

反復ラインダイグラフの一般化と de Bruijn ダイグラフへの応用

河合博之 柴田幸夫

群馬大学工学部情報工学科
〒 376-8515 群馬県桐生市天神町 1-5-1

要旨

ラインダイグラフ演算を複数回ほどこして得られるダイグラフは反復ラインダイグラフと呼ばれる。相互結合網として有用な性質を持つ de Bruijn ダイグラフ及び Kautz ダイグラフは反復ラインダイグラフによっても定義される。本報告では反復ラインダイグラフの一般化を提案し、その応用として de Bruijn ダイグラフと Kautz ダイグラフの一般化となるようなダイグラフのクラスを定義する。これらの一般化されたダイグラフは同型因子として de Bruijn ダイグラフ及び Kautz ダイグラフをそれぞれ持つことが示されている。

Generalization of iterated line digraphs with applications to de Bruijn digraphs

Hiroyuki Kawai and Yukio Shibata

Department of Computer Science, Faculty of Engineering,
Gunma University

1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu, Gunma, 376-8515 Japan

e-mail: {kawai,shibata}@msc.cs.gunma-u.ac.jp

abstract

Digraphs obtained from application of iterated line digraph operations are called iterated line digraphs. De Bruijn digraphs and Kautz digraphs have many useful properties as interconnection networks, and they are defined from iterated line digraphs of two kinds of complete digraphs. In this report, we introduce a generalization of iterated line digraphs. New generalizations of de Bruijn digraphs and Kautz digraphs are defined by applying generalization of iterated line digraphs. These two generalizations are isomorphically factorized by de Bruijn digraphs and Kautz digraphs.

1 序論

相互結合網 (interconnection networks) は超並列計算機的设计に対し、プロセッサ間の連結方法を定めるトポロジーとして重要な役割を果たす。現在、各種のトポロジーが提案されているが、その中で de Bruijn ダイグラフと Kautz ダイグラフは次数と直径を与えた時により多くのプロセッサを連結できるという利点を持ち、それは準最適であることが示されている [2]。

相互結合網はグラフ又は有向グラフ (以下ダイグラフ) として表現される。プロセッサはグラフの頂点、コミュニケーションリンクはグラフの辺又は有向辺で置換えられモデル化されている。ラインダイグラフ演算は相互結合網を構築する上で有用な方法であることが知られている [6]。それは、 d 正則なダイグラフのラインダイグラフは d 正則であること、直径は高々 1 増えることなどの理由が挙げられ、 (d, D) ダイグラフ問題、“固定された次数 d と直径 D でいかに多くの頂点を連結できるか”、のひとつの回答を与えている。実際、de Bruijn ダイグラフと Kautz ダイグラフはそれぞれ異なる種類の完全ダイグラフにラインダイグラフ演算を複数回施すこと (反復ラインダイグラフと呼ばれる) により定義可能である。近年の反復ラインダイグラフの研究としては [12][16] などがある。また、butterfly ダイグラフ、the bipartite ダイグラフもラインダイグラフと深い関わりを持つ [13][7]。

本研究では、ラインダイグラフ演算について着目し、反復ラインダイグラフの一般化となる演算を導入する。この一般化の大きな特徴は隣接条件を一般化することで反復ラインダイグラフを同型因子としてもつということにある。この一般化を de Bruijn ダイグラフと Kautz ダイグラフの反復ラインダイグラフによる定義に応用し、それぞれのダイグラフのクラスを一般化するダイグラフを提案する。また、この一般化からは反復ラインダイグラフによって定義されたダイグラフはそのルートダイグラフの性質を保存していることをみることができる。この結果より、ラインダイグラフに関連する幾つかのダイグラフのクラスと完全ダイグラフのクラスとの同型因子分解の関係が示される。

2 定義と表記

ここで扱うダイグラフは自己ループを許すが多重辺を許さないものとする。完全ダイグラフ

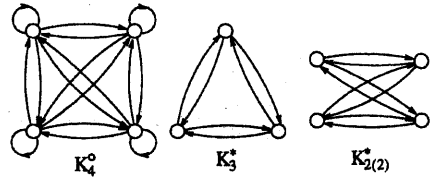


図 1: 完全ダイグラフ

K_n^* とは全ての二頂点間に弧が存在するダイグラフ (自己ループを含む) である。完全対称ダイグラフ K_n^* とはすべての異なる二頂点間に弧が存在するダイグラフである。すなわち完全ダイグラフからすべての自己ループを除いたものである。完全対称 m 等部 n 部ダイグラフ $K_{n(m)}^*$ とは、頂点集合が n 個の濃度 m の部分集合に分割され同じ分割集合間の頂点は隣接せず、異なる分割集合間の二頂点間には二重辺 (双方向の弧) が存在するようなダイグラフである。図 1 に完全ダイグラフ、完全対称ダイグラフ、完全対称 m 等部 n 部ダイグラフをそれぞれ例示する。

