\}$  なる  $k$ ECA-SV (それぞれ,  $k$ VCA-SV) を  $k$ ECA ( $k$ VCA) と表す. 図 1, 図 2 にそれぞれ 2ECA- $n$ SV, 2VCA- $n$ SV の例を示す.

$k$ ECA- $n$ SV に関する既知結果について述べる.  $k$ ECA については任意の正整数  $k$  に対して最適解を求める多項式時間アルゴリズムが, それぞれ, [4, 15, 16, 21] で提案されている. また, [4, 15] は  $k$ ECA-SV の解法も与える. 2ECA-SV については [20] で 2ECA に帰着させることにより線形時間アルゴリズ

ムを与えている. 重み付きの  $k$ VCA,  $k$ ECA についてはその NP-完全性が知られている [2, 5, 12, 21]. [2] では  $G$  が空グラフで  $k = 2$  の場合, [21] では  $G$  が空グラフで  $k \geq 2$  の場合, [5] では  $G$  が木で  $k = 2$  の場合の, [12] では  $\lambda(G) = k - 1$  且つ  $k \geq 2$  の場合の, NP-完全性が示されている. [5, 12] では辺コストは 2 種類である.

次に  $k$ VCA- $n$ SV に関する既知結果について述べる.  $k$ VCA に関しては,  $k \leq 4$  の場合には最適解法が知られているが,  $k \geq 5$  の場合には, これまでのところ, 未解決問題であり, その多項式時間可解性, NP-完全性についても不明である. 2VCA に対しては, [2] で最適に解けることが証明され, [10, 17] でその線形時間アルゴリズムが提案されている. 3VCA に対しては, [22] で多項式時間アルゴリズムが示され, その後 [9] で線形時間アルゴリズムが示されている. なお,  $k \geq 2$  なる重み付き (付加辺のコストが一定でない場合)  $k$ VCA は NP-完全である [2, 5, 22]. [2] では  $G$  が空グラフの場合の 2VCA について, [5] では  $G$  が木の場合の 2VCA について, [22] では  $k \geq 3$  なる  $k$ VCA と  $G$  が 2 点連結グラフの場合の 3VCA について, それぞれの NP-完全性が示されている. [5] と [22] での 3VCA の辺コストは 2 種類である. 4VCA に対しては,  $G$  が 3 点連結グラフの場合の  $O(|V|\alpha(|E|, |V|) + |E|)$  時間アルゴリズムが [7] で, 一般の 4VCA に対する  $O(|V|\log|V| + |E|)$  時間アルゴリズムが [8] で提案されている.  $k$ VCA-SV に関しては,  $k = 2$  (それぞれ,  $k = 3$ ) の場合に [20] ([13, 14]) で線形時間アルゴリズムが示されているが,  $k \geq 4$  の場合は未解決問題である.

本稿では, 特に断らない限り付加辺コストは一定とし, この場合の 2VCA- $n$ SV 及び 2ECA- $n$ SV の解法について議論する. 2ECA- $n$ SV については,  $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$  なる 2ECA-SV に帰着できることを示す. 2ECA-SV の線形時間アルゴリズム [20] を利用すると, 2ECA- $n$ SV を  $O(n|V| + |E|)$  の計算時間で解くことができる. 一方, 2VCA- $n$ SV については,  $O(n^2|V| + |E| + B_{n''} \cdot n''(|V| + |E|))$  時間のアルゴリズムが存在することを示す. 但し,  $B_{n''}$  は  $n''$  個の要素からなる集合に対する Bell 指数である.

## 2 諸定義

無向グラフ  $G = (V, E)$  は, 有限な空でない点集合  $V$  と辺集合  $E$  からなる.  $V, E$  をそれぞれ  $V(G),$

$E(G)$ と表すこともある。特に断らない限り、グラフは自己閉路を持たないものとする。2点  $u, v$  を両端点とする辺を  $(u, v)$  と表す。  $G$  に辺集合  $E'$  (それぞれ、辺  $e$ ) を付加して得られるグラフを  $G+E'$  ( $G+e$ )、  $G$  から点集合  $X \subseteq V$  (それぞれ、点  $v \in V$ ) を除去して得られるグラフを  $G-X$  ( $G-v$ ) と表す。点集合  $X \subseteq V$  に対して、  $\bar{X}$  は  $\{v \in V \mid v \notin X\}$  を表す。  $G-\bar{X}$  を  $G[X]$  と表し、  $X$  から誘導される  $G$  の部分グラフと呼ぶ。

$G$  において、どの2点間にも道が存在するとき  $G$  は連結であるという。  $G$  の極大な連結部分グラフを連結成分という。  $G = (V, E)$  を  $|V| \geq 3$  なる単純無向グラフとし、  $S \subseteq V$  を  $|S| \geq 2$  なる  $G$  の指定点集合とする。  $|S| \geq 3$  の場合には、  $G$  からどの1辺を除去しても  $S$  の残ったどの2点間にも道が存在することと、  $\lambda(G, S) \geq 2$  は同値である。  $G$  からどの1点を除去しても  $S$  の残ったどの2点間にも道が存在することと、  $\kappa(G, S) \geq 2$  は同値である。

