

ラインダイグラフ演算の一般化と同型因子分解

河合博之 柴田幸夫

群馬大学工学部情報工学科
〒 376 群馬県桐生市天神町 1-5-1

要旨

ダイグラフ上の演算であるラインダイグラフ演算は相互結合網の設計に対し有用であることが知られている。例えば、de Bruijn ダイグラフ、Kautz ダイグラフは完全ダイグラフのラインダイグラフ演算によって得られる。本研究ではラインダイグラフ演算の一般化である out-ラインダイグラフを提案し、その性質について述べる。さらに、out-ラインダイグラフのラインダイグラフによる同型因子分解の性質を de Bruijn や Kautz ダイグラフに応用し、いくつかの結果を導く。

A Generalization of Linedigraph Operation and its Application to Isomorphic Factorization of Digraphs

Hiroyuki Kawai and Yukio Shibata

*Department of Computer Science, Faculty of Engineering,
Gunma University*

1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu, Gunma, 376 Japan
e-mail: {kawai,shibata}@msc.cs.gunma-u.ac.jp

Abstract

The Line digraph operation as an operation for directed graphs is known to be useful to construct interconnection networks. For example, de Bruijn digraphs and Kautz digraphs are obtained from the line digraph operation applied to two types of complete digraphs. In this paper, we introduce a generalization of the line digraph operation, called the out-linedigraph operation, and consider its properties. Furthermore, we investigate the divisibility of the out-linedigraph by the linedigraph of a given digraph, and apply the results to de Bruijn digraphs and Kautz digraphs.

1 序論

超並列計算機の設計に関し、計算機の連結方法としての相互連結網の選択は重要な問題である。相互連結網はグラフ、または有向グラフ（以下ダイグラフ）として表現される。プロセッサはグラフの頂点、コミュニケーションリンクはグラフの辺で置換えられモデル化されている。

ラインダイグラフ演算は相互結合網を構築する上で有用な方法であることが知られている [5]。実際、de Bruijn ダイグラフと Kautz ダイグラフはそれぞれ異なる種類の完全ダイグラフにラインダイグラフ演算を施すことにより得られる。de Bruijn ダイグラフ $B(d, D)$ と Kautz ダイグラフ $K(d, D)$ は次数 d と直径 D が与えられたときより多くの頂点と連結できるダイグラフのクラスであり直径と次数による連結可能な最大数の上限 (Moor bound と呼ばれる) に近いことが示されている [5]。

本研究では、ラインダイグラフ演算について着目し、その一般化となる演算を提案する。そして、性質、特に同型因子分解やラインダイグラフ演算、クロネッカー積との関係について考察を行なう。

ダイグラフ G のラインダイグラフを $L(G)$ と表記する。 $L(G)$ の頂点集合は G の弧 (有向辺) 集合に対応し、それらの隣接条件は G に依存する。我々はこの隣接条件を一般化することによりラインダイグラフ演算の一般化を行なう。

2 定義と表記

ここで扱うダイグラフは自己ループを許すが、多重辺を許さないものとする。完全ダイグラフ K_n^0 とは全ての二頂点間に弧が存在するダイグラフ (自己ループを含む) である。完全対称ダイグラフ K_n^* とはすべての異なる二頂点間に弧が存在するダイグラフである。完全対称 m 等部 n 部ダイグラフ $K_{n(m)}^*$ とは、頂点集合が n 個の濃度 m の部分集合に分割され同じ分割集合間の頂点は隣接せず、異なる分割集合間の二頂点間には二重辺 (双方向の弧) が存在するようなダイグラフである。図 1 に完全ダイグラフ、完全対称ダイグラフ、完全対称 m 等部 n 部ダイグラフをそれぞれ例示する。

