

# Voronoi 図を用いたもう一つの補間法

日吉 久礎\*      杉原 厚吉†

東京大学大学院工学系研究科計数工学専攻

## 概要

Voronoi 図を用いた補間法としては, Sibson によるものがよく知られている. 本稿では Voronoi 図を用いた Sibson のものとは異なる補間法を提案し, その性質, 特に連続微分可能性について考察する. また, Voronoi 図の情報を陽に用いない形に補間法を拡張する. 拡張した補間法を応用することによって, 数値誤差に対して robust な補間法および  $C^1$  級の補間法が得られる.

# Another interpolant using Voronoi diagrams

Hisamoto Hiyoshi\*      Kokichi Sugihara†

Department of Mathematical Engineering and Information Physics,  
Graduate School of Engineering, University of Tokyo

## Abstract

Sibson's interpolant is well-known as the interpolation method using Voronoi diagrams. This paper proposes another interpolation method using Voronoi diagrams and considers properties of this interpolant, especially its continuous differentiability. In addition, the interpolation method is extended to the form that does not use Voronoi diagrams explicitly. The application of the extension leads to robustness and continuous differentiability of the interpolation method.

## 1 はじめに

本研究では, 相異なる  $n$  個の点の集合  $P = \{p_1, \dots, p_n\} \subset E^d$  および実数  $z_1, \dots, z_n \in \mathbf{R}$  が与えられたとき, その補間関数を求める問題を考える. 特に, 点の集合  $P$  が整数格子のように規則正しく与えられていない場合を考える.

高次元では,  $d = 1$  のときのように「隣の」点が自明に決まらない. この困難を克服するために, Voronoi 図を用いた補間法が提案されている. Voronoi 図 (例えば, Edelsbrunner [1] を参照) は  $E^d$  を  $P$  のどの要素に最も近いかという規準で分割した図形である. したがって, ある点  $p \in E^d$  の「隣の」点を決める際に Voronoi 図を用いることができる. Voronoi 図において, ある母点  $p$  の Voronoi 領域が  $p$  と異なる母点  $q$  の Voronoi 領域と Voronoi

\*E-mail: hiyoshi@simplex.t.u-tokyo.ac.jp

†E-mail: sugihara@simplex.t.u-tokyo.ac.jp

辺を共有するとき、 $q$  を  $p$  の neighbour と呼ぶことにする。今、 $p$  における値を補間することを考えているとする。このとき、 $P \cup \{p\}$  を母点とする Voronoi 図  $V(P \cup \{p\})$  において  $p$  の neighbour となっている母点を「隣の」点とみなすのである。

この考え方をを用いた補間法としてよく知られているのが、Sibson によるものである。Sibson は、Voronoi 図をもとにして  $P$  の凸包  $CH(P)$  の任意の内点  $p$  を  $P$  の要素の凸結合で表す方法を発見し [3]、この方法に基づく  $C^1$  級の補間法を提案した [4]。

本研究では Sibson のものとは異なる凸結合の表現法を利用した補間法 [5] を提案し、その性質、特に連続微分可能性について考察する。また、「隣の」点として neighbour を必ずしも用いない形に補間法を拡張する。拡張した補間法を応用することにより、数値誤差に対して robust な補間法および  $C^1$  級の補間法が得られることを示す。

## 2 もう一つの補間法

点  $p$  を  $P$  の要素ではない  $CH(P)$  の任意の内点とする。このとき、 $P \cup \{p\}$  の要素を母点とする Voronoi 図  $V(P \cup \{p\})$  を考える。 $V(P \cup \{p\})$  において、母点  $p, p_1, \dots, p_n$  の Voronoi 領域をそれぞれ  $R, R_1, \dots, R_n$  とし、 $p$  の neighbour の集合を  $P_0 \subseteq P$  とする。また、 $i = 1, \dots, n$  に対して、

$$d_i = d(p, p_i), \quad (1)$$

$$l_i = \begin{cases} (R \text{ と } R_i \text{ がつくる Voronoi 辺の長さ}) & \text{if } p_i \in P_0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2)$$