$Z \subseteq V$  が「 $\forall u, v \in Z$  に対して  $\lambda(u, v; G) \geq k$  であり、各  $w \in V-Z$  に対しては  $\lambda(v_w, w; G) < k$  なる  $v_w \in Z$  が存在する」を満たすとき及びそのときのみ  $Z$  を ( $G$  の)  $k$  辺連結成分 (省略して  $k$  辺成分) と呼ぶ。  $\lambda(u, v; G)$  のかわりに  $\kappa(u, v; G)$  を用いて同様に  $k$  点連結成分 ( $k$  成分と略記) が定義される。

$G$  から除去すると、  $S \cap R$  なる連結成分  $R$  の数が増加するような1辺または1点を、それぞれ、  $G$  の  $S$  橋または  $S$  カット点と呼ぶ:  $S = V$  のときは  $S$  を省略して単に橋、カット点と呼ぶ。  $v$  を  $G$  の任意の点とし、  $G$  の連結成分で  $v$  を含むものを  $R_v$  と表す。  $R_v-v$  の任意の連結成分を  $R'$  とする。  $G[V(R') \cup \{v\}]$  を  $v$ -成分と呼ぶ。

### 3 2ECA- $n$ SV

$G$  の全ての連結成分からなる集合を  $\mathcal{R}$  と表す。  $X \subseteq V$  に対して、  $\rho(X) = \{(u, v) \in E \mid u \in X, v \in V-X\}$  とする。  $X, Y \subseteq V$  に対して、  $X-Y \neq \emptyset$  且つ  $X \cap Y \neq \emptyset$  且つ  $Y-X \neq \emptyset$  ならば、  $X$  は  $Y$  と交差する (intersect) という。

$G$  と  $\Psi$  を入力とする 2ECA- $n$ SV の最適解の辺の本数を  $\text{OPT}_e(G, \Psi)$  と表す。

以下では、各  $S_i \in \Psi$  に対して、  $\lambda(G, S_i) < 2$  と仮定する。更に、各  $R \in \mathcal{R}$  に対して  $V(R) \cap S_i \neq \emptyset$  なる  $S_i \in \Psi$  が存在すると仮定する。

**補題 3.1** [21]  $k \geq 1$  のときグラフ  $G = (V, E)$  の任意の異なる  $k$  辺成分  $X, X'$  に対して  $X \cap X' = \emptyset$ 。

補題 3.1 より、  $S_i \cap S_j \neq \emptyset$  なる  $S_i, S_j$  ( $i, j \in I, i \neq j$ ) が存在すれば、  $\lambda(G', S_i) \geq 2$  且つ  $\lambda(G', S_j) \geq 2$  であり、従って  $\lambda(G', S_i \cup S_j) \geq 2$  よって  $\text{OPT}_e(G, \{S_i, S_j\}) = \text{OPT}_e(G, \{S_i \cup S_j\})$  である。このような  $S_i, S_j \in \Psi$  がある限り  $\Psi \leftarrow \Psi - \{S_i, S_j\}, S_i \leftarrow S_i \cup S_j, \Psi \leftarrow \Psi \cup \{S_i\}$  なる置換え操作を反復する。この結果、  $\Psi' = \{S_i, \dots, S_{n'}\}$  とおく。但し、  $n' \leq n$  且つ任意の  $S_i, S_j \in \Psi' (i \neq j)$  に対して  $S_i \cap S_j = \emptyset$  である。明らかに  $\text{OPT}_e(G, \Psi) = \text{OPT}_e(G, \Psi')$  である。

### 3.1 解法の概要

$\Psi_Z$  が 2 辺連結ならば  $\Psi$  も 2 辺連結であるから、  $\text{OPT}_e(G, \Psi) \leq \text{OPT}_e(G, \Psi_Z)$  である。更に、以下では  $\text{OPT}_e(G, \Psi) \geq \text{OPT}_e(G, \Psi_Z)$  を示す。従って、  $\text{OPT}_e(G, \Psi) = \text{OPT}_e(G, \Psi_Z)$  となり、これは、  $G$  と  $\Psi_Z$  を入力とする 2ECA-SV を最適に解くことにより 2ECA- $n$ SV が最適に解けることを意味する。[20] により 2ECA-SV は線形時間で最適に解くことができ、また、その前処理に  $O(n|V|)$  時間必要なことから、次の定理を得る。

**定理 3.1** 2ECA- $n$ SV は  $O(n|V| + |E|)$  時間で最適に解くことができる。

以下では、定理 3.1 が成り立つことを示す。

### 3.2 $S_i$ に関する葉とその性質

$R$  を  $G$  の連結成分で橋  $e$  を持つものとする。  $R-e$  の各連結成分を  $Y$  と表すとき、  $Y$  に含まれる 2 辺成分で  $e$  の一方の端点を含むものを  $\text{core}(Y)$  と表す。  $\text{core}(Y) = Y$  なる場合もある。

各  $S_i \in \Psi'$  に対して、  $S_i$  に関する葉を定義する。  $S_i \cap V(R) \neq \emptyset$  なる  $G$  の各連結成分  $R$  に着目する。  $S'_i = S_i \cap V(R)$  とおく。以下の (1) または (2) で定義される集合  $X \subseteq V(R)$  を ( $G$  における)  $S_i$  に関する葉と呼ぶ。

(1)  $R$  に  $S'_i$  の 2 点を分離する橋が存在するとき。  
  $|\rho(X)| = 1, X \cap S'_i \neq \emptyset, (V-X) \cap S'_i \neq \emptyset$  を満たす極小な点集合  $X \subseteq V(R)$ 。