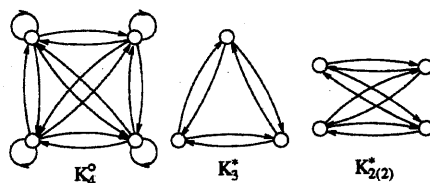


図 1: 完全ダイグラフ

頂点 v から隣接している頂点集合は $\Gamma^+(v)$ で表され、 v に隣接している頂点集合は $\Gamma^-(v)$ で表現される。頂点 v の出次数とは $deg^+v = |\Gamma^+(v)|$ 、入次数とは $deg^-v = |\Gamma^-(v)|$ である。特に全ての頂点の出 (入) 次数が等しいとき出 (入) 正則と呼ばれる。出正則でありかつ入正則であるダイグラフは単に正則ダイグラフという。 $deg^+v = 0$ の頂点 v はシンクと呼ばれ、 $deg^-v = 0$ の頂点はソースと呼ばれる。弱連結ダイグラフ G は G の頂点集合を任意の空ではない二つの集合に分割したとき必ず分割集合間に弧が存在するダイグラフである。強連結ダイグラフとは任意の 2 頂点間に有向道が存在することであり、ダイグラフ G の直径 $diam(G)$ は強連結ダイグラフに対して次のように定義される。 $diam(G) = \max_{u,v \in V(G)} [u \text{ から } v \text{ の最短道の長さ}]$

ダイグラフ G の因子 H とは G の全域部分ダイグラフのことであり、 H は $V(G) = V(H), E(H) \subseteq E(G)$ を満足するダイグラフである。 G が $[H_1, H_2, \dots, H_k]$ で因子分解されるとは、 $V(G) = V(H_i), i = 1, 2, \dots, k, E(G) = E(H_1) \cup E(H_2) \cup \dots \cup E(H_k), E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset, i \neq j$ のときをいう。特に、各因子がすべて H に同型である時は、 H は G を同型因子分解する、あるいは H は G を割り切るという、 $H | G$ と書く。

ラインダイグラフ演算はダイグラフに対する演算であり、ある与えられたダイグラフの変換を行なう。ダイグラフ G に対してラインダイグラフ $L(G)$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} V(L(G)) &= E(G) \\ E(L(G)) &= \{((u, v), (v, w)) | (u, v), (v, w) \in E(G)\} \end{aligned}$$

ラインダイグラフ演算の特徴として、 d -出正則ダイグラフ G のラインダイグラフ

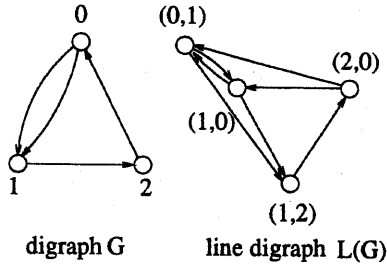


図 2: ラインダイグラフ

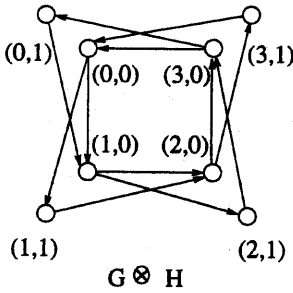
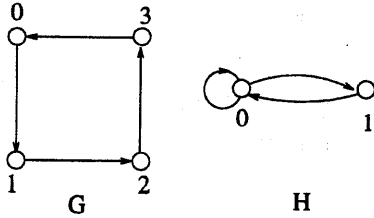


図 3: クロネッカー積

$L(G)$ も d -出正則であることやサイクルを除く強連結ダイグラフのラインダイグラフは直径が1増加することなどが挙げられる。詳細は [1][5][6] を参照。ラインダイグラフの例を図 2 に示す。この図でわかるように $L(G)$ の各頂点は G の各弧に対応しており隣接関係は、例えば、頂点 $(0,1)$ は頂点 $(1,0), (1,2)$ に隣接している。

クロネッカー積はダイグラフの二項演算であり、ダイグラフ G, H に対しクロネッカー積 $G \otimes H$ は次のように定義される。

$$V(L(G \otimes H)) = V(G) \times V(H)$$

$$E(L(G \otimes H)) = \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mid (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in E(G)\}$$