と定義する。ここで、 $d(p, q)$  は  $p$  と  $q$  の間の Euclid 距離を表すとする。このとき、係数  $\beta_i$  を

$$\beta_i = \frac{l_i/d_i}{\sum_{p_i \in P_0} l_i/d_i} \quad (3)$$

と定義する。

次の定理が、 $P$  の要素の凸結合で  $p$  を表すことができることを保証する。

**定理 1**  $P$  の要素でない  $CH(P)$  の任意の内点  $p$  に対して、

$$p = \sum_{p_i \in P_0} \beta_i p_i \quad (4)$$

が成り立つ。また、

$$\sum_{p_i \in P_0} \beta_i = 1, \quad (5)$$

$$0 \leq \beta_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6)$$

が成り立つ。

証明 一般性を失うことなく,  $R_1, \dots, R_k$  が  $R$  をこの順で反時計回りに取り囲んでいると仮定してよい.  $i = 1, \dots, k-1$  に対して, 点  $q_i$  を  $R, R_i, R_{i+1}$  のつくる Voronoi 点とし, 点  $q_k$  を  $R, R_k, R_1$  のつくる Voronoi 点とする. また, 以下の議論のために,  $q_{k+1} = q_1$  と約束する (図 1 参照).

線分  $\overline{q_i q_{i+1}}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , は多角形  $R$  の辺であるから,  $\sum_{i=1}^k \overrightarrow{q_i q_{i+1}} = 0$  が成り立つ. 一方,  $i = 1, \dots, k$  に対して,  $\overrightarrow{pp_i}$  は  $\overline{q_i q_{i+1}}$  に垂直なので,  $\sum_{i=1}^k \frac{l_i}{d_i} \overrightarrow{pp_i} = 0$  が成り立つ. したがって,

$$\sum_{i=1}^k \frac{l_i}{d_i} p = \sum_{i=1}^k \frac{l_i}{d_i} p_i \text{ が成り立つ.}$$

式 (5), (6) は,  $\beta_i$  の定義より直接示すことができる. ■

以下のようにして, 補間関数  $z: CH(P) \rightarrow \mathbf{R}$  を構成する.  $p$  が  $P$  の要素でない  $CH(P)$  の内点のときには, 定理 1 の  $\beta_i$  を用いて  $z$  を

$$z = \sum_{p_i \in P_0} \beta_i z_i \quad (7)$$

と定める.  $p$  が  $P$  のある要素  $p_j$  に一致する場合には, 式 (7) において

$$\beta_i = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

としてよいことが次の補題から保証される.

補題 2  $p \rightarrow p_j$  とすると,

$$\beta_i \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{if } i = j, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

となる.

証明  $p \rightarrow p_j$  とすると,  $d_j \rightarrow 0$  より  $\frac{l_j}{d_j} \rightarrow +\infty$  となる. ■

$p$  が  $CH(P)$  の境界点であるときには以下のようにする.  $CH(P)$  の境界を凸多角形とみたとき,  $p$  が辺  $\overline{p_j p_k}$  上にあると仮定すると,

$$\begin{aligned} p &= c_j p_j + c_k p_k, \\ c_j + c_k &= 1, \quad 0 < c_j, c_k < 1 \end{aligned}$$

が成り立つ. このとき, 式 (7) において

$$\beta_i = \begin{cases} c_j & \text{if } i = j, \\ c_k & \text{if } i = k, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とすればよい. このことは次の補題から保証される.

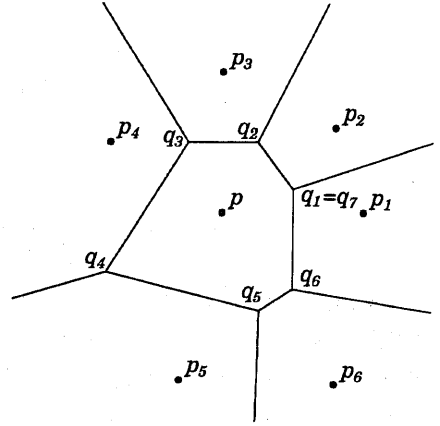


図 1.  $p$  とその neighbour.