(2)  $R$  に  $S'_i \subseteq B$  なる 2 辺成分  $B$  が存在するとき。  
  $B = V(R)$  ならば  $X = B$  とする。  $B \subset V(R)$  ならば  $(\rho(B)$  の各辺は橋であるので)、  $\{V(R_1), V(R_2) \subseteq V(R) \mid e \in \rho(B) \text{ 且つ } R_1, R_2 \text{ は } R-e \text{ の連結成分}$

}の中から、 $B \subseteq Y$ 且つ任意の  $S_j \in \Psi' - \{S_i\}$  に対して  $(Y - B) \cap S_j = \emptyset$  なる  $Y$ があれば、その様なすべての  $Y$ の各々を  $X$ として選ぶ。もしなければ  $X = \emptyset$ とする。

(1)で定義された葉をタイプ1、(2)で定義された葉をタイプ2と呼ぶ。なお、タイプ2の場合には  $S_i \cap V(R') \neq \emptyset$ なる  $G$ の連結成分  $R' (\neq R)$ が必ず存在することに注意されたい。各  $S_i \in \Psi'$ に対して、 $G$ における  $S_i$ に関する空でない葉の集合を  $L_{\Psi'}(i)$ とおき、更に

$$L_{\Psi'} = \bigcup_{S_i \in \Psi'} L_{\Psi'}(i),$$

$$LF_{\Psi'} = L_{\Psi'} - \{X \in L_{\Psi'} \mid \text{ある } Y \in L_{\Psi'} \text{ に対して } Y \subset X\}$$

と表す。

**注意 3.1**  $X$ を  $S_i \in \Psi'$ に関するタイプ2の葉とする。 $S_j \in \Psi' (i = j \text{ の場合もあり得る})$ に関するタイプ2の葉  $Y$ で  $Y \neq X$ 且つ  $S_i \cup S_j \subseteq \text{core}(Y) = \text{core}(X)$ なる場合があり得る(図3参照)。このような  $Y$ がある限り、 $LF_{\Psi'} \leftarrow LF_{\Psi'} - \{Y\}$ なる削除操作を反復する。以下では  $LF_{\Psi'}$ はこの削除操作を可能な限り行ったものとする。

**補題 3.2**  $X \in LF_{\Psi'}$ を  $G$ における  $S_i \in \Psi'$ に関する任意の葉とすると、次の(1)-(3)が成り立つ。

- (1)  $G[X]$ は連結である。
- (2)  $R$ を  $X \subseteq V(R)$ なる  $G$ の連結成分とし、各  $S_k \in \Psi'$ に対して  $S'_k = S_k \cap V(R)$ と表す。

このとき、 $S'_i \cap X \subseteq \text{core}(X)$ 且つもし  $S_j \cap X \neq \emptyset$ なる  $S_j \in \Psi' - \{S_i\}$ が存在すれば必ず  $S'_j \cap X \subseteq \text{core}(X)$ である。

- (3) 任意の  $Y \in LF_{\Psi'} - \{X\}$ に対して、 $X \cap Y = \emptyset$ である。

(証明) (1)は葉の定義より、(2)はタイプ1の葉の極小性、タイプ2の葉の定義より明らかである。次に、ある  $Y \in LF_{\Psi'} - \{X\}$ に対して、 $X \cap Y \neq \emptyset$ と仮定する。このとき、 $X \cup Y \subseteq V(R)$ であり、且つ  $X$ は  $Y$ と交差する。 $Y$ は  $G$ における  $S_j \in \Psi'$ に関する葉であるとする。但し、 $i = j$ もあり得る。

まず、 $\rho(X) = \{e\}$ なる橋  $e$ が存在する。従って、 $\text{core}(X) \subseteq Y$ 且つ  $G[Y]$ は  $e$ を含む。 $X - Y \neq \emptyset$ だから  $G[X]$ は  $G$ の橋  $e'$ を持つ。 $R'_1, R'_2$ を  $R - e'$ の2つの連結成分とし、 $V(R) - X \subseteq V(R'_1)$ とすると  $Y = V(R'_1)$ である(図4参照)。 $X$ がタイプ1と仮定すると  $G[Y] - e$ の連結成分の中に  $S_i$ に関する葉が存在することになり  $Y \in LF_{\Psi'}$ であることに矛盾

する。従って  $X$ はタイプ2である。 $(X - \text{core}(X)) \cap S_j = \emptyset$ だから  $S'_j \subseteq Y$ となり、 $Y$ もまたタイプ2で  $S'_i \cup S'_j \subseteq \text{core}(Y) = \text{core}(X)$ となる。すなわち  $X, Y$ は注意3.1で述べた葉であり、 $LF_{\Psi'}$ の構成法より両方が  $LF_{\Psi'}$ に含まれることはなく、矛盾である。よって(3)が成り立つ。(証明終)

$Z = \bigcup_{S_i \in \Psi'} S_i, \Psi_Z = \{Z\}$ とする。 $LF_Z$ を  $G$ における  $Z$ に関する空でないすべての葉の集合とする。