共通の頂点集合を持ち、弧集合が互いに素であるダイグラフ G, H に対し弧和 $G \oplus H$

は次のように定義される。

$$V(L(G \oplus H)) = V(G) \cup V(H)$$

$$E(L(G \oplus H)) = E(G) \cup E(H)$$

3 out- ラインダイグラフ演算

ここでは、ラインダイグラフ演算の一般化となる out-ラインダイグラフ演算を導入しその性質を考察する。

3.1 out- ラインダイグラフの定義

ラインダイグラフの一般化として、ラインダイグラフの隣接関係を次のように変えた out-ラインダイグラフを定義する。

定義 3.1 out-ラインダイグラフ $OL(G)$
ダイグラフ G に対し out-ラインダイグラフ $OL(G)$ は次のように定義される。

$$V(OL(G)) = E(G)$$

$$E(OL(G)) = \{((u, v), (w, x)) \mid (u, v), (w, x), (u, w) \in E(G)\}$$

ラインダイグラフ演算との相違点は隣接関係が弱く定義されていることにある。 $v = w$ のとき、ラインダイグラフと同じ定義となる。したがって $L(G)$ は $OL(G)$ の全域部分ダイグラフである。 $OL(G)$ の頂点集合は $A_u = \{(u, v) \mid (u, v) \in E(G)\}$ なる頂点集合で分割される。 $\bigcup_{u \in V(G)} A_u = E(G), A_u \cap A_v = \emptyset, (u \neq v)$ を満たし、 $OL(G)$ 上で、 $x, y \in A_u$ なる二頂点は同じ振舞いをする。つまり、 $\Gamma^+(x) = \Gamma^+(y), \Gamma^-(x) = \Gamma^-(y)$ が成立している。この関係が out-ラインダイグラフの持つ特徴である。図 4 に out-ラインダイグラフの例を挙げる。頂点 $(0,1)$ と $(0,2)$ は $OL(G)$ 上で同じ振舞いをしている。点線はラインダイグラフには存在しない弧である。

3.2 基本的性質

まずはじめに out-ラインダイグラフのオーダーとサイズ、次数をそれぞれ示す。

命題 3.1 G をオーダー p 、サイズ q のダイグラフとすると、

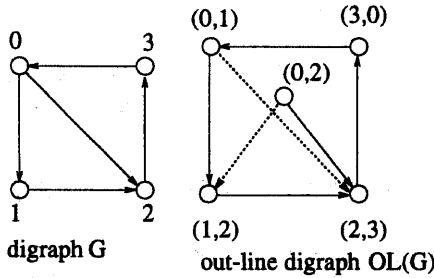


図 4: out-ラインダイグラフ

- (i) $OL(G)$ はオーダー q 、
サイズ $\sum_{uv \in E(G)} deg^+u \cdot deg^+v$
- (ii) $OL(G)$ の頂点 (u, v) は
出次数 $\sum_{uw \in E(G)} deg^+w$
入次数 $\sum_{wu \in E(G)} deg^+w$
である。

したがって、オーダー p 、 d -出正則ダイグラフのout-ラインダイグラフはオーダー nd 、 d^2 -出正則である。

ラインダイグラフ演算はダイグラフのクラスとして有向サイクルやde Bruijnダイグラフのクラスを保存している。out-ラインダイグラフ演算は例えば、次のクラスを保存する。

- (i) $OL(K_n^0) \cong K_n^0$
 - (ii) $OL(K_{n(m)}^*) \cong K_{n(m^2n-m^2)}^*$
- ラインダイグラフ演算では $L(G)$ が強連結である必要十分条件は G が強連結であることであるが、out-ラインダイグラフの連結性については次の命題が成り立つ。

定理 3.1 G を孤立点を持たないダイグラフとすると、 $OL(G)$ が強連結であるための必要十分条件は
 $OL(G)$ の任意の頂点 (u, v) で、 u が v に到達可能でなければ $\Gamma^-(u) \neq \emptyset$ であり、かつ $\forall x \in \Gamma^-(u)$ を満たす x が v に到着可能であることである。

