アルゴリズム 56－5
（1997．3．14）

パーフェクト双向グラフに対する一般化安定集合問題とその多項式時間解法

田村 明久

電気通信大学

和文抄録: 双向グラフは無向グラフを一般化したもので、各辺はさらに両端点に正または負の符号を持っている。ここでは、無向グラフに対する最大重み安定集合問題を双向グラフに一般化した問題を扱う。この問題を一般化安定集合問題と呼ぶことにする。最大重み安定集合問題は、無向グラフがパーフェクトならば多項式時間で解けることが知られている。一方、パーフェクトという概念は双向グラフにも自然に拡張される。また、双向グラフがパーフェクトである必要十分条件は各辺を無向辺で置き換えて得られる無向グラフがパーフェクトとなることが示されている。本論文では、一般化安定集合問題が最大重み安定集合問題に帰着され、この帰着がパーフェクト性を保存することを示すことで、パーフェクト双向グラフに対するこの問題が多項式時間で解けることを示す。

The generalized stable set problem for bidirected graphs and polynomial time solvability for perfect cases

Akihisa Tamura

University of Electro-Communications

Abstract: Bidirected graphs are a generalization of undirected graphs. For bidirected graphs, we can consider a problem which is a natural extension of the maximum weighted stable set problem for undirected graphs. Here we call this problem the generalized stable set problem. It is well known that the maximum weighted stable set problem is solvable in polynomial time for perfect undirected graphs. Perfectness is naturally extended to bidirected graphs in terms of polytopes. Furthermore, it has been proved that a bidirected graph is perfect if and only if its underlying graph is perfect. In this paper, we show that the problem for any bidirected graph is reducible to the maximum weighted stable set problem for a certain undirected graph in time polynomial in the number of vertices, and moreover, prove that this reduction preserves perfectness.

1 はじめに

双向グラフ (bidirected graph) は、無向グラフを一般化したものである。双向グラフ $G=(V,E)$ は、頂点集合 V と辺集合 E から成り、各辺 $e\in E$ は2つの端点を持ち、さらに各端点では+または−の符号を持つグラフである。辺 $e\in E$ が頂点 $i\in V$ を端点として持つとき、e は i に接続

するという。辺 e の両端点が一致するときに e は自己ループと呼ばれる。双向グラフの辺は、その両端点の符号パターンから 3 種類に分類できる: ここでは両端点で符号+を持つ辺を $(+,+)$-辺、両端点で−を持つものを $(-,-)$-辺、異なる符号を持つものを $(+,-)$-辺 (または $(-,+)$-辺) と呼ぶことにする。無向グラフはすべての辺が $(+,+)$-辺であるような特殊な双向グラフとみなすことができる。

$G=(V,E)$ を無向グラフとし、 $\boldsymbol{w}=(w_i)_{i\in V}$ を頂点集合上の整数重みベクトルとする。最大重み安定集合問題は、 G の安定集合 S の中で重みの和 $\sum_{i\in S} w_i$ を最大とするものを求める問題である。ここで安定集合とは V の部分集合で任意の二要素間に辺が存在しないものである。この問題は双向グラフに自然に拡張でき、ここではそれを一般化安定集合問題と呼ぶことにする。最大重み安定集合問題は $\mathcal{NP}$-困難で、一般の無向グラフに対しては多項式時間解法は知られていない。しかし、幾つかの特殊なクラスに対しては多項式時間解法が知られていて、その一つにパーフェクト無向グラフがある [2]。一方、無向グラフのパーフェクト性は双向グラフに自然な形で拡張可能であり、次のような性質が成り立つ [3]。

定理 1. 双向グラフ G が単純で推移的であるとき、G がパーフェクトである必要十分条件は、G のすべての辺を $(+,+)$-辺に置き換えた無向グラフ $\underline{G}$ がパーフェクトである。

上記のことから、パーフェクト双向グラフに対して一般化安定集合問題が多項式時間で解けることが予想される。本発表の主題は、一般化安定集合問題がある無向グラフの最大重み安定集合問題に多項式時間で変換され、さらにこの変換がパーフェクト性を保存することを示すことでこの予想が正しいことを立証する。