頂点 v から隣接している頂点集合は $\Gamma^+(v)$ で表され、 v に隣接している頂点集合は $\Gamma^-(v)$ で表現される。頂点 v の出次数とは $deg^+v = |\Gamma^+(v)|$ 、入次数とは $deg^-v = |\Gamma^-(v)|$ である。特に全ての頂点の出 (入) 次数が等しいとき出 (入) 正則と呼ばれる。出正則でありかつ入正則であるダイグラフは単に正則ダイグラフという。 $deg^+v = 0$ の頂点 v はシンクと呼ばれ、 $deg^-v = 0$ の頂点はソースと呼ばれる。弱連結ダイグラフ G は G の頂点集合を任意の空ではない二つの集合に分割したとき必ず分割集合間に弧が存在するダイグラフである。強連結ダイグラフとは任意の 2 頂点間に有向道が存在することであり、ダイグラフ G の直径 $diam(G)$ は強連結ダイグラフに対して次のように定義される。

$$diam(G) = \max_{u, v \in V(G)} [u \text{ から } v \text{ の最短道の長さ}]$$

ダイグラフ G の因子 H とは G の全域部分ダイグラフのことであり、 H は $V(G) = V(H), E(H) \subseteq E(G)$ を満足するダイグラフである。 G が $[H_1, H_2, \dots, H_k]$ で因子分解されるとは、 $V(G) = V(H_i), i = 1, 2, \dots, k, E(G) = E(H_1) \cup E(H_2) \cup \dots \cup E(H_k), E(H_i) \cap E(H_j) = \emptyset, i \neq j$ のときをいう。特に、各因子がすべて H に同型である時は、 H は G を同型因子分解する、あるいは H は G を割り切るといい、 $H | G$ と表記する。同型因子分解の例を図 2 で示す。

ラインダイグラフ演算はダイグラフ G に対する演算であり、ある与えられたダイグラフの変換を

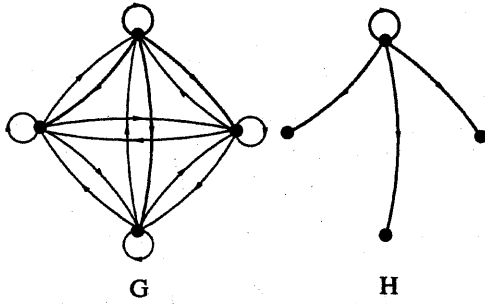


図 2: ダイグラフの同型因子分解 $H \oplus G$

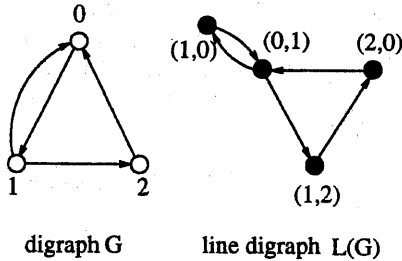


図 3: ラインダイグラフ

行なう。ラインダイグラフ $L(G)$ は G の有向辺集合を頂点集合として持ち、次のように定義される。ダイグラフ G は $L(G)$ に対してルートダイグラフと呼ばれる。

$$\begin{cases} V(L(G)) = E(G) \\ E(L(G)) = \{((u,v), (v,w)) \mid (u,v), (v,w) \in E(G)\} \end{cases}$$

ラインダイグラフ演算の特徴として、 d 出正則ダイグラフ G のラインダイグラフ $L(G)$ も d 出正則であることやサイクルを除く強連結ダイグラフのラインダイグラフは直径が 1 増加することなどが挙げられる。詳細は [1][6][8] を参照。ラインダイグラフの例を図 3 に示す。この図でわかるように $L(G)$ の各頂点は G の各弧に対応しており隣接関係は、例えば 頂点 $(0,1)$ は頂点 $(1,0)$, $(1,2)$ に隣接している。

(ダイ) グラフの積は (ダイ) グラフの二項演算であるが、いくつかの種類(直積、強積、弱積など)が存在する。良く知られているように、ハイパーキューブは完全グラフ K_2 の直積 (cartesian product) で定義されている。本研究では直積とは異なるクロネッカー積 (Kronecker product) を利用している。