補題 3 凸多角形の辺  $\overline{p_j p_k}$  に対して,  $p \rightarrow c_j p_j + c_k p_k$  とすると,

$$\beta_i \rightarrow \begin{cases} c_j & \text{if } i = j, \\ c_k & \text{if } i = k, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

となる.

証明  $p \rightarrow c_j p_j + c_k p_k$  とすると,  $l_j, l_k \rightarrow +\infty$ ,  $d_j \rightarrow c_k d(p_j, p_k)$ ,  $d_k \rightarrow c_j d(p_j, p_k)$  となる. ■

式 (3) では, 係数  $\beta_i$  は Voronoi 点の座標に依存する形で表されていた. 次の補題は,  $p$  の座標および  $p$  の neighbour の座標から  $\beta_i$  を直接求めるためのものである.  $p$  の座標を  $p = (x, y)$  とし,  $p$  の neighbour の座標を  $p_i = (x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , とする. また, 議論を簡潔にするために,  $p_0 = p_k, p_{k+1} = p_1$  とする.

補題 4 次の式が成り立つ:

$$\frac{l_i}{d_i} = \frac{(x_{i+1} - x)(x_{i+1} - x_i) + (y_{i+1} - y)(y_{i+1} - y_i)}{2\Delta_i} + \frac{(x_{i-1} - x)(x_{i-1} - x_i) + (y_{i-1} - y)(y_{i-1} - y_i)}{2\Delta_{i-1}}. \quad (8)$$

ここで,

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} x_i - x & y_i - y \\ x_{i+1} - x & y_{i+1} - y \end{vmatrix} \quad (9)$$

である.

証明 Sugihara [5] の Theorem 2 の証明を参照. ■

### 3 補間法の連続微分可能性

この節では, 式 (7) で与えられる補間関数  $z$  の連続性および連続微分可能性について考察する. 次の二つの定理が成り立つ.

定理 5 関数  $z$  は, 任意の点  $p \in \text{CH}(P)$  において連続である.

証明 補題 2, 3 から明らか. ■

定理 6 任意の点  $p \in \text{CH}(P)$  に対して, 点  $p$  を任意の方向に微小距離だけ動かしたとき  $V(P \cup \{p\})$  の位相構造が変わらないならば, 点  $p$  において  $z$  は連続微分可能である.

証明  $l_i, d_i$  の連続微分可能性から示すことができる. ■

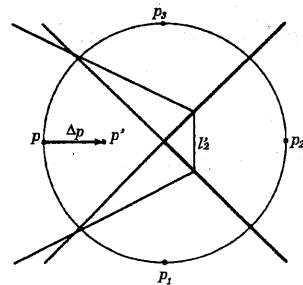


図 2. 位相構造が変わる場合.

$z$  が微分可能でないような点  $p$  に対して, ある neighbour  $p_1, p_2, p_3$  が存在して,  $p$  は三角形  $p_1p_2p_3$  の外接円上の点となる. この状況を図 3 に示す.  $p$  が微小なベクトル  $\Delta p$  だけ動いて円の内側の点  $p'$  に一致したとすると,  $l_2$  の変化量  $\Delta l_2$  に対して, ある定数  $c$  が存在して,  $\Delta l_2 = c|\Delta p|$  が成り立つ. 一方, 円の外側では  $l_2 \equiv 0$  である. したがって,  $l_2$  は点  $p$  において連続微分可能でない. 同様なことが  $l_1$  や  $l_3$  についてもいえる.

## 4 補間法の拡張とその応用

### 4.1 拡張

定理 1 は, その証明から明らかなように, 「隣の」点として neighbour を必ずしも用いない形に拡張することができる.  $P_0$  を相異なる  $P$  の要素からなるリスト  $[p_1, \dots, p_k]$  とし, 点  $p$  を  $P_0$  の要素でない点とする.  $i = 1, \dots, k-1$  に対して, 点  $q_i$  を三角形  $pp_i p_{i+1}$  の外接円の中心とし, 点  $q_k$  を三角形  $pp_k p_1$  の外接円の中心とする. また, 以下の議論のために  $q_0 = q_k$  とする. このとき,  $l_i^*, d_i^*, i = 1, \dots, k$ , を次のように定める.

$$d_i^* = d(p, p_i), \quad (10)$$

$$l_i^* = \begin{cases} d(q_{i-1}, q_i) & \text{if } p \text{ is to the left of } \overrightarrow{q_{i-1}q_i}, \\ -d(q_{i-1}, q_i) & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (11)$$

このとき, 係数  $\beta_i^*, i = 1, \dots, k$ , を次のように定める.

$$\beta_i^* = \frac{l_i^*/d_i^*}{\sum_{i=1}^k l_i^*/d_i^*} \quad (12)$$

このとき, 定理 1 に対応する次の定理が成り立つ.