2 一般化安定集合問題

$G=(V,E)$ を双向グラフとする。各頂点 $i\in V$ に x_i という変数を対応させ、頂点 $i,j\in V$ に接続する辺のタイプに応じて次のような不等式を考える:

$$\begin{array}{rll} x_i+x_j\le & 1 & (+,+)\text{-辺のとき} \\ -x_i-x_j\le & -1 & (-,-)\text{-辺のとき} \\ x_i-x_j\le & 0 & (+,-)\text{-辺のとき} \end{array}$$

G のすべての辺に対応した不等式からなる系を考え、この不等式系の解となる 0–1 ベクトルを G の 0–1 解と呼ぶ。もし G が無向グラフなら安定集合の指示ベクトルは G の 0–1 解となり、逆も成り立つ。

与えられた双向グラフ $G=(V,E)$ と V 上の整数重みベクトル $\boldsymbol{w}=(w_i)_{i\in V}$ に対して次のような問題を考える。

$$\text{最大化}\ \{\sum_{i\in V} w_i x_i \mid \boldsymbol{x}: G\text{ の } 0\text{–}1\text{ 解}\} \tag{2.1}$$

ここではこの問題を**一般化安定集合問題**と呼ぶ。明らかにこの問題は最大重み安定集合問題を特殊ケースとして含んでいる。

幾つかの異なる双向グラフが、(同一の 0–1 解集合を持つという意味で) 同じ一般化安定集合問題を定めることがある。このような双向グラフの中で標準的なものを考えるのは、議論をする意味でも問題を解くためにも有益である。ここでは、次の二つの条件を満たす双向グラフを標準的なものとして扱う。

推移性: 任意の二辺 $e_1 = \{i, j\}$ と $e_2 = \{j, k\}$ に対してこれらが j で異なる符号を持つとき、i, k に接続した辺 e_3 で両端点の符号が e_1, e_2 の符号と一致するようなものが存在する。

単純性: 自己ループや多重辺を持たない。

この二つの条件を満たす双向グラフを**閉**であると呼ぶことにする。Johnson と Padberg [4] は 0–1 解集合を本質的に変更することなく与えられた双向グラフを推移的でかつ単純であるように変形する (幾つかの頂点を除くこともある) かあるいは 0–1 解が存在しないことを判定することが頂点数に関する多項式時間で行なえることを示した。以下では、閉双向グラフのみを扱う。

3 パーフェクト双向グラフ

$G = (V, E)$ を閉双向グラフとする。V の交わりをもたない部分集合のペア (C^+, C^-) が以下の条件を満たすとき G の**双クリーク** (biclique) と呼ぶ:

(B1) $C^+ \cup C^-$ の二頂点間には辺が存在する

(B2) $C^+ \cup C^-$ の頂点 i, j を結ぶ辺 e について、もし $i \in C^+$ ならば e は i で+符号を持ち、もし $i \in C^-$ なら−符号を持つ。j についても同様。

もし G が無向グラフならば $(\emptyset, \{i\})$ であるような双クリーク以外では $C^- = \emptyset$ であり、これらは無向グラフのクリークと一致している。クリークは、V の部分集合で任意の二要素間に辺が存在するものである。条件 (B1) は、$C^+ \cup C^-$ が $\underline{G}$ でクリークになることを主張している。

さて双クリーク (C^+, C^-) に対応した以下のような不等式を考えよう。

$$\sum_{i \in C^+} x_i + \sum_{i \in C^-} (1 - x_i) \leq 1$$

これは (C^+, C^-) に対する**双クリーク不等式**と呼ばれている。双クリーク $(\emptyset, \{i\})$ に対する不等式は $x_i \geq 0$ であり、いわゆる非負制約である。G が無向グラフのときは、これ以外の双クリーク不等式は $C^- = \emptyset$ より、クリーク不等式と呼ばれるものになる。任意の安定集合と任意のクリークは高々一つしか頂点を共有しないので安定集合の指示ベクトルはすべてのクリーク不等式を満たす。同様に以下のことが成り立つ。