ダイグラフ G, H に対しクロネッカー積 $G \otimes H$ は次のように定義される。

$$\begin{cases} V(G \otimes H) = V(G) \times V(H) \\ E(G \otimes H) = \{((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \mid (u_1, v_1) \in E(G), (u_2, v_2) \in E(H)\} \end{cases}$$

共通の頂点集合を持ち、弧集合が互いに素であるダイグラフ G, H に対し弧和 $G \oplus H$ は次のように定義される。

$$\begin{cases} V(L(G \oplus H)) = V(G) = V(H) \\ E(L(G \oplus H)) = E(G) \cup E(H) \end{cases}$$

3 反復ラインダイグラフの一般化

ここでは反復ラインダイグラフを一般化し、その応用として新たな de Bruijn (Kautz) ダイグラフの一般化を導入する。

3.1 $L(G; n, m)$ の定義

ダイグラフ G にラインダイグラフ演算を複数回施したダイグラフは反復ラインダイグラフと呼ばれ $L^n(G) = L(L^{n-1}(G))$ で定義されるが $L^2(G)$ の頂点 $((u,v), (v,w))$ を (u,v,w) と表すこととで 2 階反復ラインダイグラフを定義すると表現が簡潔になる。正確には $L^n(G)$ は次で定義される。ここで、 $W_n(G)$ はダイグラフ G の長さ n のウォーク (歩道) の集合である。

$$\begin{cases} V(L^n(G)) = W_n(G) \\ E(L^n(G)) = \{((u_0, u_1, \dots, u_n), (v_0, v_1, \dots, v_n)) \mid u_i = v_{i-1}, 1 \leq i \leq n\} \end{cases}$$

定義 3.1 $L(G; n, m)$

ダイグラフ G に対し $L(G; n, m)$, $1 \leq n$, $0 \leq m \leq n$ は次のように定義される。

$$\begin{cases} V(L(G; n, m)) = W_n(G) \\ E(L(G; n, m)) = \{((u_0, u_1, \dots, u_n), (v_0, v_1, \dots, v_n)) \mid u_i = v_{i-1}, 1 \leq i \leq n-m\} \end{cases}$$

この定義では変数 m を導入することにより反復ラインダイグラフの一般化を行なっている。 $m=0$ のとき反復ラインダイグラフと同値である。定義から直接わかるように、 $L(G; n, m+1)$ は $L(G; n, m)$ に有向辺を付け加えることによって構成されている。すなわち $L(G; n, m)$ は $L(G; n, m+1)$ の因子である。反復ラインダイグラフの定義として $L^0(G) = G$ とする見方もある。これを考慮す

ればダイグラフ $L(G; n, m)$ は次のようにも定義可能である。

定義 3.2 $L(G; n, m)$

ダイグラフ G に対し $L(G; n, m), 0 \leq n, 0 \leq m \leq n$ は次のように定義される。

$$\begin{cases} V(L(G; n, m)) = W_n(G) \\ E(L(G; n, m)) = \{((u_0, u_1, \dots, u_n), (v_0, v_1, \dots, v_n)) | \\ ((u_0, u_1, \dots, u_{n-m}), (v_0, v_1, \dots, v_{n-m})) \in L^{n-m}(G)\} \end{cases}$$

ラインダイグラフ演算 $L(G)$ の一般化として、out ラインダイグラフ演算 $OL(G)$ は [15] で以下のように定義された。

$$\begin{cases} V(OL(G)) = E(G) \\ E(OL(G)) = \{((u, v), (w, x)) | \\ (u, v), (w, x), (u, w) \in E(G)\} \end{cases}$$

[15] で得られた out ラインダイグラフの性質としては次がある。

定理 3.3 [15] ダイグラフ G が d 出正則ならば
i) $OL(G) \cong G \otimes K_d^0$, ii) $L(G) | OL(G)$

ダイグラフ $L(G; n, m)$ は out ラインダイグラフの一般化ともなっている。まとめると、

$$\begin{aligned} G &\cong L(G; 0, 0) \\ L(G) &\cong L(G; 1, 0) \\ OL(G) &\cong L(G; 1, 1) \\ L^n(G) &\cong L(G; n, 0) \end{aligned}$$