この定理により、弱連結であるダイグラフ G のout-ラインダイグラフが強連結となる場合が存在することがわかる。

out-ラインダイグラフにはさらに、クロネッカー積との密接な関係が存在する。ここで、 $G \prec H$ はダイグラフ G がダイグラフ H から $V(G)$ によって導出される誘導部分グラフであることを示す。

定理 3.2 G をダイグラフとし、最大次数を Δ すると、

$$OL(G) \prec G \otimes K_\Delta^0$$

が成立する。

定理 3.2の系として、 d -出正則ダイグラフに対しては次の強い関係がある。

系 3.1 G を d -出正則ダイグラフとすると、

$$OL(G) \cong G \otimes K_d^0$$

が成立する。

3.3 out-ラインダイグラフと同型因子分解

$L(G)$ が $OL(G)$ の因子であることは定義より明らかであるが、out-ラインダイグラフの最も大きな特徴としてラインダイグラフを同型因子として持つ場合がある。

定理 3.3 d を正整数、 G を弱連結ダイグラフとする。このとき、 G の任意の頂点 v が

- (i) $deg^+v = d$
 - (ii) $\forall x \in \Gamma^+(v)$ なる x がシンク
 - (iii) v がシンク
- のいずれかを満たす時

$$L(G) \mid OL(G)$$

である。

系 3.2 G を d -出正則ダイグラフとすると、 $L(G) \mid OL(G)$ である。

図 5にはラインダイグラフによるout-ラインダイグラフの同型因子分解の例を示す。ここで、 $OL(G)$ は $[H_1 \cong L(G), H_2, H_3]$ によって同型因子分解される。

ダイグラフ G が d -出正則であるときは、 $OL(G)$ はクロネッカー積で表せることを見たが、次の補題によりout-ラインダイグラフの別の同型因子分解について考察する。

補題 3.1 ダイグラフ H が $[H_1, H_2]$ で同型因子分解されるとする。このとき次が成立する。ダイグラフ G で

$$G \otimes H \cong (G \otimes H_1) \oplus (G \otimes H_2)$$

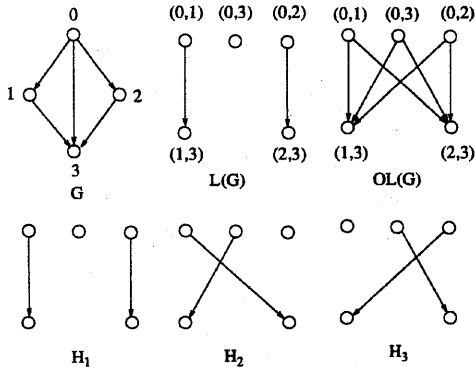


図 5: ラインダイグラフによる out-ラインダイグラフの同型因子分解

命題 3.2 G を d -出正則ダイグラフとする。 G の因子分解を $[G_1, G_2, \dots, G_k]$ とし、 K_d^0 の因子分解を $[H_1, H_2, \dots, H_l]$ とすると、 $G_i \otimes H_j$ ($1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l$) は $OL(G)$ の因子である。

出オクトパス Oct_n^+ は、オーダー n であり、一つの頂点から他のすべての頂点 (自分自身を含む) へ弧をもつダイグラフである。 \bar{C}_n は全ての頂点 v が $deg^+v = deg^-v = 1$ となる強連結ダイグラフをいう。 $Oct_2^+ | K_2^0$ 及び $\bar{C}_3 | K_3^*$ であるから、補題 3.2 を用いれば、 $K_{3(2)}^* \cong OL(K_3^*)$ は $K_3^* \otimes Oct_2^+$ と $\bar{C}_3 \otimes K_2^0$ によりそれぞれ同型因子分解される。