**補題 3.3**  $LF_Z = LF_{\Psi'}$ なる  $LF_{\Psi'}$ が存在する。

(証明) まず、任意の  $X \in LF_{\Psi'}$ に対して  $X \in LF_Z$ であることを示す。 $X$ は  $G$ における  $S_i \in \Psi'$ に関する葉であるとする。 $S_i \cap X \subseteq \text{core}(X)$ である。一方、 $X \cap S_j \neq \emptyset$ なる  $S_j \in \Psi'$ が存在すれば補題3.2(2)より必ず  $S_j \cap X \subseteq \text{core}(X)$ である。よって、 $X \in LF_Z$ である。

次に、任意の  $X \in LF_Z$ に対して  $X \in LF_{\Psi'}$ としてよいことを示す。 $R$ を  $X \subseteq V(R)$ なる  $G$ の連結成分とする。 $Z \cap X \subseteq \text{core}(X)$ である。いま  $S_i \cap X \subseteq \text{core}(X)$ なる  $S_i \in \Psi'$ が存在したとすると、 $\lambda(G, S_i) < 2$ であるから、 $(V(R) - X) \cap S_i \neq \emptyset$ であるかまたは  $(V - V(R)) \cap S_i \neq \emptyset$ のいずれかである。従って、 $X$ は  $S_i \cap X \subseteq \text{core}(X)$ なるすべての  $S_i \in \Psi'$ の葉であり、 $X \in LF_Z$ としての極小性から、 $X$ を  $LF_{\Psi'}$ の要素として選ぶことができる。

(証明終)

$R \in \mathcal{R}$ に  $B \supseteq \bigcup_{S_i \in \Psi'} (V(R) \cap S_i)$ なる2辺成分  $B \subseteq V(R)$ が存在するならば、 $B$ を  $\Psi'$ に関する  $R$ の孤立2辺成分と呼び、 $B_R(\Psi')$ で表す。 $R$ に孤立2辺成分が存在するならば、 $G' = G + E'$ に対して  $\lambda(G', \Psi') \geq 2$ とするためには、 $V(R)$ の点を端点とする新しい辺を少なくとも2本は付加する必要がある。タイプ1の葉  $X$ に対しては同様に  $X$ の点を端点とする新しい辺を少なくとも1本は付加しなければならない。タイプ2の葉  $X$ については、 $X \subseteq V(R)$ なる  $G$ の連結成分  $R$ 内に含まれる葉の数によって付加辺が決められる。

各  $R \in \mathcal{R}$ に対して、次数要求数  $w(R, \Psi')$ を次のように定める。 $LF_R = \{X \in LF_{\Psi'} \mid X \subseteq V(R)\}$ と表すとき、

$$w(R, \Psi') = \max\{2, |LF_R|\}$$

とおく。このとき、グラフ  $G$ の  $\Psi$ に関する次数要求数  $w(G, \Psi)$ を

$$w(G, \Psi) = \sum_{R \in \mathcal{R}} w(R, \Psi')$$

と定める.

補題 3.4  $\text{OPT}_e(G, \Psi') \geq \lceil w(G, \Psi')/2 \rceil$ .

(証明)  $R \in \mathcal{R}$  が孤立 2 辺成分を持つならば  $|LF_R| = 1$  であるが  $w(R, \Psi') = 2$  である. 一方,  $R$  が孤立 2 辺成分を持たないならば  $w(R, \Psi') = |LF_R| \geq 2$  となる. 補題 3.2(3) より,  $\lambda(G + E', \Psi') \geq 2$  なる付加辺集合  $E'$  は各  $R$  に対して  $V(R)$  の点を端点とする  $w(R, \Psi')$  本の新しい辺を含まなければならない. 1 本の辺の付加で高々 2 の次数要求を満たすことができるので, 補題が成り立つ. (証明終)

補題 3.3 より,  $LF_Z = LF_{\Psi}$  なる  $LF_{\Psi'}$  に着目すれば次の補題が成り立つ.

補題 3.5  $w(G, \Psi_Z) = w(G, \Psi')$ .

渡邊, 東, 中村 [20] により, 次の補題が示されている.

補題 3.6 [20] (1)  $\text{OPT}_e(G, \Psi_Z) = \lceil w(G, \Psi_Z)/2 \rceil$ .  
(2) 2ECA-SV は線形時間で最適に解くことができる.

$E'$  を  $|E'| = \text{OPT}(G, \Psi_Z) = \lceil w(G, \Psi_Z)/2 \rceil$  且つ  $\lambda(G + E', \Psi_Z) \geq 2$  なる付加辺集合とすると, 明らかに  $\lambda(G + E', \Psi') \geq 2$  である. また,  $Z = S_1 \cup \dots \cup S_n$  は  $O(n|V|)$  で求まる. 従って, 補題 3.4, 3.5, 3.6 より, 定理 3.1 が成り立つ.

## 4 2VCA- $n$ SV

2VCA- $n$ SV の解となる付加辺集合を  $E'$  とし,  $E'$  を付加した後のグラフを  $G'$  とする.  $G, \Psi$  を入力とする 2VCA- $n$ SV の最適解の辺の本数を  $\text{OPT}_v(G, \Psi)$  とする.  $Z = S_1 \cup \dots \cup S_n$ ,  $\Psi_Z = \{Z\}$  において定義される 2VCA-SV に対して, 図 2 にも示した通り, 一般には  $\text{OPT}_v(G, \Psi)$  と  $\text{OPT}_v(G, \Psi_Z)$  は必ずしも等しくはならない. この点では 2ECA- $n$ SV とは大きな差があることに注意されたい.