定理 7  $P_0$  の要素でない任意の点  $p$  に対して,

$$p = \sum_{i=1}^k \beta_i^* p_i \quad (13)$$

が成り立つ. また,

$$\sum_{i=1}^k \beta_i^* = 1 \quad (14)$$

が成り立つ.

証明 定理 1 と同様にして示すことができる. ■

また, 補題 2, 3, 4 も同様に拡張することができる.  $\beta_i^*$  を用いると, 式 (7) を拡張した次のような補間関数  $z^*$  を得る.

$$z^* = \sum_{i=1}^k \beta_i^* z_i \quad (15)$$

拡張した補間関数  $z^*$  は、計算する際 Voronoi 図を構成する必要がないため、値を効率よく求めることができる。一方、補間関数  $z$  は Voronoi 図の情報を用いているために、何らかの最良性が成り立っているということが予想される。式 (7) が凸結合であることは、この予想の裏付けの一つである。

この節の残りの部分で、拡張した補間法の応用について考察する。

## 4.2 位相優先法による Voronoi 図構成法との連携

計算幾何学の分野の多くのアルゴリズムは、演算が厳密に行なわれることを仮定しているが、実際の計算機では精度が有限かつ固定されている場合がほとんどである。したがって、理論的にはうまくいくアルゴリズムでも、計算機に実装すると破綻することがある (例えば、無限ループに陥るなど)。この困難を回避するための実際的な技術の一つが位相優先法である。位相優先法を用いたアルゴリズムによる Voronoi 図の構成については、例えば、Sugihara and Iri [6] を参照。

位相優先アルゴリズムによって Voronoi 図を構成した場合、厳密演算を用いて構成された「正しい」Voronoi 図と位相構造が異なる場合がある。したがって、Voronoi 図の構成に位相優先アルゴリズムを用いた場合、補間公式として、式 (7) でなく式 (15) を用いることになる。具体的には、リスト  $P_0$  として位相優先法によって求めた “neighbour” のリストを用いればよい。このようにして、数値誤差に対して robust な補間法が得られる。

## 4.3 $C^1$ 級の補間関数

第 3 節で考察した通り、補間関数 (7) は、 $CH(P)$  に属する任意の点において  $C^1$  級とは限らない。 $C^1$  級の補間関数を得るために、以下のようなことを考えている。

まず、求めたい補間関数の定義域を、 $P$  の要素を頂点とするような凸多角形によって分割する。点  $p$  における補間関数の値を求めるには、まず  $p$  を含む凸多角形  $C$  を求める。次に  $C$  の頂点を要素とするようなリスト  $P_0$  を考える。このとき、式 (15) を用いて、 $p$  における値を補間する。このようにして求めた補間関数  $z^*$  は、各凸多角形の内部で  $C^1$  級であることは  $\beta_i^*$  の定義より明らかである。

ただし、このままでは各凸多角形間の境界上の点で  $C^1$  級にならない。Sibson の論文 [4] では、solid modeling の分野で blending と呼ばれる手法を用いて、 $C^0$  級の補間法を  $C^1$  級にしている。そこで、同様に  $z^*$  に対して blending の手法を応用することにより、 $z^*$  を  $C^1$  級にすることができるだろうと考えられる。

## 5 補間関数の計算例

図 3, 4, 5 は、それぞれ Sibson の補間関数、補間関数 (7)、補間関数 (15) を計算した例を両眼立体視図で示したものである。式 (15) を計算する際には、反時計回りに入力が多角形の頂点を並べたものを  $P_0$  として用いた。

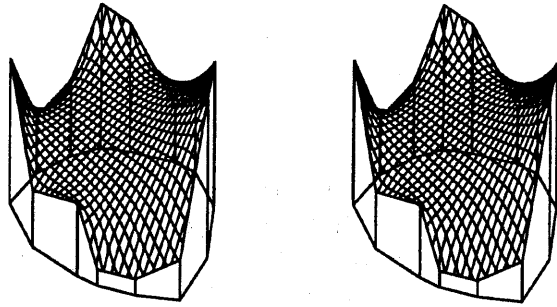


図 3. Sibson の補間関数.