図 6 は $OL(K_3^*) \cong K_{3(2)}^*$ であり、図 7 は $K_{3(2)}^*$ の異なる三つの同型因子分解を示している。(a) はラインダイグラフ、(b) は $K_3^* \otimes Oct_2^+$ 、(c) は $\bar{C}_3 \otimes K_2^0$ による同型因子分解である。

G, H をダイグラフとすると、[12] によりラインダイグラフ演算とクロネッカー積は分配法則

$$L(G \otimes H) \cong L(G) \otimes L(H)$$

を満足することが示されているが、out-ラインダイグラフ演算とクロネッカー積に関しても全く同様の議論によって分配法則が満足される。

命題 3.3 ダイグラフ G, H に対して

$$OL(G \otimes H) \cong OL(G) \otimes OL(H)$$

この分配則より次の系が成り立つ。

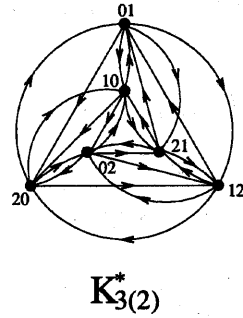
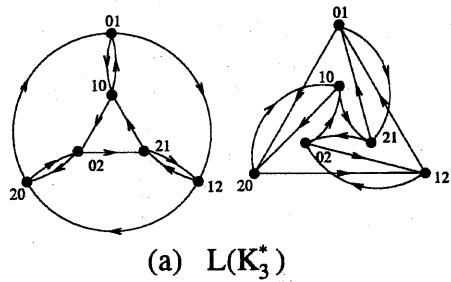
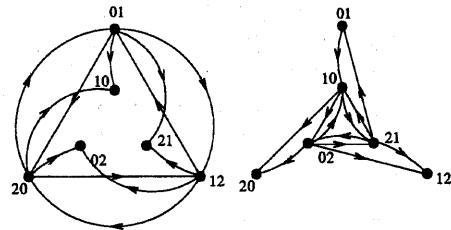


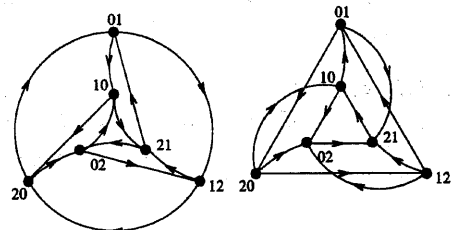
図 6: 完全対称 2 等部 3 部ダイグラフ



(a) $L(K_3^*)$



(b) $K_3^* \otimes Oct_2^+$



(c) $\bar{C}_3^* \otimes K_2^0$

図 7: 異なるダイグラフによる out-ラインダイグラフの同型因子分解

系 3.3 ダイグラフ G, H に対して

$$L(G) \otimes L(H) \mid OL(G \otimes H)$$

4 de Bruijn ダイグラフ、 Kautz ダイグラフ及びバタ フライネットワークへの応用

de Bruijn ダイグラフ $B(d, D)$ は頂点集合として、長さ D の d 文字よりなる文字列の集合をもつ。頂点 (x_1, x_2, \dots, x_D) は頂点 $(x_2, \dots, x_D, \alpha)$ に隣接する (α は任意の文字)。同様に Kautz ダイグラフ $K(d, D)$ は頂点集合として、長さ D の $d+1$ 文字よりなる文字列の集合をもつ。ただし隣合う文字は異なる。隣接条件は de Bruijn ダイグラフと同じである。 n 次元 k 進有向バタフライ $\vec{b}(k, n)$ は頂点集合として $\{(x_1, x_2, \dots, x_n, l) \mid 0 \leq x_i \leq k-1, 0 \leq l \leq n\}$ を持ち、頂点 $(x_1, x_2, \dots, x_n, l)$ は頂点 $(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_l, \dots, x_n, l+1)$ (\bar{x} は x と異なる文字) に隣接する。

de Bruijn ダイグラフ $B(d, D)$ や Kautz ダイグラフ $K(d, D)$ は次のラインダイグラフ演算による定義が知られている [4]。ここで、 $L^k(G)$ はダイグラフ G にラインダイグラフ演算を k 回施した結果得られるダイグラフであり、反復ラインダイグラフとよばれる。

$$\begin{aligned} L^{D-1}(K_d^0) &\cong B(d, D) \\ L^{D-1}(K_{d+1}^*) &\cong K(d, D) \end{aligned}$$