任意の  $S_i \in \Psi$  に対して  $\kappa(G, S_i) < 2$ , 且つ  $G$  の各連結成分  $R$  に対して  $S_i \cap R \neq \emptyset$  なる  $S_i \in \Psi$  が存在すると仮定する.

各  $S_i \in \Psi$  に対して  $G'$  においては  $S_i$  を含む 2 成分が存在する. また, 異なる 2 成分は高々 1 点を共有する. 従って次の補題が成り立つ.

補題 4.1  $|S_i \cap S_j| \geq 2$  なる  $S_i, S_j \in \Psi$  ( $i \neq j$ ) が存在するならば,  $G'$  において  $S_i \cup S_j \subseteq Z'$  なる 2 成分  $Z'$  がある.

補題 4.1 の  $S_i, S_j$  に対して,  $\text{OPT}_v(G, \{S_i, S_j\}) = \text{OPT}_v(G, \{S_i \cup S_j\})$  である. ここで,  $|S_i \cap S_j| \geq 2$  なる異なる  $S_i, S_j \in \Psi$  が存在する限り,  $\Psi \leftarrow \Psi - \{S_i, S_j\}$ ,  $S_i \leftarrow S_i \cup S_j$ ,  $\Psi \leftarrow \Psi \cup S_i$  なる置換え操作を繰り返す. この結果, 改めて

$$\Psi' = \{S_1, \dots, S_{n'}\}$$

とおく. 但し,  $n' \leq n$  且つ任意の  $S_i, S_j \in \Psi'$  ( $i \neq j$ ) に対して  $|S_i \cap S_j| \leq 1$  である.  $\Psi'$  は  $O(n^2|V|)$  時間で求めることができる.

$G$  のすべての 2 成分の族を  $\mathcal{B}_2(G)$ , また  $\mathcal{B}_c(G) = \{\{v\} \mid v \text{ は } G \text{ のカット点である}\}$  と表す.  $\mathcal{B}_G = \mathcal{B}_2(G) \cup \mathcal{B}_c(G)$  とおく. 但し,  $\mathcal{B}_2(G)$  と  $\mathcal{B}_c(G)$  の両方に含まれる集合はいずれか一方のみを  $\mathcal{B}_G$  の要素とする. 任意の  $B \in \mathcal{B}_G$  に対し,  $|B| = 1$  または  $|B| \geq 3$  である.  $|B| = 1$  且つ  $v \in B$  が  $G$  のカット点である  $B$  をカットブロックと呼ぶ.  $G$  のブロックグラフ  $BK_G = (V(BK_G), E(BK_G))$  を以下の様に定める.

$$V(BK_G) = \{v_B \mid B \in \mathcal{B}_G\},$$

$E(BK_G) = \{(v_B, v_{B'}) \mid B, B' \in \mathcal{B}_G \text{ は以下の (1)-(3) を満たす}\}$  とする:

- (1)  $|B| = |B'| = 1$  且つ  $u \in B$  と  $u' \in B'$  は  $G$  で隣接する;
- (2)  $|B| = 1$  且つ  $B \subset B'$  (このとき  $u \in B$  は  $G$  のカット点である);
- (3)  $|B'| = 1$  且つ  $B' \subset B$  (このとき  $u' \in B$  は  $G$  のカット点である).

$BK_G$  は一般に森であり, 各  $R \in \mathcal{R}$  に対応する部分グラフは木である.

なお,  $B \in \mathcal{B}_2(G) - \mathcal{B}_c(G)$  なる  $v_B$  を  $b$  点,  $B \in \mathcal{B}_c(G)$  なる  $v_B$  を  $c$  点と呼ぶ. ( $v_B$  が  $b$  点ならば,  $|B| \geq 3$  であるか, またはもし  $|B| = 1$  ならば  $v \in B$  は  $G$  のカット点ではない.) 図 5 に図 2 のグラフ  $G$  に対するブロックグラフ  $BK_G$  を示す. 各  $u \in V(BK_G)$  に対して対応する 2 成分またはカットブロックを  $B_u \in \mathcal{B}_G$  と表す. また各  $B \in \mathcal{B}_G$  に含まれる  $G$  でのカット点の集合を  $CV(B)$  と表す.

$S_i \in \Psi'$  に対して,  $S_i \cap V(R) \neq \emptyset$  なる  $R \in \mathcal{R}$  が存在し, 且つ  $R$  は  $S_i$  の 2 点を分離するカット点を持つとする.  $BK_R$  を  $T_R(i)$  と表し, 以下の変形操作を出来る限り反復する:

$T_R(i)$  において次数が 1 の点 (これを葉と呼ぶ)  $v$  を任意に選び,  $(v, v')$  を  $T_R(i)$  の辺とする.

(i)  $v$ が $b$ 点のとき:  $(|B_v| = 1 \text{ 且つ } B_v \cap S_i = \emptyset)$  または  $(|B_v| \geq 3 \text{ 且つ } (B_v - B_{v'}) \cap S_i = \emptyset)$  ならば  $T_R(i) \leftarrow T_R(i) - v$ .

(ii)  $v$ が $c$ 点のとき:  $(B_v \cap S_i = \emptyset \text{ 且つ } |B_{v'}| = 1)$  または  $(|B_{v'}| \geq 3)$  ならば  $T_R(i) \leftarrow T_R(i) - v$ .