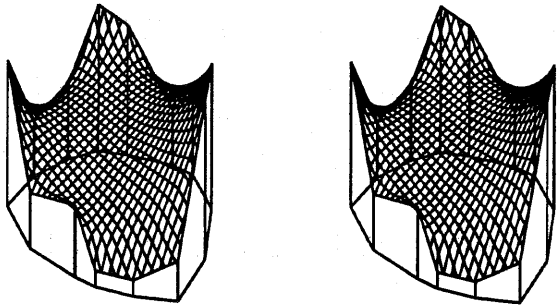


図 4. 本稿の補間関数.

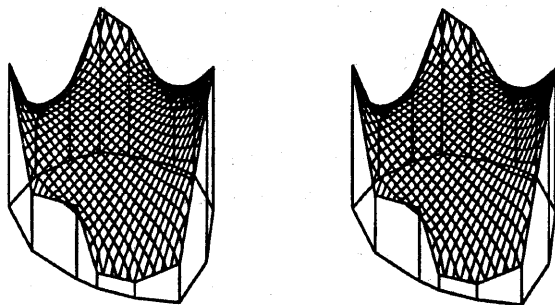


図 5. 拡張した補間関数.

## 6 結論

本研究では、新しい補間法を提案し、その性質のうち特に連続微分可能性について調査した。その結果、補間関数は、いくつかの円周上の点を除いて連続微分可能であることがわかった。もともとの補間法では、点  $p$  における値を補間する際に、「隣の」点として neighbour を用いていたが、本研究では「隣の」点として任意の母点を用いることができるように補間法を拡張した。この拡張と Voronoi 図の位相優先構成アルゴリズムを組み合わせることによって、数値演算の誤差に対して robust な補間法が得られる。

今後、以下の点について考察していきたいと考えている。

- もともとの補間法は、拡張した補間法の特別な場合になっているが、特に Voronoi 図の情報を用いているので、何らかの最良性が成り立っていると考えられる。この最良性の規準を研究する。
- 位相優先法を応用した Voronoi 図の構成アルゴリズムと拡張した補間法を組み合わせた数値誤差に対して robust な補間法を計算機に実装する。
- 拡張した補間法をもとに、 $C^1$  級の補間法を提案する。
- 本研究で考察した補間問題は、有限個の点上のデータを補間するものである。一方、Gross and Farin [2] は、円周や線分などの図形上にデータが与えられた場合に、Sibson の補間法を拡張している。そこで、本稿の補間法を図形上のデータ補間問題に拡張する。

本研究は、文部省科学研究費補助金の援助を受けたものである。

## 参考文献

- [1] H. Edelsbrunner, *Algorithms in Combinatorial Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [2] L. Gross and G. Farin, A transfinite form of Sibson's interpolant, *Abstracts of the 13th European Workshop on Computational Geometry*, Buerzburg, 1997.
- [3] R. Sibson, A vector identity for the Dirichlet tessellation, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **87** (1980), pp. 151-155.
- [4] R. Sibson, A brief description of natural neighbour interpolation, V. Barnett, ed., *Interpreting Multivariate Data*, John Wiley & Sons, 1981.
- [5] K. Sugihara, A new local coordinate system based on the Voronoi diagram, *Proceedings of Differential/Topological Techniques in Geometric Modeling and Processing '98*, pp. 27-41.
- [6] K. Sugihara and M. Iri, Construction of the Voronoi diagram for "one million" generators in single-precision arithmetic, *Proceedings of the IEEE* **80** (1992), pp. 1471-1484.