を得る。

G が強連結ならば $L^n(G)$ の直径は $\text{diam}(G) + n$ で得られるが、 $L(G; n, m)$ の直径は次で与えられる。

命題 3.4 ダイグラフ G を直径 D をもつ強連結ダイグラフとすると、 $L(G; n, m)$ の直径は高々 $D + n - m + 1$ である。

クロネッカー積はラインダイグラフと相性のよい演算であり、次の準同型性を表す定理が [19] で示されている。

定理 3.5 [19] $L(G \otimes H) \cong L(G) \otimes L(H)$

この定理はラインダイグラフ演算とクロネッカー積を結びつける妥当性を示しており、[19] ではこれを de Bruijn ダイグラフの de Bruijn ダイグラフによる同型因子分解に応用している。

直接的な系として $L(G; n, m)$ に対しても同様な議論で導くことができる。

系 3.6

$$L(G \otimes H; n, m) \cong L(G; n, m) \otimes L(H; n, m)$$

d 出正則ダイグラフの out ラインダイグラフがクロネッカー積で表現できると同様にクロネッカー積に対する結果は次で示される。

定理 3.7 G を d 出正則ダイグラフとすると

$$L(G; n, m) \cong L^{n-m}(G) \otimes K_{d^m}^0$$

証明 $V(L(G; n, m))$ 上で $x_0 x_1 \dots x_{n-m}$ から始まる頂点集合を $A(x_0 x_1 \dots x_{n-m}) = \{((x_0, x_1, \dots, x_{n-m}), i), 0 \leq i \leq d^m - 1\}$ のようにラベル付けを行えば、これは $V(K_{d^m}^0) = \{0, 1, \dots, d^m - 1\}$ としたときの $L^{n-m}(G) \otimes K_{d^m}^0$ に同一である。■

クロネッカー積と弧和には次の分配法則が成り立っている。

補題 3.8 G_1, G_2, H をダイグラフとすると

$$(G_1 \oplus G_2) \otimes H \cong G_1 \otimes H \oplus G_2 \otimes H$$

この補題 3.8 により、クロネッカー積で表現されるダイグラフの同型因子分解を容易に示すことが出来る。例えば、完全対称ダイグラフ K_3^* は $K_3^* \cong C_3 \oplus C_3$ と表すことができ、ダイグラフ G が与えられたとき $G \otimes K_3^* \cong G \otimes C_3 \oplus G \otimes C_3$ 、すなわち $G \otimes C_3 | G \otimes K_3^*$ を得る。ここで C_n は位数 n の有向サイクルを表している。

定理 3.7 よりダイグラフ $L(G; n, m)$ はクロネッカー積で表現できるため $L(G; n, m)$ のいくつかの同型因子は容易に求めることができる。しかしながら、次の定理はクロネッカー積の分配法則に依らない自明ではない反復ラインダイグラフによる埋め込みと同型因子分解に関するものである。

補題 3.9 G をダイグラフとすると

$$L^{n-m}(G) \prec L(G; n, m)$$

ここで、“ \prec ” は左辺のグラフが右辺のグラフの導出部分グラフであることを示す。

定理 3.10 G を d 出正則ダイグラフとすると

$$L(G; n, m) | L(G; n, m+1)$$

$L(G; n, m)$ の同型因子分解に対する定理 3.10 が成立する主な理由は、 $L(G; n, m)$ の頂点 $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ と頂点 $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ が $x_i = y_i, 0 \leq i \leq n - m - 1$ ならば同じ振舞いをするという点にある。つまり先頭の $n - m$ 文字が等しい二頂点 x, y は $\Gamma^+(x) = \Gamma^+(y), \Gamma^-(x) = \Gamma^-(y)$ を満足している。同じ振舞いをする頂点同士によって $L(G; n, m)$ の頂点集合を分割することによって同型因子分解は導かれる。

補題 3.9 と定理 3.10 からダイグラフ $L(G; n, m)$ は $L(G; n, k), k \leq m$, を同型因子として持つため、 $L^{n-k}(G), k \leq m$, と $L^n(G)$ の性質を含むことがわかる。したがって、反復ラインダイグラフとの関係はつぎの系により得られる。

系 3.11 G を d 出正則ダイグラフとすると

$$L^n(G) \mid L(G; n, m) \cong L^{n-m}(G) \otimes K_{d^m}^{\circ}$$

この系 3.11 で $n = m$ とすると最も密度の高い (有向辺の数が多い) ダイグラフ $L(G; n, n)$ と最も密度の低いダイグラフ $L^n(G)$ との関係を得る。