この結果構成された  $T_R(i)$  においては, 次数1の各点  $v$  に対して,  $B_v \cap S_i \neq \emptyset$  である. また  $v$ が $c$ 点ならば隣接点  $v'$ も $c$ 点である. ここで

$$A_R(i) = \bigcup_{v \in V(T_R(i))} B_v$$

とおく.  $|A_R(i)| \geq 2$  だから,  $G'$  においては  $A_R(i) \subseteq Z'$  且つ  $|Z'| \geq 3$  なる2成分  $Z'$  が存在することは明らかである.

各  $S_k \in \Psi'$  に対して  $S_k \cap V(R) = S'_k$  と表す.  $S_j \in \Psi' - \{S_i\}$  が以下の条件 (1), (2) を満たすとき及びそのときのみ  $S_j$  は  $S_i$  に融合可能という.

(1)  $|S'_j| \geq 2$  且つ  $A_R(i) \cap S'_j \neq \emptyset$ .

(2)  $S'_j - A_R(i) \neq \emptyset$  ならば各  $w \in S'_j - A_R(i)$  に対し,  $(A_R(i) \cap S'_j) - \{u_w\} \neq \emptyset$  である. ここで,  $u_w$  は  $u_w \in A_R(i)$  なる  $G$  のカット点で,  $w$  を含む  $u_w$ -成分が存在するものとする.

**補題 4.2**  $S_i, S_j \in \Psi' (i \neq j)$  に対して,  $S_j$  は  $S_i$  に融合可能とする. このとき,  $G'$  において  $S_i \cup S_j \subseteq Z'$  なる2成分  $Z'$  が存在する.

(証明)  $Z', Z_j$  を  $S_i \subseteq Z', S_j \subseteq Z_j$  なる  $G'$  における2成分とする. 仮定より,  $A_R(i) \subseteq Z'$  である. ここで  $R$  は  $S_i \cap R \neq \emptyset$  なる  $G$  の連結成分で  $S_i$  の2点を分離するカット点を持つものとする. もし  $|S'_j \cap A_R(i)| \geq 2$  ならば  $|Z' \cap Z_j| \geq 2$  となり  $Z' = Z_j$  である. 次に  $|S'_j \cap A_R(i)| = 1$  とする.  $S'_j - A_R(i) \neq \emptyset$  だから, 任意の  $w \in S'_j - A_R(i)$  に着目し,  $u_w \in A_R(i)$  を  $w$  を含む  $u_w$ -成分を持ち, 且つ  $(A_R(i) \cap S'_j) - \{u_w\} \neq \emptyset$  なる  $G$  のカット点とする. このとき  $Z_j$  は  $u_w$  と共に  $((A_R(i) \cap S'_j) - \{u_w\})$  内の点を含むので, やはり  $|Z' \cap Z_j| \geq 2$  となり  $Z' = Z_j$  である. (証明終)

**補題 4.2** の  $S_i, S_j \in \Psi'$  に対して  $\text{OPT}_v(G, \{S_i, S_j\}) = \text{OPT}_v(G, \{S_i \cup S_j\})$  である. 従って, このような  $S_i, S_j \in \Psi'$  が存在する限り,  $\Psi' \leftarrow \Psi' - \{S_i, S_j\}$ ,  $S_i \leftarrow S_i \cup S_j$ ,  $\Psi' \leftarrow \Psi' \cup \{S_i\}$  なる置換え操作を繰り返す. この結果, 改めて

$$\Psi'' = \{S_1, \dots, S_{n''}\}$$

とおく. 但し,  $n'' \leq n'$  且つ任意の  $S_i, S_j \in \Psi'' (i \neq j)$  に対して,  $S_j$  は  $S_i$  に融合可能ではない.  $\Psi''$  は  $O((n'')^2|V| + |E|)$  時間で求めることができる.

以上の議論から次の補題が成り立つ.

**補題 4.3**  $\text{OPT}_v(G, \Psi) = \text{OPT}_v(G, \Psi'')$ .

ところで  $|E'| = \text{OPT}_v(G, \Psi)$  ならば  $G'$  においては各  $S_i \in \Psi''$  を含む2成分が存在するが,  $S_i \cup S_j$  を含む2成分も存在し得る. 但し,  $S_i, S_j \in \Psi'', i \neq j$  である. すなわち,  $\Psi''$  がいくつかの部分族に分割され, 各部分族内の指定点集合の和集合に対して2VCA-SVの解が求められていることになる.

ここで  $I = \{1, \dots, n''\}$  とおく.  $I$  の部分集合  $I_1, \dots, I_k$  が  $I$  の類別であるとは次の条件が満たされることをいう:

(i)  $I_i \neq \emptyset (i = 1, \dots, k)$ ;

(ii)  $i \neq j$  ならば  $I_i \cap I_j = \emptyset$ ;

(iii)  $I_1 \cup \dots \cup I_k = I$ .