補題 2 ([4]): 閉双向グラフ G の任意の 0–1 解はすべての双クリーク不等式を満たす。

パーフェクト双向グラフを定義する前に閉双向グラフ $G = (V, E)$ に対して二つの多面体 $P(G)$ と $Q(G)$ を次ぎように定義しよう。

$$\begin{aligned} P(G) &= \mathrm{conv}\{\boldsymbol{x} \in R^V \mid \boldsymbol{x} \text{ は } G \text{ の 0–1 解}\} \\ Q(G) &= \{\boldsymbol{x} \in R^V \mid \boldsymbol{x} \text{ は } G \text{ のすべての双クリーク不等式を満たす}\} \end{aligned}$$

ここで、conv は凸包を意味する。すなわち $P(G)$ は G の 0–1 解全体の凸包である。補題 2から $P(G) \subseteq Q(G)$ が成り立ち、一般にこれらが一致するとは限らない。上記のことから G が無向グラフの場合は $Q(G)$ はすべてのクリーク不等式と各変数の非負制約で記述される多面体になる。ここでは本来のパーフェクト無向グラフの定義は省略するが、パーフェクトグラフには次のような多面体を用いた特徴付けが知られている。

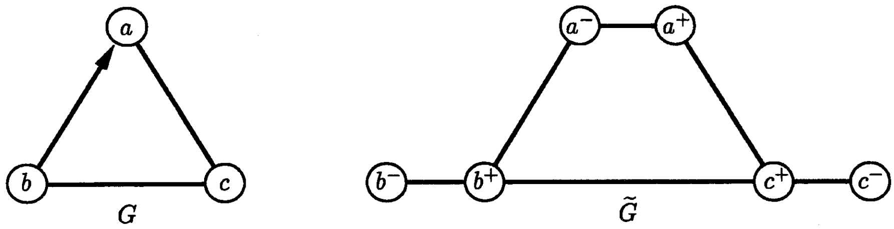

図 1: G と$\widetilde{G}$

定理 3 ([1]): 無向グラフ G がパーフェクトであるための必要十分条件は $P(G)=Q(G)$ である。

この特徴付けを利用して双向グラフに対するパーフェクト性を以下のように定義する。双向グラフが閉でありかつ $P(G)=Q(G)$ を満たすときパーフェクト (perfect) と呼ぶ。パーフェクト双向グラフには先に紹介した定理 1のような特徴付けが知られている。

4 多項式時間解法

与えられた閉双向グラフ $G=(V,E)$ に対して、次のように定義される無向グラフ $\widetilde{G}=(V^+\cup V^-,\widetilde{E})$ を考える:

$$\begin{aligned} V^+ &= \{v^+ \mid v\in V\}\\ V^- &= \{v^- \mid v\in V\}\\ \widetilde{E} &= \{\langle v^+,v^-\rangle \mid v\in V\}\cup\{\langle u^\alpha,v^\beta\rangle \mid G \text{ に } u,v \text{ に接続する } (\alpha,\beta)\text{-辺が存在}\} \end{aligned}$$

V^+,V^- は V の二つのコピーであり、 α,β は+または−の符号であるとする。図 1では、 G において辺 $\langle b,a\rangle$ は $(+,-)$-辺、 $\langle b,c\rangle,\langle a,c\rangle$ が $(+,+)$-辺であることを表している。この場合、無向グラフ $\widetilde{G}$ は図 1のようになる。このとき次ような性質が成り立つ。

定理 4. 閉双向グラフ G に対して、

$$G:\text{パーフェクト} \iff \widetilde{G}:\text{パーフェクト}$$

補題 5. $\boldsymbol{x}$ が G の 0–1 解ならば、

$$y_{v^+}=x_v,\quad y_{v^-}=1-x_v \quad (v\in V)$$

として定義される $V^+\cup V^-$ 上の 0–1 ベクトル $\boldsymbol{y}$ は $\widetilde{G}$ の (包含関係の意味で) 極大な安定集合の指示ベクトルである。

逆に $\boldsymbol{y}$ が $\widetilde{G}$ の極大な安定集合の指示ベクトルならば V^+ への制限 $\boldsymbol{y}_{V^+}$ は G の 0–1 解である。//

この補題から G と $\boldsymbol{w}$ に対する一般化安定集合問題 (2.1) は、以下のような問題と等価となる。

$$\text{最大化}\,\{\sum_{i\in V} w_i y_{i^+} \mid \boldsymbol{y}:\widetilde{G}\text{ の極大安定集合}\} \tag{4.1}$$