G を d 正則ダイグラフとすればクロネッカー積との関係から

系 3.12 G が d 出正則ならば

$$L^n(G) \mid G \otimes K_{d^n}^{\circ}$$

を導くこととなる。ダイグラフ G と完全ダイグラフ K_n° とのクロネッカー積は G の各頂点を n 個の頂点で置き換えたものに等しい。すなわち、反復ラインダイグラフがルートダイグラフ G の性質をよく保存していることを示す結果となり興味深い。例えば、 G が完全ダイグラフならば de Bruijn ダイグラフの定義となり、de Bruijn ダイグラフは完全ダイグラフの同型因子であることが結果として得られる。このようなラインダイグラフによって定義される特定のダイグラフのクラスについては次節で示す。

3.2 de Bruijn ダイグラフの一般化

ここでは、反復ラインダイグラフの一般化である。 $L(G; n, m)$ を応用し de Bruijn ダイグラフ及び Kautz ダイグラフの一般化となるダイグラフを構築する。de Bruijn ダイグラフ及び Kautz ダイグラフはそれぞれ、完全ダイグラフと完全対称ダイグラフの反復ラインダイグラフとして次のように定義されている。

$$\begin{aligned} B(d, D) &= L(B(d, D-1)) = L^{D-1}(K_d^{\circ}) \\ K(d, D) &= L(K(d, D-1)) = L^{D-1}(K_{d+1}^*) \end{aligned}$$

反復ラインダイグラフを一般化に置換え次を定義する。

定義 3.13 rotational de Bruijn ダイグラフ $RB(d, D, m)$ は次のように定義される

$$RB(d, D, m) = L(K_d^{\circ}; D-1, m)$$

定義 3.14 rotational Kautz ダイグラフ $RK(d, D, m)$ は次のように定義される。

$$RK(d, D, m) = L(K_{d+1}^*; D-1, m)$$

これらはまた、定理 3.7 よりクロネッカー積で

$$RB(d, D, m) \cong B(d, D-m) \otimes K_{d^m}^{\circ} \quad (1)$$

$$RK(d, D, m) \cong K(d, D-m) \otimes K_{d^m}^{\circ} \quad (2)$$

のように表現できる。

de Bruijn ダイグラフと Kautz ダイグラフは、(a) 「反復ラインダイグラフ」による定義の他に、隣接関係を (b) 「アルファベット (文字列)」、(c) 「合同式」によって表す定義が存在する。これらでは (b) を一般化する Extended de Bruijn (Kautz) ダイグラフ [18]、(c) を一般化する Generalized de Bruijn (Kautz) ダイグラフ [14][17] がそれぞれ提案されている。ここで提案する rotational de Bruijn (Kautz) ダイグラフは反復ラインダイグラフの一般化による第三の一般化と位置付けることができる。この一般化は de Bruijn ダイグラフの場合には (1) 式から Extended de Bruijn ダイグラフの真部分クラスとなっていることがわかる。しかしながら、rotational Kautz ダイグラフは Kautz ダイグラフを除き extended Kautz ダイグラフとは共通部分は存在しない。

rotational de Bruijn (Kautz) ダイグラフの位数、サイズ、次数および直径を次の表 1 に、rotational de Bruijn ダイグラフの例 $RB(4, 2, 1)$ を図 4 にそれぞれ示す。

	$RB(d, D, m)$	$RK(d, D, m)$
位数	d^D	$d^D + d^{D-1}$
サイズ	d^{D+m+1}	$(d^D + d^{D-1})d^{m+1}$
次数	d^{m+1} 正則	d^{m+1} 正則
直径	$D - m$	$D - m : (D - m \geq 2)$ $2 : (D - m = 1)$

表 1

同型因子分解に関する結果の定理 3.10 から rotational de Bruijn (Kautz) ダイグラフの性質として次の系を直接得ることができる。

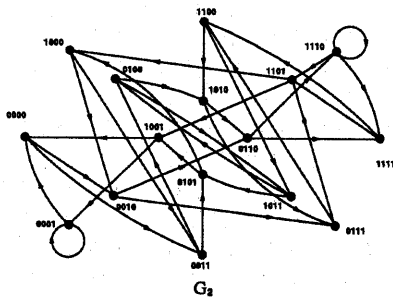
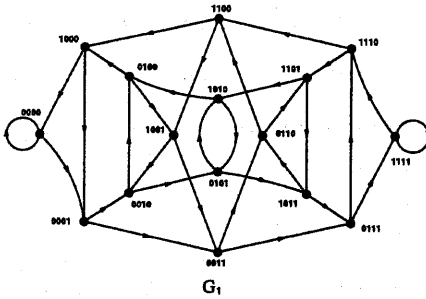
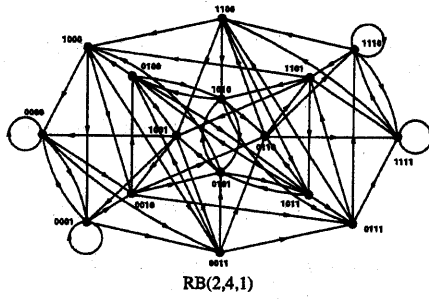