各  $I_i$  をこの類別の類と呼ぶ.  $\mathcal{D}_I$  を  $I$  のすべての類別の族とする.  $|\mathcal{D}_I|$  は Bell 指数と呼ばれ, 通常  $B_{n''}$  と表される. 例えば  $B_4 = 15$  である. 一般に

$$B_{k+1} = \frac{1}{e} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(p+1)^k}{p!} = \sum_{r=0}^k \binom{k}{r} B_r$$

である [1]. 各  $D = \{I_1, \dots, I_k\} \in \mathcal{D}_I$  に対して,

$$S_{I_j} = \bigcup_{r \in I_j} S_r \text{ (但し, } S_r \in \Psi''),$$

$$\Psi''_D = \{S_{I_j} \mid I_j \in D\}$$

と表す. これまでの議論をまとめて次の定理とする.

**定理 4.1**  $\text{OPT}_v(G, \Psi) = \min\{\text{OPT}_v(G, \Psi''_D) \mid D \in \mathcal{D}_I\}$ .

また, 各  $S_{I_j}$  に対して [20] の線形時間アルゴリズムを適用することによって, 2VCA-SVは最適に解くことができる. 補題 4.1, 4.2 を経由して2VCA-nSVを解くと,  $\Psi'$  の構成に要する  $O(n^2|V|)$  時間と  $\Psi''$  の構成に要する  $O((n'')^2|V| + |E|)$  時間及び Bell 指数に依存した計算時間が必要である. よって, 計算時間は  $O(n^2|V| + |E| + B_{n''} \cdot n''(|V| + |E|))$  となる. 一方,  $\Psi$  に対して定理 4.1 を利用して直接に2VCA-nSVを解くことも可能であり, 計算時間は  $O(B_n \cdot n(|V| + |E|))$  となる.  $n$  が大きくなるにつれて Bell 指数は極めて大きくなるので, 前者の方が高速であると思われる.

謝辞 本研究の一部は文部省科学研究費補助金 (C)08680371 及び (A)07308028 の援助を受けたことを記して謝意を表す.

## 参考文献

- [1] C. Berge, Principes de Combinatoire, DUNOD, 1968; C. ベルジュ(著) (野崎昭弘訳), 組合せ論の基礎, サイエンス社, 1982.
- [2] K.P. Eswaran and R.E. Tarjan, Augmentation problems, SIAM J. Comput., 5, pp.653-665, 1976.
- [3] S. Even, Graph Algorithms, Pitman, London, U.K., 1979.
- [4] A. Frank, Augmenting graphs to meet edge connectivity requirements, SIAM J. Discrete Math., 5(1), pp.25-53, 1992.
- [5] G.N. Frederickson and J. Ja'ja', Approximation algorithms for several graph augmentation problems, SIAM J. Comput., 10(2), pp.270-283, 1981.
- [6] J.E. Hopcroft and R.E. Tarjan, Dividing a graph into triconnected components, SIAM J. Comput., 2, pp.135-158, 1973.
- [7] T.-s. Hsu, On four-connecting a triconnected graph, Proc. 33rd Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, pp.70-79, 1992.
- [8] T.-s. Hsu, Undirected vertex-connectivity structure and smallest four-vertex-connectivity augmentation, Proc. 6th Intl. Symp. on Algorithms and Computation (ISAAC'95), (Lecture Notes in Computer Science #1004), pp.274-283, Springer-Verlag, Dec. 1995.
- [9] T.-s. Hsu and V. Ramachandran, A linear time algorithm for triconnectivity augmentation, Proc. 32th Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, pp.548-559, 1991.
- [10] T.-s. Hsu and V. Ramachandran, On finding a smallest augmentation to biconnect a graph, SIAM J. Comput., 22(5), pp.889-912, 1993.
- [11] T. Jordán, On the optimal vertex-connectivity augmentation, J. Combinatorial Theory, Series B, 63, pp.8-20, 1995.
- [12] T. Mashima, S. Taoka, and T. Watanabe, "Approximation algorithms for the  $k$ -edge-connectivity augmentation problem," Tech. Rep. of IEICE, COMP92-24, pp.11-20, July 1992.
- [13] 間島, 渡邊, グラフの指定点 3 点連結化問題に対する解法, 情報処理学会研究報告, 96-AL-49, pp.17-24, 1996-1.
- [14] 間島, 渡邊, グラフの指定点集合に対する 3 点連結化問題の解法, 電子情報通信学会論文誌, COMP96-1, pp.1-10, 1996-4.
- [15] H. Nagamochi and T. Ibaraki, Deterministic  $\tilde{O}(nm)$  Time Edge-Splitting in Undirected Graphs, Proc. 28th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, pp.64-73, 1996.
- [16] D. Naor, D. Gusfield and C.Martel, A fast algorithm for optimally increasing the edge-connectivity, Proc. 31st Annual IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, pp.698-707, 1990.
- [17] A. Rosenthal and A. Goldner, Smallest augmentations to biconnect a graph, SIAM J. Comput., 6(1), pp.55-66, 1977.
- [18] R.E. Tarjan, Data Structures and Network Algorithms, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, 1983.
- [19] W.T. Tutte, Connectivity in Graphs, University of Toronto Press, 1966.
- [20] 渡邊, 東, 中村, グラフの辺付加問題による耐故障ネットワークの構成, 電子情報通信学会論文誌, J73-A(7), pp.1242-1254, 1990.

- [21] T. Watanabe and A. Nakamura, Edge-connectivity augmentation problems, J. Comput. System Sci., 35(1), pp.96-144, 1987.
- [22] T. Watanabe and A. Nakamura, A minimum 3-connectivity augmentation of a graph, J. Comput. System Sci., 46, pp.91-128, 1993.