[12] による次の命題 4.1 と系 3.2 によって反復ラインダイグラフによる同型因子分解を示すことが出来る。

命題 4.1 [12]

G_1, G_2, H_1, H_2 を $G_1 \mid H_1, G_2 \mid H_2$ を満足するダイグラフとすと、 $G_1 \otimes G_2 \mid H_1 \otimes H_2$ が成立する。

定理 4.1 G を d -出正則ダイグラフとすると、

$$L^n(G) \mid L^{n-m}(G) \otimes K_{d^m}^0$$

が成立する。

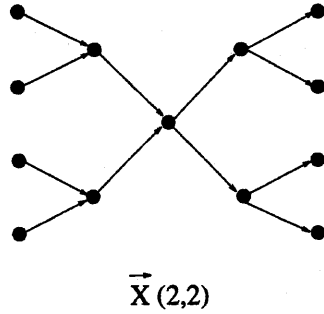


図 8: 有向 X-tree $\vec{X}(2, 2)$

証明

m に関する帰納法により証明する。はじめに $m = 1$ の場合を考える。 G は d 出正則であるから $L(G)$ も d 出正則である。したがって、 $L(L^{k-1}(G)) \mid OL(L^{k-1}(G)) \cong L^{k-1}(G) \otimes K_d^0$ がいえ、 $m = 1$ では成立する。次に $m = k$ で命題が成り立つと仮定すれば、 $L^{n-k}(G) \mid L^{n-k-1}(G) \cong K_d^0$ を得る。命題 4.1 より両側に $K_{d^k}^0$ を掛けると

$$L^{n-k}(G) \otimes K_{d^k}^0 \mid L^{n-k-1}(G) \otimes K_{d^{k+1}}^0$$

となり $L^n(G) \mid L^{n-k}(G) \otimes K_{d^k}^0$ がいえる。■

いま、この命題 4.1 と

$$\begin{aligned} K_m^0 \otimes K_n^0 &\cong K_{mn}^0 \\ K_m^* \otimes K_n^0 &\cong K_{m(n)}^* \end{aligned}$$

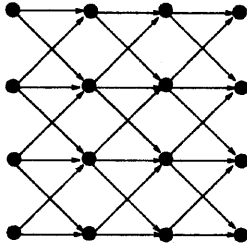
という事実より次の系 4.1 を得る。

系 4.1

- (i) $B(d, D) \mid K_{dD}^0$
- (ii) $K(d, D) \mid K_{d+1(dD-1)}^*$

系 4.1 の (i) は [11] によって示された結果であるが、(ii) は新しい結果である。系 4.1 からは、de Bruijn ダイグラフは完全ダイグラフを同型因子分解するのに対し、Kautz ダイグラフは完全対称 m 等部 n 部ダイグラフを同型因子分解することがわかる。これは図 7(a) にも示された結果である。

[10] では有向バタフライとラインダイグラフとの関係が次のように示された。ここで、有向 X 木 $\vec{X}(k, r)$ は高さ r の完全 k 分出木と完全 k 分入木の二つの根を同一視して構成されるダイグラフである (図 8)。



$$\vec{P}_3 \otimes K_4^0$$

図 9: パスと完全ダイグラフのクロネッカー積

定理 4.2 [10]

$$\vec{b}(k, r) \cong L^r(\vec{X}(k, r))$$

この定理の見方を変えれば、有向バタフライは長さ D の有向パス \vec{P}_{D+1} と de Bruijn ダイグラフのクロネッカー積としてつぎのように表現出来る。