図 4: $RB(2, 4, 1)$ と同型因子

図 4では $RB(2, 4, 1)$ が二つの $G_1 \cong G_2 \cong B(2, 4)$ によって同型因子分解されること、図 5では $RB(2, 4, 2)$ に $B(2, 2)$, $B(2, 3)$, $B(2, 4)$ のそれぞれが埋め込み可能であることを例示している。

系 3.15 i) $RB(d, D, m)$ は d^m 個の $B(d, D)$ に同型因子分解される。ii) $RK(d, D, m)$ は d^m 個の $K(d, D)$ に同型因子分解される。

系 3.16 i) $RB(d, D, m)$ は点素な $B(d, k)$, $D - m \leq k \leq D$ を部分ダイグラフとして d^{D-k} 個持つ。

ii) $RK(d, D, m)$ は点素な $K(d, k)$, $D - m \leq k \leq D$ を部分ダイグラフとして d^{D-k} 個持つ。

系 3.15で $m = D - 1$ のときが最もサイズの大きいダイグラフとなる。系 3.12によれば

$$B(d, D) \mid K_{d^D}^{\circ} \quad (3)$$

$$K(d, D) \mid K_{d^{D+1}(dD-1)}^* \quad (4)$$

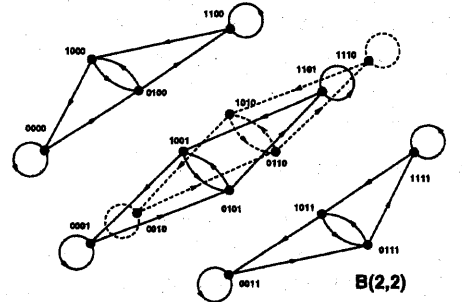
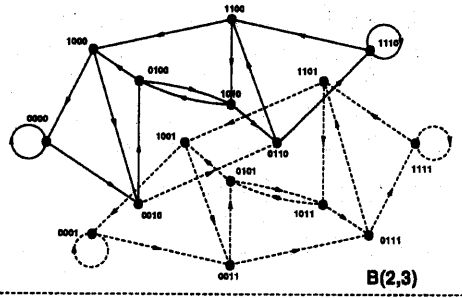
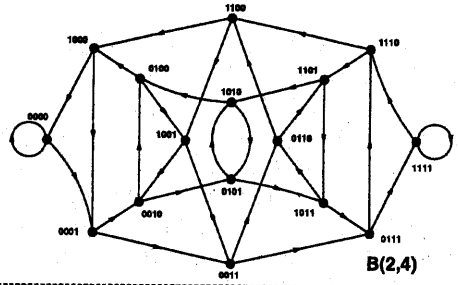


図 5: $RB(2, 4, 2)$ の部分ダイグラフ

となり、de Bruijn ダイグラフによる完全ダイグラフの同型因子分解と Kautz ダイグラフによる完全対称等部ダイグラフの同型因子分解という結果を得る。(3) は [18] で示されている。

[3] では de Bruijn ダイグラフが全域木で同型因子分解されるという結果をもとに de Bruijn ダイグラフのプロードキャストイングについて述べている。次で示されるダイグラフ $T_{\alpha}(d, D)$ は de Bruijn ダイグラフ上で定義され、ちょうど一つの自己ループを含むが、これは木としてみなすことができる (図:6)。

定義 3.17 $T_{\alpha}(d, D)$, $0 \leq \alpha \leq d - 1$

$$\begin{cases} V(T_{\alpha}(d, D)) = B(d, D) \\ E(T_{\alpha}(d, D)) = \{(u, v) \in E(B(d, D)) \\ \quad u = (\alpha, x_1, \dots, x_n), 0 \leq x_i \leq d - 1\} \end{cases}$$

$T_{\alpha}(d, D)$ は高さ D の完全 d 分木のルートに自己ループを付け加え、高さ $D - 1$ の完全 d 分木を一つ除去したダイグラフである。