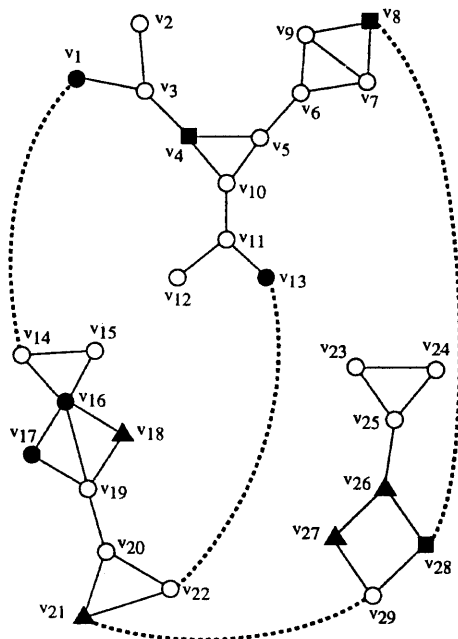


図 1: 2ECA- $n$ SV の例 ( $n = 3$ ). ここで  $\Psi = \{S_1, S_2, S_3\}$  とし, 黒丸, 黒三角, 黒四角はそれぞれ  $S_1, S_2, S_3$  を、太点線は最適解 (付加辺集合) の一例を表す。また, このとき, 最適解の辺数  $\text{OPT}_e(G, \Psi) = 4$  である。

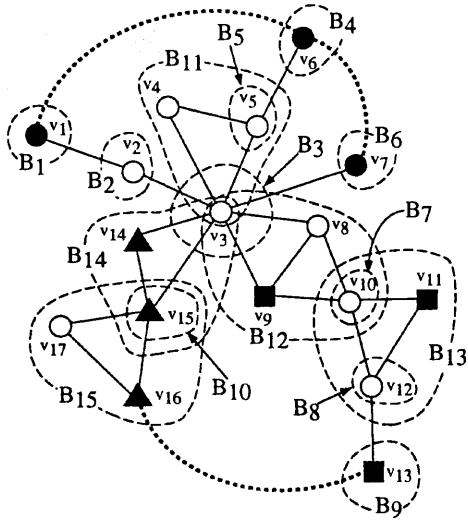


図 2: 2VCA- $n$ SV の例 ( $n = 3$ ). ここで  $\Psi = \{S_1, S_2, S_3\}$  とし, 黒丸, 黒三角, 黒四角はそれぞれ  $S_1, S_2, S_3$  を, 太点線は最適解の一例を表す.  $\text{OPT}_v(G, \Psi) = 3$  である. 一方,  $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$  において  $S$  に対して 2VCA-SV を考えると, その最適解の辺数  $\text{OPT}_v(G, \{S_1 \cup S_2 \cup S_3\}) = 4 = \text{OPT}_v(G, S_1) + \text{OPT}_v(G, S_2) + \text{OPT}_v(G, S_3) = 2 + 1 + 1$  である.

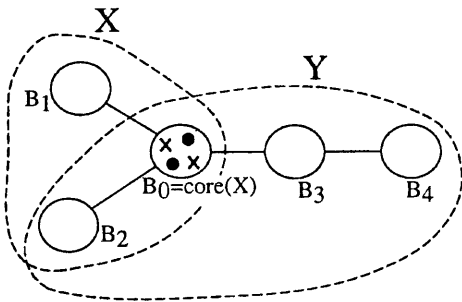


図 3:  $S_i \in \Psi'$  に関するタイプ 2 の葉  $X$  と  $S_j \in \Psi'$  ( $j = i$  もあり得る) に関するタイプ 2 の葉  $Y$ .  $X$  は  $S_j$  に関するタイプ 2 の葉でもある場合を示している.

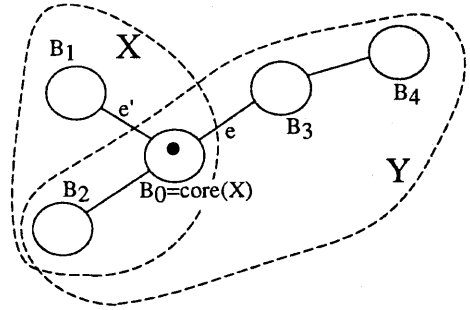


図 4: 補題 3.2(3) の証明における  $X \cap Y \neq \emptyset$  なる葉  $X$  と  $Y$ .

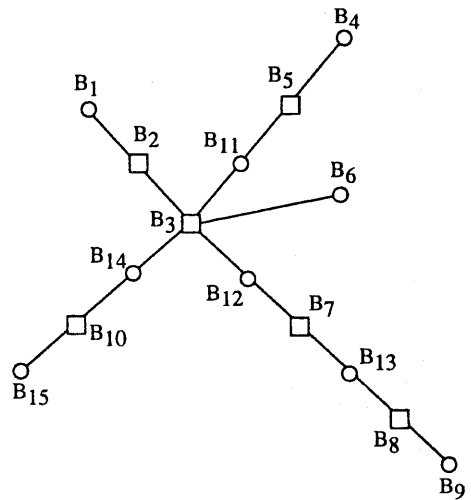


図 5: 図 2 のグラフ  $G$  に対するブロックグラフ  $BK_G$ . 四角は  $c$  点を表す.