命題 4.2 有向バタフライ $\vec{b}(d, D)$ に対して次が成り立つ。

$$\vec{b}(d, D) \cong \vec{P}_{D+1} \otimes B(d, D)$$

系 4.2

$$\vec{b}(d, D) \cong L^{D-1}(\vec{P}_{2D} \otimes K_d^0)$$

有向パスと完全ダイグラフのクロネッカー積の例を図 9 に示す。

系 4.1 の (i) と命題 4.2 を用いてバタフライネットワークが同型因子となるような次の結果を得る。

系 4.3

(i) $\vec{b}(d, D) \mid \vec{P}_{d+1} \otimes K_{d^D}^0$

(ii) d が奇数のとき

$$\vec{b}(d, D) \mid K_{d+1}^*(d^D)$$

系 4.3(ii) はオーダーが偶数である無向完全グラフが無向パスで同型因子分解されることから完全対称ダイグラフが有向パスに同型因子分解されることにより示すことができる。

5 まとめ

本研究では、ラインダイグラフ演算の一般化を隣接関係を変更することによって導入した。out-ラインダイグラフはクロネッカー積や同型因子分解と深い関わりを持つ演算であることや、ラインダイグラフが out-ラインダイグラフを同型因子分解する条件を示した。また、それらの応用として、de Bruijn ダイグラフは完全ダイグラフを、Kautz ダイグラフは完全対称 m 等部 n 部ダイグラフをそれぞれ同型因子分解することを導いた。前者は既存の結果であるのに対し後者は同型因子分解の新しい結果である。これら二つの同型因子分解に関する議論と同じように有向バタフライが de Bruijn ダイグラフと有向パスのクロネッカー積で表現できることを用いてバタフライによる同型因子分解を示した。

本研究では out-ラインダイグラフというラインダイグラフ演算の一般化を提案したが、out-ラインダイグラフ演算に対する出次数の議論を入次数に置き換えた in-ラインダイグラフも同様に定義できる。

謝辞

本研究の一部は(財)テレコム先端技術研究支援センター(SCAT)の助成のもとに行なわれた。感謝する次第である。

参考文献

- [1] M. Aigner, On the linegraph of a directed graph, Math. Z., 102 (1967) 56-61.
- [2] J-C. Bermond and C. Peyrat, de Bruijn and Kautz networks: a competitor for the hypercube?, In F. André and J. P. Verjus, eds., *Hypercube and Distributed Computers*, Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland (1989) 279-293.
- [3] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs, Sec. ed.*, Wadsworth and Brooks/Cole, Monterey (1986).

- [4] M. A. Fiol, I. Alegre and J. L. A. Yebra, Line digraph iterations and the (d,k) problem for directed graphs, *Proc, 10th Int. Symp. Computer Architectures* (1983) 174-177.
- [5] M. A. Fiol, J. L. A. Yebra and I. A. de Miquel, Line digraph iterations and the (d,k) -digraph problem, *IEEE Trans. Comput.* C-33,5 (1984) 400-403.
- [6] F. Harary and R. Z. Norman, Some properties of line digraphs, *Rend. Circ. Mat. Palermo*(2), 9 (1960) 161-168.
- [7] F. Harary, R. W. Robinson and N. C. Wormald, Isomorphic factorisations I: complete graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 242 (1978) 243-260.
- [8] F. Harary, R. W. Robinson and N. C. Wormald, Isomorphic factorisations V: directed graphs, *Mathematica*, 25 (1978) 279-285.
- [9] F. Harary and R. W. Robinson, Isomorphic factorisations X : unsolved problems, *J. Graph Theory*, 9 (1985) 67-86.
- [10] T. Hasunuma and Y. Shibata, Containment of butterflies in networks constructed by the line digraph operation, *Information Processing Letters*, 61 (1997) 25-30.
- [11] Y. Shibata and Y. Gonda, Extension of de Bruijn graphs and Kautz graphs, *Computers and Mathematics with Applications*, 30 (1995) 51-61.
- [12] Y. Shibata, T. Hasunuma and S. Fukuda, Isomorphic factorization of extended de Bruijn digraphs, submitted.