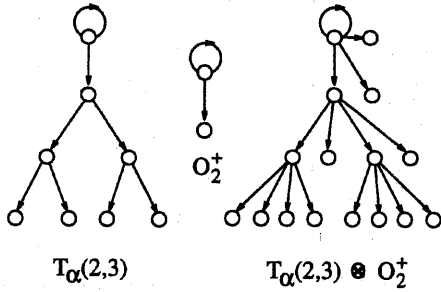


図 6: $T_\alpha(2,3)$ と $T_\alpha(2,3) \otimes O_2^+$

定理 3.18 [2] de Bruijn ダイグラフ $B(d, D)$ は d 個の $T_\alpha(d, D)$ に同型因子分解される。

$RB(d, D, m)$ は $B(d, D)$ を同型因子としてもつので、 $T_\alpha(d, D)$ を同型因子としてもつことは明らかであるが、クロネッカー積を利用した同型因子分解によって異なる全域木を得ることができる。これを示すために次のダイグラフのクラス O_n^+ が定義される。完全ダイグラフ K_n^o の同型因子であるダイグラフ O_n^+ は、位数 n サイズ n である一つの頂点から他のすべての頂点 (自分自身も含む) に有向辺をもつようなダイグラフをいう。直観的には (無向) グラフの「スター」に対応する。ダイグラフ $RB(d, D, m)$ の全域木は高さが D から $D-m$ までの異なる木を得る。

性質 3.1 *i)* $RB(d, D, m)$ は d^{m+1} 個の $T_\alpha(d, D)$ により同型因子分解される。 *ii)* $RB(d, D, m)$ は $d^{m+1}m$ 個の $T_\alpha(d, D-m) \otimes O_{d^m}^+$ により同型因子分解される。

ここで、 $T_\alpha(d, D-m) \otimes O_{d^m}^+$ はちょうど一つのループをもつダイグラフとなり、それは完全 d^2 分木に類似している (図:6)。

de Bruijn ダイグラフ $B(d, D)$ と Kautz ダイグラフ $K(d, D)$ には、合同式による定義が存在する。それは、頂点集合を整数環 Z_{d^D} に対応させ、頂点 x が次の合同式を満足する頂点に隣接するように定義されている。

$$B(d, D):$$

$$x \rightarrow dx + r \pmod{d^D}, 0 \leq r \leq d-1$$

$$K(d, D):$$

$$x \rightarrow -dx - r \pmod{d^D + d^{D-1}}, 1 \leq r \leq d$$

同様に $RB(d, D, m)$ と $RK(d, D, m)$ においてはダイグラフの合同式表現としての隣接関係はそれぞれ次のように表すことができる。

定理 3.19 $RB(d, D, m)$ の頂点集合を整数環 Z_{d^D} に、 $RK(d, D, m)$ の頂点集合を整数環 $Z_{d^D + d^{D-1}}$ に対応させると、任意の頂点 x の隣接関係はそれぞれ次を満たしている。

$$RB(d, D, m):$$

$$x \rightarrow dx + r \pmod{d^{D-m}}, 0 \leq r \leq d-1$$

$$RK(d, D, m):$$

$$x \rightarrow -dx - r \pmod{d^{D-m} + d^{D-m-1}}, 1 \leq r \leq d$$

あるダイグラフのクラスを同型因子として持つダイグラフを調べることは興味深いことである。Harary らによる [9, 10, 11] のシリーズは完全ダイグラフ (ダイグラフ) の同型因子に関する研究である。本研究で提案した反復ラインダイグラフの一般化とそれに伴う de Bruijn (Kautz) ダイグラフの一般化は各種の完全ダイグラフの同型因子を導くことができる。反復ラインダイグラフによって定義されるダイグラフのクラスとそれらを同型因子としてもつ完全ダイグラフのクラスを表 2 に示す。表 2 で示されるダイグラフは rotational de Bruijn (Kautz) ダイグラフと同様に、各種の完全ダイグラフとの間にあらたなクラスのダイグラフを定義することが可能である。

4 まとめ

本研究では反復ラインダイグラフの一般化を導入した。この一般化は反復ラインダイグラフ及び [15] で定義された out ラインダイグラフを含む形で一般化されている。隣接関係を一つの変数を導入することで一般化されたこの定義では、ルートダイグラフが出正則であれば反復ラインダイグラフによって同型因子分解される。ルートダイグラフと完全ダイグラフとのクロネッカー積が反復ラインダイグラフによって同型因子分解されるという結果により、反復ラインダイグラフによって定義され得るダイグラフのクラスがある種の完全ダイグラフを同型因子分解することを導いた。特に、Kautz ダイグラフが完全対称等部ダイグラフを同型因子分解する結果が得られた。