このままでは条件に‘極大な’安定集合という条件が入っている。(4.1) の‘極大な’という条件を外した問題での最適な安定集合が必ずしも極大であるとは限らないが、次の性質を用いると問題 (4.1) を $\widetilde{G}$ に対する最大重み安定集合問題に簡単に変換できる。

補題 6. 任意の $v \in V$ に対して、$\widetilde{G}$ の極大安定集合は v^+ または v^- の一方のみを必ず含む。

ここで次のように定義される $V^+ \cup V^-$ 上の重みベクトル $\tilde{\boldsymbol{w}} = (\tilde{w}_i)_{i \in V^+ \cup V^-}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{w}_{v^+} &= \begin{cases} w_v & (w_v \geq 0) \\ 0 & (w_v < 0) \end{cases} \\
\tilde{w}_{v^-} &= \begin{cases} 0 & (w_v \geq 0) \\ -w_v & (w_v < 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

に対する $\widetilde{G}$ 上の最大重み安定集合問題

$$
\text{最大化}\left\{ \sum_{i \in V^+} \tilde{w}_i y_i + \sum_{i \in V^-} \tilde{w}_i y_i \;\middle|\; \boldsymbol{y} : \widetilde{G} \text{の安定集合} \right\} \tag{4.2}
$$

を考える。補題 6から、(4.2) の目的関数値はちょうど $\sum\{-w_v \mid w_v < 0\}$ だけ (4.1) の目的関数値より大きい。さらに、$\tilde{\boldsymbol{w}}$ は非負ベクトルであるから、(4.2) には必ず最適となるような極大安定集合が存在し、(4.2) の任意の最適解から極大であるものを作るのも容易である。以上の問題変換、定理 4と最大重み安定集合問題に対する Grötschel-Lovász-Schrijver の多項式時間解法 [2] を組み合わせるとパーフェクト双向グラフに対する一般化安定集合問題は入力サイズの多項式時間で解けることが示せる。

定理 7. パーフェクト双向グラフに対する一般化安定集合問題は入力サイズの多項式時間で解ける。

5 おわりに

ここでは、次の二つのことを示した。

- 任意の一般化安定集合問題がある無向グラフの最大重み安定集合問題に変換できる。
- この変換はパーフェクト性を保存する。

第一の主張からこれら二つの問題は等価であるが、問題を定式化するためには一般化安定集合問題の方が最大重み安定集合問題よりも優れている。そのため、応用上は一般化安定集合問題で定式化を試みて最大重み安定集合問題に変換すると良いだろう。また、一見頂点数が倍になり問題が大きくなるように見えるが、$v \in V$ に対して、$\tilde{w}_{v^+}, \tilde{w}_{v^-}$ の少なくとも一方は 0 であり、このような頂点は (4.2) を解く際には取り除いても影響はない。すなわち、頂点数は変わらず、(問題が容易になったとは言えないが) むしろ辺数が減った問題となる。4 節の証明等は、[6] を参照されたい。

また、論文 [5] では定理 1と同様の結果を証明するために一般化安定集合問題の最大重み安定集合問題への別な変換を示している。ただしこの変換がパーフェクト性を保存することを [5] では直接は述べられていない。

参考文献

[1] Chvátal, V. (1975), "On certain polytopes associated with graphs," *Journal of Combinatorial Theory (B)*, **18**, 138–154.

[2] Grötschel, M., Lovász, L. and Schrijver, A. (1988), *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, Berlin.

[3] Ikebe, Y. T. and Tamura, A. (1996), "Perfect bidirected graphs," Report CSIM96–2, Department of Computer Science and Information Mathematics, University of Electro-Communications, Tokyo.

[4] Johnson, E. L. and Padberg, M. W. (1982), "Degree-two inequalities, clique facets, and biperfect graphs," *Annals Discrete Mathematics*, **16**, 169–187.

[5] Sewell, E. C. (1996), "Binary integer programs with two variables per inequality," *Mathematical Programming*, **75**, 467–476.

[6] Tamura, A. (1996), "Perfect (0,±1)-matrices and perfect bidirected graphs," Report CSIM96–07, Department of Computer Science and Information Mathematics, University of Electro-Communications, Tokyo.