さらに、de Bruijn (Kautz) ダイグラフが反復ラインダイグラフで定義されることの応用として de Bruijn (Kautz) ダイグラフに対する一般化を導入した。これら二つの一般化は de Bruijn (Kautz) ダイグラフの同型因子と埋め込みに対して幾つかの性質を持ち、全域木に対する性質も導かれた。

Digraph G	definition from the line digraph	digraph H divided by G
de Bruijn digraphs	$B(d, D) \cong L^{D-1}(K_d^0)$	K_{dD}^0
Kautz digraphs	$K(d, D) \cong L^{D-1}(K_{d+1}^*)$	$K_{d+1(d^{D-1})}^*$
directed butterflies	$\vec{b}(k, r) \cong L^{r-1}(\vec{P}_{2r} \otimes K_d^0)$	$K_{r+1(dr)}^*$
the bipartite digraph	$BD(d, d^n) \cong L^{n-1}(K_{d,d}^*)$	K_{d^n, d^n}^*

表 2:

謝辞

本研究の一部は(財)テレコム先端技術研究支援センターによるSCAT研究助成のもとに行なわれた。感謝する次第である。

参考文献

- [1] M. Aigner, On the linegraph of a directed graph, *Math. Z.*, 102 (1967) 56-61.
- [2] J-C. Bermond and C. Peyrat, de Bruijn and Kautz networks: a competitor for the hypercube?, In F. André and J. P. Verjus, eds., *Hypercube and Distributed Computers*, Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland (1989) 279-293.
- [3] J-C. Bermond and P. Fraigniaud, Broadcasting and gossiping in de Bruijn networks, *SIAM J. Comput.*, 23 (1994) 212-225.
- [4] G. Chartrand and L. Lesniak, *Graphs and Digraphs, Sec. ed.*, Wadsworth and Brooks/Cole, Monterey (1986).
- [5] M. A. Fiol, I. Alegre and J. L. A. Yebra, Line digraph iterations and the (d,k) problem for directed graphs, *Proc. 10th Int. Symp. Computer Architectures* (1983) 174-177.
- [6] M. A. Fiol, J. L. A. Yebra and I. A. de Miquel, Line digraph iterations and the (d,k)-digraph problem, *IEEE Trans. Comput.* C-33,5 (1984) 400-403.
- [7] M. A. Fiol and J. L. A. Yebra, Dense bipartite digraphs, *J. Graph Theory*, 14 (1990) 687-700.
- [8] F. Harary and R. Z. Norman, Some properties of line digraphs, *Rend. Circ. Mat. Palermo(2)*, 9 (1960) 161-168.
- [9] F. Harary, R. W. Robinson and N. C. Wormald, Isomorphic factorisations I: complete graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 242 (1978) 243-260.
- [10] F. Harary, R. W. Robinson and N. C. Wormald, Isomorphic factorisations V: directed graphs, *Mathematica*, 25 (1978) 279-285.
- [11] F. Harary and R. W. Robinson, Isomorphic factorisations X: unsolved problems, *J. Graph Theory*, 9 (1985) 67-86.
- [12] R. Harbane and C. Padró, Spanners of underlying graphs of iterated line digraphs, *Information Processing Letters*, 62 (1997) 237-244.
- [13] T. Hasunuma and Y. Shibata, Containment of butterflies in networks constructed by the line digraph operation, *Information Processing Letters*, 61 (1997) 25-30.
- [14] M. Imase and M. Itoh, Design to minimize a diameter on Building block network, *IEEE Trans. on Computers*, C-30 (1981) 439-443.
- [15] 河合博之, 柴田幸夫, ラインダイグラフ演算の一般化と同型因子分解, 情報処理学会アルゴリズム研究会研究報告, 97-AL-58-2 (1997).
- [16] C. Padró, P. Morillo, Diameter vulnerability of iterated line digraphs, *Discrete Mathematics*, 149 (1996) 189-204.
- [17] S. M. Reddy, D. K. Pradhan, and J. G. Kuhl, Directed graphs with minimal diameter and maximal connectivity, *School of Engineering Oakland Univ. Tech. Rep.*, 1980.
- [18] Y. Shibata and Y. Gonda, Extension of de Bruijn graphs and Kautz graphs, *Computers and Mathematics with Applications*, 30 (1995) 51-61.
- [19] Y. Shibata, T. Hasunuma and S. Fukuda, Isomorphic factorization of extended de Bruijn digraphs, submitted.